IL CALCOLO DIFFERENZIALE

ED

IL CALCOLO INTEGRALE

LIBRI QUATTRO

DI

F. ilippo CORRIDI

Professore di Matematiche superiori nella I. e R. Università di Pisa

FIRENZE

A SPESE DI GIO. RICORDI E STEF. JOUHAUD

1843

FIRENZE, TIPOGRAFIA LE MONNIER

A S. E. IL SIG. CAV. D. CARLO FILANGIERI

PRINCIPE DI SATRIANO, TENENTE GENERALE E DIRETTOR GENERALE DELL'ARTIGLIERIA E DEL GENIO NEL REGNO DELLE DUE SICILIE, EC. EC.

Eccellentissimo Principe,

A coloro, Eccellentissimo Principe, i quali sono per istituto consacrati alla istruzione della gioventù, tornano sempre dolci e gradite le cure da essi riputate giovevoli a render piana la scienza ai suoi novelli cultori. Imperocchè non solo ei vengono a dimostrare con quelle l'amore che nutrono per il ministero di che sono investiti, ma benanche ne rendono a loro stessi più agevole l'esercizio, e l'effetto utile più sicuro. E però se non mi astenni dal pubblicar colle stampe i miei trattati delle Matematiche minori, quando per ufizio doveva specialmente ad esse rivolgere i miei pensieri, decorsi ormai più anni da che fui chiamato a leggere il Calcolo sublime, non ho voluto tenermi dal render di pubblica ragione quelle dottrine che formano presentemente il subietto delle mie lezioni. Tantopiù che pochi, per non dire pochissimi, essendo i trattati italiani i quali possano servir di guida ad una pubblica e compiuta lettura intorno a siffatta materia, confidai che il mio non tenue lavoro dovesse riuscire non men profittevole che gradito. Nè tacerò che l'animo mio si raffermava vie più in questa piacevol fiducia nel considerare che io non tralasciata nessuna dottrina di conto, aveva aggiunte non poche novità, ed osservata una severità grande ne' fondamentali principj, e mantenute in ogni parte del libro (perchè il rigore del ragionamento fosse non che nell'intimo delle dimostrazioni anco nell'esteriore) le maniere di partizione degli antichi geometri, le quali a parer mio sono le sole di che s'informi il metodo veramente scientifico.

Fatto adunque proposìto di mettere in luce questo frutto de' miei assidui studi, ebbi tosto vaghezza, Eccellentissimo Principe, di offerirlo a Voi, come a persona degnissima, cui io ambiva di mostrare non senza quella solennità che per me si potesse maggiore la mia divozione. Nè vi sarà certo chi trovi alcun elemento di adulazione nel rispettoso atto; perocchè Voi siete geometra chiaro, ed avete valore da porre il piè senza timor d' incontrare difficil via ne' penetrali stessi della Scienza del calcolo. E come a Voi, Eccellentissimo Principe, non fu grave la lettura degli altri miei scritti scientifici, de' quali anzi vi piacque dar giudizio benevolo ne' pubblici fogli, vuo' creder che questo ancora vi torni benaccetto, e l'offerta gradita.

Qui per seguire l' usanza, io dovrei dire dei meriti vostri e di quelle altre cose che vi rendono singolare dai più; ma sicuro che sdegnereste di accettare, ancorchè vera, ogni parola di lode, tacerò; sebbene egli è nulla ch' io abbia taciuto quando parlano tutti.

E senza più mi pregio di raffermarmi

Di Voi, Eccellentissimo Principe,

Pisa Novembre 1843.

Devotiss. Osseq. Servitore
Filippo Corridi

LIBRO PRIMO

IL CALCOLO DIFFERENZIALE

I. Le nozioni preliminari.

1. Definizione I. Ogni quantità che si considera in istato di aumento o di decremento continuo dicesì *quantità variabile.*

2. Definizione II. Ogni quantità cui si attribuisce un valore fisso chiamasi *quantità costante.* Una quantità si stimerà costante relativamente ad un'altra, allorquando non varierà al variare di questa.

3. Definizione III. Chiamasi *indeterminata* ogni quantità che si trova in istato di ricevere qualunque valore. Una quantità variabile è necessariamente indeterminata finchè non riceve un valore particolare.

4. Definizione IV. Ogni quantità u che varia in conseguenza dei cangiamenti di valore d'un'altra quantità x dicesi *funzione della* x. Se la u varierà in conseguenza dei cangiamenti di valore di più quantità x, y, z, ec., la u sarà funzione di tutte le quantità medesime. In questo caso la u potrà anche dirsi *variabile dipendente* da x, y, z, ec.

5. Definizione V. Una variabile si dirà *indipendente* allorquando potendo variare a piacimento nostro, e non in conseguenza dei cangiamenti di valore d'altre quantità, sarà atta a ricevere qualunque valore particolare.

6. Scolio. Sia u una funzione di n variabili indipendenti x, y, z, ec.; ciascuna di queste variabili potrà variare indipen-

dentemente dalle altre: ciò non avverrebbe se esse dipendessero da una variabile t; variando t necessariamente x, y, z, ec., varierebbero. Parimente se si avessero fra le n variabili x, y, z, ec., $n-1$ equazioni, i valori di queste variabili dipenderebbero dal valore d'una di esse, la quale sarebbe la sola variabile indipendente. In generale se m variabili fossero legate insieme per mezzo di n equazioni, solo $m-n$ di queste variabili sarebbero indipendenti.

7. Definizione VI. Una quantità si stimerà *infinitesima* quando sarà capace, indipendentemente dai cangiamenti di qualunque altra quantità, di riuscire minore di qualsivoglia grandezza data, senza divenire per altro assolutamente e rigorosamente zero.

8. Scolio. Una quantità infinitesima si trova perciò in istato di continuo e necessario decremento; ma non in forza dei successivi cambiamenti d'una variabile indipendente, come avviene, per esempio, della funzione x^{+a} la quale va sempre decrescendo a misura che decresce la x, oppure come avviene della funzione x^{-a} che va sempre decrescendo a misura che la x cresce: una quantità infinitesima risulta minore di qualsivoglia quantità data, perchè la natura sua, ovvero il suo modo di esistere è quello di mantenersi *sempre variabile*, e continuamente decrescente, cioè tale da non potere incontrare un termine dove si arresti e si sospenda, a così dire, il suo corso. Tutte queste circostanze si rinvengono, per esempio, nella distanza fra il ramo dell'iperbola ed il suo asintoto; siffatta distanza, quando non si consideri in un punto determinato della curva, sarà adunque una quantità infinitesima.

9. Definizione VII. Una quantità si reputerà *infinita* quando sarà capace, indipendentemente dai cangiamenti di qualunque altra quantità, di riuscire maggiore di qualsivoglia grandezza data.

10. Scolio. Una quantità infinita si trova perciò in istato di continuo e necessario aumento; ma non in virtù dei successivi cambiamenti d'una variabile indipendente, come avviene, per esempio, della funzione x^{+a} la quale và sempre crescendo a misura che cresce la x, oppure come avviene della funzione x^{-a} che va sempre crescendo a misura che la x decresce: una quantità infinita risulta maggiore di qualsivoglia quantità data, perchè la natura sua, ovvero il suo modo di esistere è quello di mantenersi *sempre variabile*, e continuamente crescente

cioè tale da non potere incontrare un termine dove si arresti o si sospenda, a così dire, il suo corso. Tali circostanze si rinvengono, per esempio, nella tangente dell'arco di 90 gradi; dunque questa tangente è una quantità infinita.

11. Definizione VIII. Una funzione dicesi *indeterminata* quando di essa non si conoscono che le variabili da cui dipende. Una funzione indeterminata delle variabili x, y s'indica in questa guisa $f(x, y)$ oppure così $F(x, y)$; in generale si pongono fra due parentesi le variabili da cui dipende la funzione, e si scrive innanzi la lettera f, o F iniziale della parola funzione. Talvolta in luogo della f si scrive la φ, la ψ, la χ, la ξ, ec.

12. Definizione IX. Una funzione dicesi *determinata* quando non solamente si conoscono le variabili dalle quali dipende, ma più si conosce il modo con cui queste variabili sono insieme combinate; cioè quando si conoscono tutte le operazioni che debbono farsi con esse per ottenere la funzione di cui si tratta. Tali sono le funzioni x^2+y^2, $\log(x+y)$, $\mathrm{sen}(x+y)$, ec.

13. Scolio I. Così la funzione indeterminata $f(x+h)$ sarà l'espressione generale di tutte le funzioni della x in cui questa variabile si trova costantemente aggiunta alla quantità h. Essa comprende adunque tutte le funzioni determinate $(x+h)^m$, e^{x+h}, $\log(x+h)$, $\mathrm{sen}(x+h)$, ec. Anche $f(ax)$ sarà l'espressione generale di tutte le funzioni della x in cui questa variabile si trova moltiplicata pel coefficiente costante a. Ora il passare dalla funzione indeterminata $f(x+h)$ ad una delle sue forme determinate, per esempio $\mathrm{sen}(x+h)$, si dice *determinare la funzione;* cioè la funzione $f(x+h)$ riescirà determinata subitochè potremo sostituire ad essa una espressione analitica nella quale si vedano le operazioni da farsi sopra $x+h$.

14. Scolio II. È da notare che mediante la caratteristica fa intenderemo di rappresentare il valore particolare che acquista la funzione fx facendo $x=a$; così $f(1)$, $f(0)$ oppure $f1$, $f0$, rappresenteranno i valori particolari della funzione fx corrispondenti ad $x=1$, $x=0$.

15. Definizione X. Una funzione si chiamerà *funzione algebrica* allorquando le variabili da cui essa dipende saranno legate fra loro mediante alcuna delle operazioni primitive dell'algebra; cioè coll'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione e l'inalzamento ad una potenza di grado costante intero o fratto. Tali sono le funzioni ax^m, x^my^n, $x^m(ay^n+bz^p)$, ec.

16. Definizione XI. Una funzione si dirà *funzione esponenziale*, o *logaritmica*, o *circolare* secondochè le variabili da cui essa dipende saranno esponenti, o quantità delle quali entra in calcolo il logaritmo, o rappresenteranno archi di circolo oppure le linee trigonometriche di questi archi. Così a^x sarà una funzione esponenziale; $\log x$ una funzione logaritmica; $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$ saranno funzioni circolari di cui la variabile rappresenta un arco di circolo; $\operatorname{ar sen} x$ sarà una funzione circolare di cui la variabile rappresenta un seno; $\operatorname{ar cos} x$ sarà una funzione circolare la cui variabile rappresenta un coseno; ec.

17. Definizione XII. Le funzioni esponenziali, le logaritmiche, le circolari e tutte le funzioni in generale che non possono riputarsi algebriche si dicono *funzioni trascendenti*.

18. Definizione XIII. Una funzione si dirà *continua* quando non potrà riuscire infinita, e sarà capace di passare da un valore ad un altro passando rigorosamente per tutti i valori intermedi. Talvolta una funzione è continua dentro certi limiti soltanto; talvolta è continua senza veruna restrizione.

19. Scolio. Una funzione varia al variare della variabile da cui dipende; in conseguenza, perchè una funzione fx sia continua fra due limiti $x=p$, $x=q$ della variabile x, si esige, 1° che per tutti i valori della x compresi fra p e q questa funzione non possa risultare infinita, 2° che attribuendo alla variabile stessa due valori particolari a, b compresi fra questi limiti, i valori corrispondenti fa, fb della funzione differiscano fra loro d'una quantità capace di riuscire piccola quanto vuolsi, e tanto più piccola quanto più piccola sarà la differenza $a-b$.

20. Definizione XIV. Una funzione che non goda della proprietà di esser continua si dirà *discontinua*.

21. Scolio. Ponendo mente alla definizione XIII (n. 16) concluderemo che la discontinuità d'una funzione fx non può aver luogo che nei tre casi seguenti;

1° Quando variando la x in un modo continuo, la funzione fx cesserà di esser finita per diventare infinita.

2° Quando variando la x in un modo continuo, la funzione fx cesserà di esser reale per diventare immaginaria.

3° Quando variando la x in un modo continuo, avverrà che s'incontrino due valori consecutivi della funzione fx tali che non si possa rendere la differenza loro minore di qualunque quantità data.

Dunque per conoscere se una funzione di x è continua fra due limiti p e $q=p+a$ della variabile, bisognerà primieramente assicurarci se attribuendo alla variabile stessa un valore qualunque contenuto fra questi limiti la funzione riceve un valore finito e reale; in secondo luogo porremo mente alla espressione analitica della differenza $f(x+h)-fx$, ed osserveremo se ponendo $x=p$, e facendo crescere la h da 0 sino ad a in un modo continuo, varierà in un modo continuo anche la differenza medesima.

Dopo di ciò è agevole stabilire le seguenti cose: 1° le funzioni x^{+a}, a^x, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ sono continue senza veruna restrizione; non v'ha infatti alcun valore di x positivo o negativo per il quale queste funzioni possano diventare infinite o immaginarie; inoltre crescendo la x per gradi piccolissimi, tutte queste funzioni variano esse pure per gradi piccolissimi; ciò si esprime dicendo che siffatte funzioni sono continue per tutti i valori della x da $x=+\infty$ ad $x=-\infty$. 2° la funzione x^{-a} diventa infinita per $x=0$; perciò v' ha *discontinuità*, o v'ha come dicono *soluzione di continuità* per $x=0$; questa funzione adunque sarà continua da $x=0$ ad $x=+\infty$, e continua altresì da $x=0$ ad $x=-\infty$. 3° la funzione $\log x$ diventa immaginaria per qualunque valore negativo della x; sicchè essa è continua solamente da $x=0$ ad $x=+\infty$. 4° le funzioni $\operatorname{ar\,sen} x$, $\operatorname{ar\,cos} x$ sono continue fra i limiti $x=-1$ ed $x=+1$. 5° la funzione $\sqrt{(x-a)}+\sqrt{(b-x)}$, ove si supponga che a e b sieno numeri positivi ed $a<b$, è continua per tutti i valori della x compresi fra a e b, perchè fra questi due limiti non diventa immaginaria nè infinita, e varia per gradi piccoli quanto vuolsi, mentrechè essa diventa immaginaria sì per $x<a$ come per $x>b$. 6° la funzione $\frac{x}{\sqrt{x^2}}$ per tutti i valori della x estesi da $x=0$ ad $x=+\infty$ acquista il valore $+1$, e per tutti i valori di x estesi da $x=0$ ad $x=-\infty$ acquista il valore -1; questa funzione adunque allorquando la variabile passa da un valore positivo ad un valore infinitamente prossimo negativo, passa d'un salto dal valore $+1$ al valore -1; dunque v'ha discontinuità per $x=0$; perciò la funzione è continua da $x=0$ ad $x=+\infty$, e da $x=0$ ad $x=-\infty$.

II. Le quantità medie.

22. Definizione. Una quantità è detta *media* fra più altre quantità allorquando si trova compresa fra la maggiore e la minore di esse.

23. Teorema I. *La somma di più prodotti divisa per la somma de' loro moltiplicatori è una media fra i loro moltiplicandi.*

Abbiansi i prodotti AM, BN, CP ... UR; supporremo che i moltiplicandi A, B, C ... U procedano secondo l' ordine di grandezze crescenti, talchè A sia il minore ed U il maggiore di essi; avremo

$$AM=AM,\ AN<BN,\ AP<CP\ldots;$$

$$UM>AM,\ UN>BN,\ UP>CP\ldots;$$

sommando risulterà

$$A<\frac{AM+BN+CP+\ldots}{M+N+P+\ldots}<U$$

che è quanto dovevasi dimostrare.

24. Teorema II. *La somma dei numeratori di più frazioni divisa per la somma de' loro denominatori è una media fra le frazioni medesime.*

Abbiansi le frazioni $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, $\frac{E}{F}$ ... $\frac{U}{V}$; supponiamo che sieno disposte secondo l' ordine di grandezze crescenti. Poichè

$$\frac{A}{B}\times B=A,\ \frac{C}{D}\times D=C,\ \frac{E}{F}\times F=E\ \ldots\ \frac{U}{V}\times V=U,$$

sarà (n. 21) $$\frac{A}{B}<\frac{A+C+E+\ldots}{B+D+F+\ldots}<\frac{V}{U}$$

come dovevasi dimostrare.

25. Scolio. Questi teoremi sussistono ove anche le quantità date, cioè i prodotti, o le frazioni, sieno tutte o in parte negative.

26. Caratteristica delle medie. Ad indicare una media fra le quantità A, B, C.... U si scrive così (*)

(*) È questo un modo di scrittura usato dal signor Cauchy: *Cours d'Analyse etc. Première Partie*, p. 17. *Note* 11, p. 438.

$$M(A,\ B,\ C \ldots\ldots U)$$

I teoremi precedenti possono adunque esprimersi analiticamente nel seguente modo:

$$\frac{AM+BN+CP+\ldots}{M+N+P+\ldots}=M(A,\ B,\ C\ldots)$$

$$\frac{A+C+E+\ldots}{B+D+F+\ldots}=M\left(\frac{A}{B},\ \frac{C}{D},\ \frac{E}{F}\ldots\right)$$

III. I limiti.

27. Definizione. Una quantità costante A si chiamerà *limite* d' una quantità variabile X crescente o decrescente allorchè la X rimanendo sempre minore di A nel primo caso, e sempre maggiore nel secondo potrà avvicinarsi ad A per modo che la differenza fra A ed X riesca minore di qualsivoglia quantità data.

28. Scolio. Le quantità infinitesime hanno per limite lo zero. Le infinite crescono senza limite; nullameno allorquando una quantità gode della proprietà di potere avanzare qualunque valore dato, si suol dire che essa quantità ha per limite l' infinito, benchè propriamente parlando non abbia alcun limite assegnabile. Al limite ∞ attribuiremo il segno $+$ o il $-$ secondochè la quantità che convergerà verso di esso sarà positiva o negativa.

29. Caratteristica del limite. Il limite d' una variabile X s' indica in questa guisa

$$\mathfrak{L}\, X$$

cioè mediante la caratteristica $\mathfrak{L}$. Ma quando si tratta del limite d' una funzione è necessario designare l' elemento variabile che induce la funzione a convergere verso siffatto limite, e conviene designare altresì il limite di questo elemento. Per esempio, la funzione x^{-a} quando a converga verso lo zero, converge verso l' unità, e quando x converga verso lo zero, cresce senza limite; scriveremo adunque

$$\int\limits_{a=0} x^{-a}=1 \qquad\qquad \int\limits_{x=0} x^{-a}=\infty$$

cioè al di sotto della caratteristica $\int$ porremo l'elemento variabile della funzione ed il limite di questo elemento. Per conseguenza la caratteristica

$$\int\limits_{x=a} fx$$

rileva un limite della funzione fx, il quale si dee determinare facendo convergere x verso a; che è quanto dire un limite che si ricava dalla funzione fx ponendo nella espressione analitica di questa funzione $x=a$.

Avremo adunque

$$\int\limits_{x=a} [(x-a)^m+(x-b)^m]=(a-b)^m$$

$$\int\limits_{x=b} [(x-a)^m+(x-b)^m]=(b-a)^m$$

e quindi

$$\int\limits_{x=a} [(x-a)^m+(x-b)^m]=(-1)^m\int\limits_{x=b} [(x-a)^m+(x-b)^m]$$

È da osservare che

$$\int\limits_{h=0} \frac{(x+h)^m-x^m}{h}=\frac{0}{0};$$

qui il limite della funzione si presenta sotto la forma indeterminata $\frac{0}{0}$; in questo caso per trovare il valor vero di esso limite sarà necessario ricorrere alle formule che stabiliremo in appresso.

30. Teorema I. *Se due variabili* X, Y *nell'avvicinarsi ai*

loro limiti A *e* B *si manterranno sempre uguali, anco i limiti stessi saranno uguali.*

Infatti supponiamo $A < B$; porremo $A + D = B$; immaginiamo che le variabili X, Y sieno crescenti; in tal caso queste variabili si avvicineranno indefinitamente a' loro limiti A, B rimanendo sempre al di sotto di essi; perciò Y potrà avvicinarsi a B, che è quanto dire ad $A + D$, in modo da superare A. Ma Y ed X nei loro successivi cambiamenti si mantengono sempre uguali fra loro; dunque anche la X potrebbe superare A cioè il suo limite, lo che è assurdo; dunque $A = B$.

Se le variabili X, Y si supponessero decrescenti sarebbe sempre $A = B$, lo che potrebbe dimostrarsi in un modo analogo al precedente.

31. Corollario I. Sia $X = A + \alpha$, $Y = B + f\alpha$; dove le quantità α ed $f\alpha$ si suppone che convergano ad un tempo verso lo zero; ogniqualvolta verificheremo essere

$$A + \alpha = B + f\alpha, \qquad (1)$$

ne inferiremo in virtù del teorema precedente, l'equazione

$$A = B,$$

la quale si dirà *equazione de' limiti.*

32. Corollario II. Si osservi che

$$(A + \alpha)(B + f\alpha) = AB + Af\alpha + B\alpha + \alpha f\alpha;$$

ora la quantità $Af\alpha + B\alpha + \alpha f\alpha$ gode della proprietà di convergere verso lo zero a misura che converge verso lo zero α; inoltre essa va manifestamente a zero per $\alpha = 0$; dunque

$$\mathop{\int}_{\alpha=0} (A + \alpha)(B + f\alpha) = AB,$$

e per conseguenza

$$\int(XY) = \int X \int Y; \qquad (2)$$

dunque il *limite del prodotto di due variabili è uguale al prodotto de' limiti di queste variabili stesse.*

33. Corollario III. Sia $XY = Z$; sarà per l'equazione (2)

$$\int X \int Y = \int Z;$$

conseguentemente $$\int X = \frac{\int Z}{\int Y};$$

ma $X = \frac{Z}{Y}$, dunque $$\int \frac{Z}{Y} = \frac{\int Z}{\int Y}; \tag{3}$$

dunque il *limite del quoziente di due variabili è uguale al quoziente de' limiti delle variabili stesse.*

34. Corollario IV. Sia H indipendente da α; sostituendo H ad $\int Y$, avremo dalla (2)

$$\int (HX) = H \int X. \tag{4}$$

Questa equazione può anche dimostrarsi direttamente; si osservi che

$$HX = H(A + \alpha) = HA + H\alpha;$$

passando all'equazione de' limiti (n. 31) risulterà come sopra

$$\int (HX) = HA = H \int X;$$

dunque il *limite d'un prodotto di cui un fattore sia indipendente dall'elemento variabile è uguale a questo fattore medesimo moltiplicato per il limite dell'altro fattore.*

35. Corollario V. Dal coroll. iii. (n. 33) risulta altresì che

$$\int \frac{X}{H} = \frac{\int X}{H}, \qquad \int \frac{H}{X} = \frac{H}{\int X};$$

le quali equazioni possono pure considerarsi come una conseguenza della equazione (4).

36. Teorema II. *Se due variabili* X, Y *avvicinandosi ai loro limiti* A, B *conserveranno sempre una medesima ragione* $M:N$ *anco i limiti stessi avranno quella ragione.*

Poichè per dato

$$X : Y :: M : N,$$

sarà $$X = \frac{M}{N} Y,$$

e quindi (n. 34) $\int X = \frac{M}{N} \int Y$,

ovvero $\int X : \int Y :: M : N$;

cioè $A : B :: M : N$.

37. Scolio. Tanta è l'importanza di questo teorema che non sarà superfluo dimostrarlo con rigore geometrico nel seguente modo.

Sieno le variabili X, Y crescenti, e supponiamo che abbiasi $M : N :: A : B - D$, D esprimendo una quantità qualunque minore di B; siccome Y può avvicinarsi a B quanto si vuole, perciò Y potrà acquistare un valore $Y_1 > B - D$. Sia X_1 il valore che ha la X quando la Y ha il valore Y_1; avremo $M : N :: X_1 : Y_1$ e quindi $A : B - D :: X_1 : Y_1$; ma $X_1 < A$, perchè la X essendo variabile crescente non può riuscire maggiore del suo limite A, dunque $Y_1 < B - D$; e conseguentemente è assurdo che sia $Y_1 > B - D$, cioè assurda è l'ipotesi che sia $M : N :: A : B - D$.

Supponiamo ora che abbiasi $M : N :: A : B + D$; invertendo sarà $N : M :: B + D : A$. Sia U una quarta proporzionale dopo $B + D$, A, B; avremo $B + D : A :: B : U$, dove sarà $U < A$ perchè $B < B + D$; cosicchè starebbe $N : M :: B$ ad una quantità U minore di A; ma in quella guisa che abbiamo dimostrato non potere stare $M : N :: A$ ad una quantità minore di B, così può dimostrarsi non potere stare neppure $N : M :: B$ ad una quantità minore di A; dunque il risultato precedente $N : M :: B : U$ è assurdo, e per conseguenza assurda è l'ipotesi che sia $M : N :: A : B + D$. Dunque $M : N :: A : B$.

Quando le variabili X, Y si supponessero decrescenti potremmo mediante un ragionamento analogo al precedente giungere alla medesima conclusione.

38. Corollario. Sia $X = A + \alpha$, $Y = B + f\alpha$; dove le quantità α ed $f\alpha$ si suppone che convergano ad un tempo verso lo zero; ogniqualvolta verificheremo essere

$$\frac{A + \alpha}{B + f\alpha} = \frac{M}{N},$$

ne inferiremo l'equazione seguente

$$\frac{A}{B} = \frac{M}{N}.$$

39. Teorema II. *Allorquando una quantità costante* C *sarà compresa fra le variabili* X, Y *per modo che sia* X < C < Y, *se* X *ed* Y *convergeranno verso i loro limiti* A *e* B *decrescendo, sarà* C *non maggiore di* B, *e maggiore di* A; *se poi* X *ed* Y *convergeranno verso i loro limiti* A *e* B *crescendo, sarà* C *non minore di* A, *e minore di* B.

Se X, Y convergeranno verso i loro limiti A, B decrescendo, rappresentando con α e β due quantità positive capaci di convergere verso lo zero, potremo porre $X = A + \alpha$, $Y = B + \beta$; talchè avremo per dato $A + \alpha < C < B + \beta$; ora 1° poichè $A + \alpha < C$, *a fortiori* $A < C$. 2° poichè $C < B + \beta$ non potrà essere $C > B$; infatti supponendo $C = B + D$ avremmo $B + D < B + \beta$, ovvero $D < \beta$ risultato assurdo, perchè β può riuscire minore di qualunque quantità data, e perciò minore di D. La condizione $C < B + \beta$ non esclude l'altra $C = B$. Dunque se $A + \alpha < C < B + \beta$, sarà $A < C \not> B$ (*).

Cambiando A in B e B in A, α in β e β in α, potremo altresì stabilire che se $B + \beta < C < A + \alpha$, sarà $B < C \not> A$.

Se X, Y convergeranno verso i loro limiti A, B crescendo, sarà $X = A - \alpha$, $Y = B - \beta$ cosicchè avremo per dato $A - \alpha < C < B - \beta$; ora 1° poichè $C < B - \beta$, *a fortiori* $C < B$. 2° poichè $A - \alpha < C$ non potrà essere $A > C$; infatti quando si supponesse $C = A - D$ avremmo $A - \alpha < A - D$, ovvero $D < \alpha$ risultato assurdo, perchè α può riuscire minore di qualunque quantità data, e perciò minore di D. La condizione $A - \alpha < C$ non esclude l'altra $A = C$. Dunque se $A - \alpha < C < B - \beta$ sarà $A \not> C < B$.

Cambiando A in B e B in A, α in β e β in α stabiliremo altresì che se $B - \beta < C < A - \alpha$, sarà $B \not> C < A$.

40. Corollario I. Riunendo i risultati precedenti si conclude

che se $A + \alpha < C < B + \beta$, sarà $A < C \not> B$;

se $A + \alpha > C > B + \beta$, sarà $B < C \not> A$;

se $A - \alpha < C < B - \beta$, sarà $A \not> C < B$;

se $A - \alpha > C > B - \beta$, sarà $B \not> C < A$;

(*) L'espressione $C \not> B$ indica C *non maggiore di* B, cioè comprende i due casi di $C < B$ e $C = B$; $B \not< C$ indicherebbe B *non minore di* C, cioè $B > C$ e $B = C$. Così il *Francœur Mathém., Tome* Ier, *quatrième éd.* n. 115.

dunque allorquando avremo

$$C = M(A \pm \alpha, \ B \pm \beta),$$

C dovrà soddisfare ad una delle tre condizioni seguenti

$$C = A, \quad C = B, \quad C = M(A, B). \tag{5}$$

In altri termini, tostochè sarà

$$C = M(X, Y)$$

avrà luogo una delle seguenti condizioni

$$C = \int X, \quad C = \int Y, \quad C = M(\int X, \int Y) \tag{6}$$

41. Corollario II. Se sarà

$$E \pm \gamma = M(A \pm \alpha, \ B \pm \beta),$$

passando alla equazione de' limiti n. (31), avremo

$$E = \int [M(A \pm \alpha, B \pm \beta)]; \tag{7}$$

ora la quantità $M(A \pm \alpha, \ B \pm \beta)$ in virtù del corollario precedente non può avere che uno de' valori (5), perciò sostituendo questi valori nella equazione (7) avremo

$$E = \int A, \text{ oppure } E = \int B, \text{ oppure } E = \int [M(A, B)];$$

ma le quantità A e B sono indipendenti da α e da β, dunque risulterà

$$E = A, \text{ oppure } E = B, \text{ oppure } E = M(A, B) \tag{8}$$

In altri termini facendo $E \pm \gamma = V$, cioè supponendo che V sia una variabile convergente verso il limite $\int V$, se sarà

$$V = M(X, Y)$$

dovrà certo verificarsi una delle seguenti condizioni

$$\int V = \int X, \quad \int V = \int Y, \quad \int V = M(\int X, \int Y); \tag{9}$$

42. Corollario III. Sia C una quantità costante, e le X, Y, Z.... U sieno quantità variabili convergenti verso i loro limiti $\int X$, $\int Y$, $\int Z$ ... $\int U$; sia inoltre

$$C = M(X, \ Y, \ Z \ldots . U), \tag{10}$$

e supponiamo che X, Y, Z ... U sieno disposte secondo l'ordine di grandezze crescenti, cioè che X, Y, Z.... U varino in modo da soddisfare a siffatta condizione; sarà (n. 40)

$$C = \int X, \text{ oppure } C = \int U, \text{ oppure } C = M(\int X, \int U);$$

ora $Y = M(X, U)$, $Z = M(X, U), \ldots\ldots$

perciò (n. 41)

$$\int Y = \int X, \text{ oppure } \int Y = \int U, \text{ oppure } \int Y = M(\int X, \int U),$$
$$\int Z = \int X, \text{ oppure } \int Z = \int U, \text{ oppure } \int Z = M(\int X, \int U),$$

. . . .

ma le equazioni $\int Y = M(\int X, \int U)$, $\int Z = M(\int X, \int U), \ldots$ significano che le quantità $\int Y$, $\int Z \ldots$ sono comprese fra $\int X$ ed $\int U$, dunque sussistendo la condizione espressa dalla equazione (10) sussisterà con essa una delle condizioni seguenti

$$C = \int X,\ C = \int Y,\ \ldots . C = \int U,\ C = M(\int X, \int Y, \ldots \int U) \quad (11)$$

43. Corollario IV. Abbiasi

$$V = M(X, Y, Z \ldots U)$$

V esprimendo una variabile; è facile dimostrare che dovrà verificarsi una delle condizioni seguenti

$$\int V = \int X,\ \int V = \int Y, \ldots \int V = \int U,\ \int V = M(\int X, \int Y, \ldots \int U) \quad (12)$$

44. Corollario V. Se avremo

$$C = M(A \pm \alpha,\ A \pm \beta)$$

risulterà $$C = A;$$

infatti le tre condizioni (5) facendo $A = B$, si riducono alla unica equazione $C = A$.

Se avremo

$$E \pm \gamma = M(A \pm \alpha,\ A \pm \beta)$$

risulterà pure $$E = A;$$

perchè in virtù del corollario II, le tre condizioni (8) si riducono alla equazione $E = A$.

45. Corollario VI. Se avremo

$$C = M(A \pm \alpha, A \pm \beta,\ A \pm \delta \ldots)$$

oppure

$$V = M(A \pm \alpha,\ A \pm \beta,\ A \pm \delta \ldots)$$

sarà respettivamente

$$C = A,$$

$$\mathcal{L}V = A;$$

ciò si verifica facendo $A = \mathcal{L}X = \mathcal{L}Y = \ldots$ in tutte le equazioni (11) e nelle equazioni (12); dunque *se una quantità costante* C, *o una variabile* V *avente* C *per limite, sarà media fra le variabili* X, Y,.. U *e se queste variabili convergeranno a un tempo verso uno stesso limite* A, *avremo* C = A.

IV. Il rapporto dell'accrescimento d'una funzione all'accrescimento della variabile indipendente. Limite di questo rapporto.

46. Principio. Sia fx una funzione della variabile x; un accrescimento h che riceva questa variabile si può supporre diviso in parti uguali o disuguali, le quali saranno tanto più piccole quanto più grande sarà il loro numero; ragione per cui queste parti, che diremo h_0, h_1, h_2,... h_n, si potranno riputare infinitesime; la loro somma per altro sarà costante ed uguale ad h; diguisachè porremo

$$h = h_0 + h_1 + h_2 \ldots . + h_n$$

Frattanto i valori successivi che acquisterà la x per passare dal valore iniziale qualunque x al valore $x + h$ saranno

$$x, x + h_0 = x_1,\ x_1 + h_1 = x_2,\ x_2 + h_2 = x_3 \ldots x_n + h_n = x + h, \quad (1)$$

ed i valori o *stati* corrispondenti della funzione saranno

$$fx,\ f(x + h_0),\ f(x_1 + h_1),\ f(x_2 + h_2) \ldots f(x_n + h_n) = f(x + h) \quad (2)$$

E perciò i rapporti degli accrescimenti successivi di questa funzione ai corrispondenti accrescimenti della variabile dovranno esprimersi nel seguente modo

$$R_0 = \frac{f(x + h_0) - fx}{h_0}, R_1 = \frac{f(x_1 + h_1) - fx_1}{h_1}, \ldots R_2 = \frac{f(x_n + h_n) - fx_n}{h_n}, \quad (3)$$

mentrechè il rapporto dell'accrescimento $f(x + h) - fx$ della funzione all' accrescimento h finito della variabile x sarà rappresentato dalla frazione

$$R = \frac{f(x+h) - fx}{h}; \tag{4}$$

ora sommando i numeratori delle frazioni (3) e sommandone i denominatori si ottiene la frazione (4), dunque (n. 24)

$$R = M(R_0, R_1, R_2, \ldots R_2);$$

dunque il *rapporto dell' accrescimento della funzione* fx *all' accrescimento* h *finito della* x *è una media fra i rapporti degli accrescimenti successivi di* fx *a' corrispondenti accrescimenti che riceve la variabile per passare dal valore iniziale* x *ad* x + h.

47. Scolio. La dimostrazione precedente suppone che nessuno degli stati successivi (2) della funzione fx sia infinito. Il principio avrà adunque luogo in due casi;

1° Quando la x sarà indeterminata, perciocchè in questo caso gli stati (2) saranno altrettante espressioni analitiche nessuna delle quali potrà essere infinita; infatti una funzione non risulta infinita che per qualche valore particolare della variabile.

2° Quando la x riceverà un valore particolare x_0 ed un accrescimento h tali che la funzione fx sia continua da x_0 ad $x_0 + h$ inclusive; perchè allora nessuno stato della funzione sarà infinito a cagione della continuità della funzione stessa. In questo caso i rapporti (3) saranno frazioni numeriche, e per distinguerle dalle precedenti le indicheremo colla r minuscola; talchè sarà

$$r_0 = \frac{f(x_0 + h_0) - fx}{h_0},\ r_1 = \frac{f(x_1 + h_1) - fx_1}{h_1}, \ldots r_n = \frac{f(x_n + h_n) - fx_n}{h_n}$$

Potrà la funzione fx essere crescente fino a un certo punto, e da quello in poi essere decrescente o viceversa; il principio sarà sempre vero. La funzione per esempio $a + (x - b)^2$ è decrescente da $x = 0$ ad $x = b$, crescente quando la x oltrepassa questo limite, nullameno può ad essa applicarsi il principio senza far luogo ad alcuna eccezione.

Inoltre non è necessario che la funzione fx per tutti i valori della x estesi da x_0 ad $x_0 + h$ conservi il medesimo segno; infatti supponendo che essa sia negativa per tutti i valori della x estesi da x_0 ad x_m inclusive e positiva per tutti i valori susseguenti, i rapporti (3) diverranno

$$r_1 = \frac{-f(x_0+h_0)+fx_0}{h_0}, \quad r_1 = \frac{-f(x_1+h_1)+fx_1}{h_1}, \ldots$$

$$\ldots r_{m-1} = \frac{-f(x_{m-1}+h_{m-1})+fx_{m-1})}{h_{m-1}}, r_m = \frac{+f(x_m+h_m)+fx_m}{h_m}, \ldots$$

facendo la somma dei numeratori, e la somma dei denominatori, otterremo come sopra il rapporto

$$r = \frac{f(x_0+h)-fx_0}{h}. \tag{5}$$

Si avverta che una funzione continua non può cessare di essere negativa per diventare positiva senza passare per lo zero; ciò non altera il ragionamento fatto sopra.

48. Teorema I. *Se* x *ed* h *saranno indeterminate, il rapporto dell'accrescimento della funzione* fx *all'accrescimento corrispondente* h *della variabile, avrà per limite una funzione di questa variabile stessa, e solo nel caso in cui* fx *sia una funzione lineare quel limite sarà costante ed uguale al coefficiente della* x.

1° Supponiamo $$\int_{h=0} R = \infty\,; \tag{6}$$

sarà $$\int_{h=0} \frac{1}{R} = 0, \text{ e perciò } \frac{1}{R} = \varphi h\,; \tag{7}$$

dove φh s' intende che esprima una funzione indeterminata di h capace di convergere verso lo zero in pari tempo di h. Or se l'equazione (7) sussiste per la x indeterminata e indipendente da h, sussisterà altresì per $x=x$ ed $h=h_0$, per $x=x+h_0$ ed $h=h_1$, per $x=x_1+h_1$ ed $h=h_2$, ec. perchè $x, x+h_0, x_1+h_1, x_2+h_2$ ec. sono tutte espressioni indeterminate della x indipendenti respettivamente da $h_0, h_1, h_2, h_3 \ldots$; avremo adunque

$$\frac{1}{R_0} = \varphi h_0, \ \frac{1}{R_1} = \varphi h_1, \ \frac{1}{R_2} = \varphi h_2 \ \ldots \tag{8}$$

e come φh converge verso lo zero con h, così $\varphi h_0, \varphi h_1, \varphi h_2 \ldots$ convergeranno verso lo zero con $h_0, h_1, h_2 \ldots$

Ciò posto si osservi che (n. 46)

$$\frac{1}{R} = M\left(\frac{1}{R_0}, \ \frac{1}{R_1}, \ \frac{1}{R_2} \cdots\right);$$

e poichè, a cagione delle equazioni (8), tutte le quantità $\frac{1}{R_0}, \frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2} \ldots$ convergono in pari tempo di $h_0, h_1, h_2 \ldots$ verso lo zero, cioè verso uno stesso limite, perciò sarà (n. 45)

$$\frac{1}{R} = 0, \tag{9}$$

e quindi $h = 0$ oppure $f(x+h) - fx = \infty$ [n. 46 eq. (4)]. Ora h non può essere zero, nè può la differenza $f(x+h) - fx$ essere infinita, perchè essendo la x indeterminata fx non è infinita, e se non è infinita fx acciocchè sia infinita la differenza $f(x+h) - fx$ dovrà essere infinita $f(x+h)$; ma in $f(x+h)$ la x è indeterminata come in fx e indipendente da h, dunque non può $f(x+h)$ essere infinita; dunque il risultato (9) è assurdo, ed assurda è l'ipotesi espressa dalla equazione (6).

2° Supponiamo $$\lim_{h=0} R = 0; \tag{10}$$

sarà $$R = \varphi h; \tag{11}$$

conseguentemente

$$R_0 = \varphi h_0, \quad R_1 = \varphi h_1, \quad R_2 = \varphi h_2 \ \ldots \tag{12}$$

ma (n. 46) $$R = M(R_0, R_1, R_2 \ldots),$$

e stante le equazioni (12)

$$\lim_{h_0=0} R_0 = 0, \quad \lim_{h_1=0} R_1 = 0, \ \ldots .$$

perciò (n. 45) $$R = 0, \tag{13}$$

e quindi $h = \infty$ oppure $f(x+h) - fx = 0$ [n. 46 eq. (4)]. Ora h non può essere infinita; nè può la differenza $f(x+h) - fx$ essere zero, perchè essendo la x indeterminata fx non è zero (*), e se non è zero fx acciocchè sia zero la differenza $f(x+h) - fx$ dovranno i termini di fx distruggere tutti i termini di $f(x+h)$

(*) Se fosse $fx = 0$ risolvendo questa equazione avremmo x uguale ad una espressione analitica in cui non sarebbero contenute che quantità costanti; cioè x sarebbe costante.

per riduzione analitica; ma questa riduzione non può aver luogo stante la presenza di h, dunque l'equazione (13) è assurda, e perciò è assurda l'ipotesi espressa dalla equazione (10).

3° Supponiamo $$\lim_{h=0} R = B; \tag{15}$$

rappresentando B una quantità costante; sarà
$$R = B + \varphi h, \tag{16}$$
e quindi
$$R_0 = B + \varphi h_0,\ R_1 = B + \varphi h_1,\ R_2 = B + \varphi h_2,\ \ldots \tag{17}$$
ma (n. 46) $\quad R = M(R_0,\ R_1,\ R_2 . \ldots),$

e stante le equazioni (17)
$$\lim_{h_0=0} R_0 = B,\quad \lim_{h_1=0} R_1 = B,\quad \lim_{h_2=0} R_2 = B,\ \ldots$$
perciò (n. 45) $\quad R = B;$

Ma da questa equazione si ha [n. 46 eq. (4)]
$$f(x+h) - fx = Bh,$$
ovvero $\quad f(x+h) - fx = B\,(x+h-x),$

ovvero $\quad f(x+h) - fx = B\,(x+h) - Bx,$

dunque, facendo $x + h = X$, avremo
$$fX - fx = BX - Bx.$$

Qui la funzione fX rappresenta la funzione stessa fx colla x mutata in X; $fX - fx$ è la differenza di queste due funzioni; perciò BX sarà un termine appartenente alla funzione fX, e Bx un termine appartenente alla funzione fx; e poichè mediante la sottrazione di fx da fX non possono sparire che i termini comuni ad fX ed fx, i quali è forza che sieno indipendenti da X e da x, perciò rappresentando la somma di siffatti termini con A, concluderemo che la funzione fX dee comporsi dei termini A e BX, e la fx dei termini A e Bx; dunque $fx = A + Bx$; donde si raccoglie che l'equazione (15) sussiste nel solo caso in cui fx sia una funzione lineare espressa da $A + Bx$.

Ora se rimanendo la x e la h indeterminate, il limite del

rapporto R non può essere infinito, nè zéro, nè può essere uguale ad una costante B che nel solo caso in cui fx sia una funzione lineare espressa da $A+Bx$, dovremo concludere che eccettuato questo caso, esso limite dee variare al variare della x, essere cioè una funzione della x la cui forma e natura dipenderanno dalla forma e dalla natura di fx; lo che è quanto dovevasi dimostrare.

49. Corollario. Rappresentando la funzione esprimente il limite del rapporto R con $f'x$, sarà

$$\int_{h=0} \frac{f(x+h)-fx}{h} = f'x \tag{18}$$

50. Teorema II. *Se la funzione* $\mathrm{f}\mathbf{x}$ *sarà continua da* $\mathbf{x}_0$ *ad* $\mathbf{x}_0+\mathrm{i}$ *inclusive, il rapporto dell'accrescimento di essa funzione all'accrescimento corrispondente* i *della variabile, avrà per limite una funzione di questa variabile, e solo nel caso in cui* $\mathrm{f}\mathbf{x}$ *sia una funzione lineare quel limite sarà costante ed uguale al coefficiente della* $\mathbf{x}$.

Si prenda dell' accrescimento determinato i una parte qualsiasi finita che diremo h; ciò fatto

1° Supponiamo che per tutti i valori della x estesi da x_0 ad x_0+h il limite del rapporto dell'accrescimento della funzione al corrispondente accrescimento della variabile possa mantenersi infinito; sarà

$$\frac{1}{r_0} = \varphi h_0, \ \frac{1}{r_1} = \varphi h_1, \ \frac{1}{r_2} = \varphi h_2 \ \ldots. \tag{19}$$

dove φh_0, φh_1, φh_2 ... sono come di sopra quantità che convergono verso lo zero con h_0, h_1, h_2, ...

Ora $$\frac{1}{r} = M\left(\frac{1}{r_0}, \ \frac{1}{r_1}, \ \frac{1}{r_2} \ \ldots.\right),$$

dunque (n. 46) $$\frac{1}{r} = 0, \tag{20}$$

cioè $h=0$ oppure $f(x_0+h)-fx_0=\infty$ [n. 47 eq. (5)]; ma h rappresentando una parte finita dell' accrescimento i non può essere zero; nè può la differenza $f(x_0+h)-fx_0$, che è quanto dire quell' accrescimento della funzione che corrisponde all' accrescimento finito $h<i$ della variabile, essere infinita, perchè in tal caso

questa funzione non sarebbe altrimenti continua per tutti i valori di x estesi da x_0 ad x_0+i; dunque l'equazione (20) è assurda, ed è assurda perciò e non ammissibile l'ipotesi donde siamo partiti.

2° Supponiamo che per tutti i valori della x estesi da x_0 ad x_0+h il limite del rapporto dell'accrescimento della funzione all'accrescimento corrispondente della variabile possa mantenersi nullo; sarà

$$r_0=\varphi h_0,\ r_1=\varphi h_1,\ r_2=\varphi h_2\ \ldots. \tag{21}$$

Ora
$$r=M(r_0,\ r_1,\ r_2\ldots)$$
perciò (n. 45)
$$r=0, \tag{22}$$
cioè $h=\infty$ oppure $f(x_0+h)-fx_0=0$ [n. 47 eq. (5)]. Ma h non può essere infinita; nè può la differenza $f(x_0+h)-fx_0$, che è quanto dire quell'accrescimento della funzione che corrisponde all'accrescimento h della variabile, essere nulla; infatti siccome h rappresenta una parte qualunque di i, se la differenza $f(x+h)-fx$ fosse nulla dovrebbe essere nullo qualunque accrescimento della funzione corrispondente ad ogni accrescimento della variabile il quale fosse minore di i; cosicchè fx non varierebbe al variare di x da x_0 ad x_0+i, e conseguentemente non sarebbe funzione della x; dunque l'equazione (22) è assurda, e perciò è assurda e non ammissibile l'ipotesi donde siamo partiti.

3°. Supponiamo che per tutti i valori della x estesi da x_0 ad x_0+h il limite del rapporto dall'accrescimento della funzione all'accrescimento corrispondente della variabile possa mantenersi eguale ad una quantità costante B; sarà

$$r_0=B+\varphi h_0,\ r_1=B+\varphi h_1,\ r_2=B+\varphi h_2\ \ldots \tag{23}$$

e poichè
$$r=M(r_0,\ r_1,\ r_2\ldots)$$
avremo
$$R=B;$$
dalla quale equazione si ha [n. 47 eq. (5)]

$$f(x_0+h)-fx_0=Bh,$$

ovvero
$$f(x_0+h)-fx_0=B(x_0+h-x_0),$$
ovvero
$$f(x_0+h)-fx_0=B(x_0+h)-Bx_0,$$
e quindi
$$f(x_0+h)-B(x_0+h)=fx_0-Bx_0. \tag{24}$$

Ciò posto è da osservare che le due espressioni $fx_0 - Bx_0$ ed $f(x_0 + h) - B(x_0 + h)$ sono due valori particolari della funzione $fx - Bx$, l' uno corrispondente ad $x = x_0$ l' altro corrispondente ad $x = x_0 + h$; dall' equazione (24) risulta adunque che la funzione $fx - Bx$ conserva lo stesso valore per $x = x_0$ e per $x = x_0 + h$; ma h rappresenta una parte qualunque finita della i, perciò potremo concludere che il valore della funzione $fx - Bx$ dee rimanere lo stesso per tutti i valori della x estesi da x_0 ad $x_0 + i$; dunque questa funzione è indipendente dalla x, cioè costante; dunque $fx - Bx = A$; lo che prova che fx è necessariamente della forma $A + Bx$; dunque l' ipotesi donde siamo partiti si verifica nel solo caso in cui fx sia una funzione lineare.

Ora se il limite del rapporto r non può per tutti i valori di x estesi da x_0 ad $x_0 + h$ essere infinito, nè zero, nè può essere uguale ad una costante B se non quando fx sia una funzione lineare espressa da $A + Bx$, dovremo concludere che tranne questo caso dee siffatto limite variare al variare della x, ed essere perciò una funzione della x la cui natura e forma dipenderanno dalla natura e dalla forma di fx; questo è quanto dovevasi dimostrare.

51. Corollario. La equazione (18) sussiste adunque e quando la x è indeterminata, e quando fx è funzione continua da $x = x_0$ ad $x = x_0 + i$; in questo caso per altro si sostituisce x_0 ad x per mostrare che si tratta d' un valore particolare della variabile; rispetto all' accrescimento di questa variabile è indifferente che si esprima per h o per i; conseguentemente sarà

$$\left\{ \frac{f(x_0 + h) - fx_0}{h} \right\}_{h=0} = f'x_0 \tag{25}$$

Segue da ciò che i due teoremi precedenti non differiscono fra loro che nelle ipotesi, l' uno supponendo la x indeterminata e l' altro la funzione fx continua; ma nella conclusione essi sono identici e non formano che una sola e medesima proposizione, la quale ci assicura della esistenza del limite $f'x$ nel caso in cui la x sia indeterminata, e nel caso in cui fx sia funzione continua.

V. Le derivate delle funzioni d' una sola variabile.

52. Definizione I. Dicesi *derivata* d' una funzione il limite del rapporto dell' accrescimento di essa funzione all' accrescimento della variabile indipendente, preso questo limite nella ipotesi che il secondo accrescimento converga verso lo zero.

53. Definizione II. La derivata della derivata d' una funzione fx dicesi *derivata seconda* o *derivata del secondo ordine* di fx: la derivata della derivata seconda dicesi *derivata terza* o *derivata del terzo ordine* di fx: e così via discorrendo.

54. Caratteristiche delle derivate. Le successive derivate di fx s' indicano in questa guisa $f'x$, $f''x$, $f'''x\ldots$; cioè mediante la caratteristica f contrassegnata d' un apice, di due apici, di tre apici, ec. secondochè vuolsi esprimere la derivata prima, la seconda, la terza ec.; $f^{(n)}x$ indica la derivata n^{ma}. Talmentechè sarà

$$\lim_{i_1=0} \frac{f(x+i_1)-Fx}{fi_0} = f'x, \quad \lim_{i_2\;0=} \frac{f'(x+i_2)-f'x}{i_2} = f''x, \ldots\ldots$$

$$\ldots \lim_{i_n=0} \frac{f^{(n-1)}(x+i_n)-f^{(n-1)}x}{i_n} = f^{(n)}x.$$

Questo modo d' indicare le derivate d' una funzione può per altro usarsi nel solo caso in cui questa funzione sia indeterminata cioè rappresentata dalla caratteristica f. Quando la funzione sarà determinata ci varremo della caratteristica D; talmentechè $D\,\mathrm{sen}\,x$ indicherà la derivata della funzione determinata $\mathrm{sen}\,x$; $D.x^m$ indicherà la derivata della funzione x^m; poniamo fra la caratteristica D e la funzione x^m un punto per distinguere la derivata di siffatta funzione dalla potenza m^{ma} di Dx, la quale si scriverà così Dx^m.

Le derivate superiori alla prima s' indicheranno scrivendo al di sopra della lettera D un numero che ne esprima l'ordine; $D\mathrm{sen}\,x$, $D^2\mathrm{sen}\,x$, $D^3\mathrm{sen}\,x \ldots D^n\mathrm{sen}\,x$ saranno le derivate successive di $\mathrm{sen}\,x$ dal 1° ordine fino all' n^{mo} inclusive.

La caratteristica D serve ancora ad indicare la derivata delle funzioni indeterminate; $f'x = Dfx$, $f''x = D\,f'x = D^2 fx$, $f'''x = D\,f''x = D^2 f'x = D^3 fx$, ...

Allorquando la funzione fx sarà rappresentata da una sola lettera, per esempio u, le derivate successive di questa funzione potranno indicarsi in due modi, 1° mediante la caratteristica D così Du, D^2u, D^3u .... 2° mediante gli apici usati nel significato medesimo che abbiamo loro assegnato relati-alla f in questa guisa u', u'', u''' ...

Rispetto alle funzioni di più variabili si noti che supponendo u funzione di più variabili indipendenti x, y, z ... cioè $u = f(x, y, z, \ldots)$, siccome ciascuna di queste variabili potrà variare indipendentemente dalle altre, è manifesto che potremo prendere la derivata di u rapporto ad una sola di esse riputando le altre costanti. Ora una derivata della funzione u che si prenda rapporto ad una sola delle variabili da cui dipende dicesi *derivata parziale* di u. Le derivate parziali della u saranno espresse da u'_x, u'_y, u'_z... oppure [quando piaccia di sostituire ad u la sua caratteristica $f(x, y, z..)$] da

$$f'_x(x, y, z\ldots),\ f'_y(x, y, z\ldots)\ f'_z(x, y, z\ldots), \ldots.$$

l'indice x, o y, o z... che si congiunge alla lettera u, o alla caratteristica f, indica la variabile rapporto alla quale si prende la derivata.

Queste medesime derivate possono pure designarsi così

$$D_x f(x, y, z \ldots),\ D_y f(x, y, z \ldots),\ D_z f(x, y, z \ldots), \ldots$$

e perciò

$$u''_x, \quad f''_x(x, y, z \ldots), \quad D^2_x f(x, y, z \ldots)$$

indicheranno la medesima derivata del secondo ordine di u, ovvero di $f(x, y, z\ldots)$ presa rapporto ad x:

$$u''_{x,y} \quad f''_{x,y}(x, y, z\ldots), \quad D^2_{x,y}(x, y, z\ldots)$$

la derivata del secondo ordine di u, ovvero di $f(x, y, z\ldots)$, presa prima rapporto ad x, quindi rapporto ad y: in generale

$$u^{(m+n+p\ldots.)}_{mx,\ ny,\ pz,\ldots} \qquad f^{(m+n+p+\ldots.)}_{mx,\ ny,\ pz,\ldots}(x, y, z\ldots.), \qquad D^{(m+n+p+\ldots.)}_{mx,\ ny,\ pz,\ldots} f(x, y, z\ldots.)$$

indicano la derivata dell'ordine $m+n+p+\ldots$ di u o di

$f(x, y, z \ldots)$ che s' intende presa prima m volte rapporto ad x, quindi n volte rapporto ad y, dipoi p volte rapporto a z, ec.

55. **Teorema I.** *Abbiasi la funzione* fx; *quando la* x *sarà indeterminata, come ancora allorquando* fx *sarà funzione continua da* x_0 *ad* $\mathrm{x}_0 + h$, *crescendo la* x *della quantità* h *la funzione crescerà della sua derivata moltiplicata per* h, *e di una quantità capace di convergere verso lo zero con* h, *anch'essa moltiplicata per* h.

Supponiamo che per un valore qualunque di h abbiasi

$$\frac{f(x+h)-fx}{h}=V, \quad \frac{f(x_0+h)-fx_0}{h}=V_0;$$

V sarà una espressione analitica contenente x ed h, V_0 la medesima espressione colla x mutata in x_0. Si convertano queste equazioni nelle seguenti

$$\frac{f(x+h)-fx}{h}=f'x+V-f'x, \quad \frac{f(x_0+h)-fx_0}{h}=f'x_0+V_0-f'x_0;$$

se h convergerà verso lo zero, i rapporti

$$\frac{f(x+h)-fx}{h}, \qquad \frac{f(x_0+h)-fx_0}{h}$$

dovranno convergere verso i loro limiti (n. 49 e 51)

$$f'x, \qquad f'x_0;$$

conseguentemente le quantità

$$V-f'x, \qquad V_0-f'x_0$$

dovranno godere della proprietà di decrescere al decrescere di h e di ridursi a zero per $h=0$; indicando siffatte quantità con

$$\lambda, \quad \lambda_0$$

avremo

$$\frac{f(x+h)-fx}{h}=f'x+\lambda \quad (1) \qquad \frac{f(x_0+h)-fx_0}{h}=f'x_0+\lambda_0 \qquad (2)$$

e quindi

$$f(x+h)=fx+hf'x+h\lambda \quad (3) \qquad f(x_0+h)=fx_0+hf'x_0+h\lambda \quad (4)$$

come dovevasi dimostrare.

56. **Corollario.** Se la funzione fx sarà rappresentata da u, ed il suo stato variato $f(x+h)$ da u_1 avremo

$$u_1 = u + hu' + h\lambda$$

ovvero

$$u_1 = u + h(u' + \lambda) \tag{5}$$

57. Teorema II. *Abbiasi la funzione* f x; *quando la* x *sarà indeterminata, come ancora allorquando* f x *sarà funzione continua da* x_0 *ad* $x_0 + h$, *crescendo la* x *della quantità* h *la funzione crescerà della sua derivata moltiplicata per* h, *purchè nella derivata medesima la* x *si muti in* $x + \lambda$, λ *essendo una quantità capace di convergere verso lo zero con* h.

Le funzioni V, V_0, poichè per $h = 0$ si cangiano in $f'x$, $f'x_0$, possono supporsi della forma $f'v$, $f'v_0$ posto che v, v_0 sieno quantità capaci di convergere respettivamente verso x, x_0 a misura che h converge verso lo zero; poniamo adunque

$$\frac{f(x+h) - fx}{h} = f'v, \qquad \frac{f(x_0+h) - fx_0}{h} = f'v_0;$$

queste equazioni potranno prendere la forma seguente

$$\frac{f(x+h) - fx}{h} = f'(x + v - x), \qquad \frac{f(x_0+h) - fx_0}{h} = f'(x_0 + v - x_0);$$

conseguentemente le quantità

$$v - x, \qquad v - x_0,$$

dovranno godere della proprietà di decrescere al decrescere di h e di ridursi a zero per $h = 0$; dunque indicando siffatte quantità con

$$\lambda, \qquad \lambda_0,$$

avremo

$$\frac{f(x+h) - fx}{h} = f'(x + \lambda) \quad (6) \qquad \frac{f(x_0+h) - fx_0}{h} = f'(x_0 + \lambda_0) \quad (7)$$

e quindi

$$f(x+h) = fx + hf'(x + \lambda) \quad (8) \qquad f(x_0+h) = fx_0 + hf'(x_0 + \lambda_0) \quad (9)$$

come dovevasi dimostrare.

58. Teorema III. *Se la funzione* fx *e la sua derivata* f'x *saranno funzioni continue per tutti i valori della* x *compresi fra* x_0 *ed* x_0+h, *crescendo la* x *della quantità* h *la funzione medesima crescerà della sua derivata moltiplicata per* h, *purchè in questa derivata la* x *si muti in* $x+\theta h$, θ *essendo un numero minore dell' unità.*

Poichè la funzione fx si suppone continua da x_0 ad x_0+h, i rapporti

$$R_0=\frac{f(x_0+h_0)-fx_0}{h_0},\quad R_1=\frac{f(x_1+h_1)-fx_1}{h_1},\ldots R_n=\frac{f(x_n+h_n)-fx_n}{h_n}$$

si potranno tradurre nelle espressioni seguenti [n. 55. eq. (2)]

$$R_0=f'x_0+\lambda_0,\ R_1=f'x_1+\lambda_1,\ldots R_n=f'x_n+\lambda_n;$$

ora
$$R=M(R_0,\ R_1,\ R_2,\ldots R_n);$$

dunque dovrà verificarsi una delle seguenti condizioni

$$R=\left\{R_0\right._{h_0=0},\ R=\left\{R_1\right._{h_1=0}\ \ldots\ R=M\left(\left\{R_0\right._{h_0=0},\ \left\{R_1\right._{h_1=0}\ldots\left\{R_n\right._{h_2=0}\right);$$

ma
$$\left\{R_0=f'x_0\right._{h_0=0},\quad \left\{R_1=f'x_1\right._{h_1=0},\ \ldots$$

perciò dovrà necessariamente sussistere una di queste equazioni

$$R=f'x_0,\ R=f'x_1,\ldots R=f'x_n,\ R=M(f'x_0,\ f'x_1,\ldots f'x_n);$$

la prima è assurda, perchè essendo $R=f'x_0+\lambda_0$ [n. 55 eq.(2)] non può essere $R=f'x_0$; le altre dimostrano che il valore di R dee coincidere con uno dei valori che acquista la funzione $f'x$ allorquando la x passa dal valore x_0 al valore x_n inclusive, che è quanto dire allorchè la x riceve uno dei valori compresi fra x_0 ed x_n+h_n, ovvero fra x_0 ed x_0+h. E poichè la funzione $f'x$ essendo continua da x_0 ad x_0+h, può passare dal suo minor valore al maggiore passando rigorosamente per tutti i valori intermedi, perciò fra questi va-

lori medesimi dovrà necessariamente esisterne uno, che diremo $f'x_m$, uguale al rapporto R; dunque

$$R = f'x_m;$$

ma il valore x_m della variabile dovendo esser compreso fra x_0 ad $x_0 + h$ può rappresentarsi (quando sia $\theta < 1$) con $x_0 + \theta h$; dunque

$$R = f'(x_0 + \theta h),$$

ovvero

$$\frac{f(x_0 + h) - fx_0}{h} = f'(x_0 + \theta h); \tag{10}$$

donde ricavasi, moltiplicando per h,

$$f(x_0 + h) = fx_0 + h f'(x_0 + \theta h); \tag{11}$$

che è quanto si doveva dimostrare.

59. Corollario. Facendo $x_0 = 0$ l'equazione precedente darà

$$fh = f0 + hf'(\theta h)$$

h essendo l'ultimo valore della x; perciò mutando h in x_0 avremo

$$fx_0 = f0 + x_0 f'(\theta x_0)$$

dunque *se la funzione* fx *e la sua derivata* $f'x$ *saranno funzioni continue per tutti i valori dalla* x *compresi fra* 0 *ed* x_0, *il valore* fx_0 *della funzione sarà uguale alla somma* $f0$ *de' suoi termini indipendenti dalla* x *più il prodotto del valore* x_0 *della variabile nella derivata* $f'x$ *della funzione, purchè in questa derivata la* x *si muti in* θx_0, θ *essendo un numero minore dell' unità.*

60. Scolio I. La variabile x in luogo di crescere dal valore x sino ad $x + h$ potrebbe crescere da $x - h$ ad x, che è quanto dire decrescere da x ad $x - h$; per altro h anche nel caso in cui sia negativa, sebbene venga ad esprimere un decremento, si dice sempre accrescimento della variabile. Sostituendo $x - h$ ad x l' equazione (3) diverrà

$$f(x - h) = fx - hf'(x - h) - h\lambda_{,}; \tag{12}$$

questa equazione quando si applichi alla funzione $f'x$ darà

$$f'(x - h) = f'x - hf''(x - h) - h\lambda_{,,};$$

dimanierachè risulterà

$$f(x-h)=fx-hf'x-h(\lambda_{,}-hf''(x-h)-h\lambda_{,,});$$

facendo $\qquad \lambda_{,}-hf''(x-h)-h\lambda_{,,}=\lambda_{,,,}$

troveremo

$$f(x-h)=fx-hf'x-h\lambda_{,,,} \tag{13}$$

Sostituendo x_0-h ad x_0 nella equazione (4) otterremo ancora

$$f(x_0-h)=fx_0-hf'(x_0-h)-h\lambda_{,} \tag{14}$$

e quindi $\qquad f(x_0-h)=fx_0-hf'x_0-h\lambda_{,,,} \qquad (15)$

la quale equazione suppone che fx_0 sia continua da x_0-h ad x_0.

Facendo poi le medesime sostituzioni nelle equazioni (8), (9), (11) avremo altresì

$$f(x-h)=fx-hf'[x+(\lambda-h)],$$
$$f(x_0-h)=fx_0-hf'[x_0+(\lambda_0-h)],$$
$$f(x_0-h)=fx_0-hf'[x_0-(1-\theta)h];$$

e ponendo $\qquad \lambda-h=\lambda_{IV}$ ed $1-\theta=\theta_1$,

$$f(x-h)=fx-hf'(x+\lambda_{IV}), \tag{16}$$
$$f(x_0-h)=fx_0-hf'(x_0+\lambda_{V}), \tag{17}$$
$$f(x_0-h)=fx_0-hf'(x_0-\theta_1 h) \tag{18}$$

Ora siccome $\lambda_{,,,}$, λ_{IV} λ_{V} convergeranno verso lo zero con h al pari di λ, e sarà $\theta_1<1$ come supponemmo già che fosse θ, perciò potremo porre λ in luogo di $\lambda_{,,,}$ e λ_{IV} e sostituire θ a θ_1; allora le equazioni (13), (15), (16), (17), (18) si cangeranno in quelle medesime equazioni che possono ricavarsi dalle (3), (4), (8), (9), (11) mutando h in $-h$; dunque *le equazioni* (3), (4), (8), (9), (11) *sono vere anche nel caso in cui la* h *diventi negativa.*

61. Scolio II. L'accrescimento d'una variabile si suole talvolta indicare ponendo la caratteristica Δ innanzi alla variabile stessa; così

$$h=(x+h)-x=\Delta x, \quad f(x+h)-fx=\Delta fx;$$

perciò le equazioni (3), (4), (5), (8), (9) si possono tradurre nelle seguenti

$$\begin{aligned}&\Delta fx = \Delta x\,(f'x + \lambda), \quad \Delta fx_0 = \Delta x\,(f'x_0 + \lambda_0), \quad \Delta u = \Delta x\,(u' + \lambda),\\ &\Delta fx = \Delta x f'(x + \lambda), \Delta fx_0 = \Delta x f'(x_0 + \lambda_0), \Delta fx_0 = \Delta x f'(x_0 + \theta\Delta x);\end{aligned} \qquad (19)$$

inoltre l' equazione fondamentale

$$\underset{h=0}{\Big\{}\frac{f(x+h)-fx}{h} = f'x;$$

diventerà

$$\underset{\Delta x=0}{\Big\{}\frac{\Delta fx}{\Delta x} = f'x \quad \text{ovvero} \quad \underset{\Delta x=0}{\Big\{}\frac{\Delta u}{\Delta x} = f'x. \qquad (20)$$

VI. Le derivate delle funzioni indeterminate di cui sono date le proprietà caratteristiche.

62. Principio. Dalle equazioni (3) (13) [n. 55 e 60] si ha

$$f(x+h) - fx = hf'x + h\lambda,$$

$$fx - f(x-h) = hf'x + h\lambda_{iii},$$

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'x + h(\lambda + \lambda_{iii});$$

e quindi

$$f'x + \lambda = \frac{f(x+h) - fx}{h}$$

$$f'x + \lambda = fx\,\frac{\dfrac{f(x+h)}{fx} - 1}{h}$$

$$f'x + \lambda_{iv} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}$$

passando ai limiti, sarà (n. 34)

$$Df x = \left\{ \frac{f(x+h) - fx}{h} \right._{h=0} \qquad (1)$$

$$Df x = fx \left\{ \frac{\dfrac{f(x+h)}{fx} - 1}{h} \right._{h=0} \qquad (2)$$

$$Df x = \tfrac{1}{2} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} \right._{h=0} \qquad (3)$$

63. Scolio. Oltracciò poichè

$$\left\{ \frac{x+h}{x} \right._{h=0} = 1$$

qualunque sia x, supponendo che γ sia una quantità capace di convergere verso lo zero con h, potremo porre

$$\frac{x+h}{x} = 1 + \gamma \quad \text{cioè} \quad h = \gamma x;$$

dunque nelle funzioni precedenti sarà lecito sostituire γx ad h, per lo che le equazioni (2), (3) diverranno

$$Df x = \frac{1}{x} \left\{ \frac{f(x+\gamma x) - fx}{\gamma} \right._{\gamma=0} \qquad (4)$$

$$Df x = \frac{fx}{x} \left\{ \frac{\dfrac{f(x+\gamma x)}{fx} - 1}{\gamma} \right._{\gamma=0} \qquad (5)$$

64. Corollario I. Supponiamo che la funzione f goda della proprietà indicata dalla equazione

$$f(x+h) = fx + fh; \qquad (6)$$

avremo dalla (1)

$$Df x = \left\{ \frac{fh}{h} \right._{h=0} \qquad (7)$$

donde si vede che la derivata di fx sarà in questo caso priva

della x, e conseguentemente costante; rappresentando siffatta costante con A sarà

$$Dfx = A \tag{8}$$

65. Corollario II. Supponiamo che la funzione f goda della proprietà espressa dalla equazione

$$f(xh) = fx.fh; \tag{9}$$

ponendo $\frac{x+h}{x}$ in luogo di h, e facendo quindi $h = \gamma x$, avremo

$$\frac{f(x+\gamma x)}{fx} = f(1+\gamma); \tag{10}$$

dimanierachè la formula (5) darà

$$Dfx = \frac{fx}{x}\left\{\frac{f(1+\gamma)-1}{\gamma}\right.\Bigg._{\gamma=0} \tag{11}$$

Pongasi ora $\frac{f(1+\gamma)-1}{\gamma} = t$; avremo $f(1+\gamma) = 1 + t\gamma$; quindi

$$\frac{\log f(1+\gamma)}{\gamma} = \frac{\log(1+t\gamma)}{\gamma} = t\,\frac{\log(1+t\gamma)}{t\gamma} = t\,\frac{\log(1+\beta)}{\beta} \tag{12}$$

dove sarà $\beta = t\gamma$; ovvero

$$\beta = f(1+\gamma) - 1; \tag{13}$$

e dalla (12) risulterà

$$t = \frac{\dfrac{\log f(1+\gamma)}{\gamma}}{\dfrac{\log(1+\beta)}{\beta}};$$

quindi

$$Dfx = \frac{fx}{x}\left\{\frac{\dfrac{\log f(1+\gamma)}{\gamma}}{\dfrac{\log(1+\beta)}{\beta}}\right.\Bigg._{\gamma=0} \tag{14}$$

l' equazione (13) mostra che $\gamma = 0$ darà $\beta = 0$, quando sia

$$f1 = 1. \tag{15}$$

Ora se β anderà a zero in pari tempo di γ, ponendo nella formula (14) $\gamma = 0$ dovremo porre altresì $\beta = 0$, oppure potremo mutare β in γ e determinare il limite con fare solamente $\gamma = 0$; dunque verificandosi la condizione (15) la formula (14) si ridurrà alla seguente

$$Dfx = \frac{fx}{x} \left\{ \frac{\log f(1+\gamma)}{\log(1+\gamma)} \right._{\gamma=0} \tag{16}$$

La quantità che moltiplica $\frac{fx}{x}$ è priva della x; indicandola con A, avremo

$$Dfx = \frac{Afx}{x} \tag{17}$$

66. Corollario III. Supponiamo che la funzione f goda della proprietà enunciata dalla equazione

$$f(x+h) = fx \,.\, fh\,; \tag{18}$$

la formula (2) darà

$$Dfx = fx \left\{ \frac{fh-1}{h} \right._{h=0} \tag{19}$$

La quantità che moltiplica fx è priva della x; indicandola con A, sarà

$$Dfx = Afx. \tag{20}$$

67. Corollario IV. Supponiamo che la funzione f goda della proprietà enunciata della equazione

$$f(xh) = fx + fh; \tag{21}$$

sostituendo in questa equazione $\frac{x+h}{x}$ ad h, e facendo quindi $h = \gamma x$ (n. 63) avremo

$$f(1+\gamma) = f(x+\gamma x) - fx\,; \tag{22}$$

per cui dalla formula (4) otterremo

$$Dfx = \frac{1}{x} \int_{\gamma=0} \frac{f(1+\gamma)}{\gamma} \tag{23}$$

Qui pure la quantità che moltiplica $\frac{1}{x}$ è priva della x; rap-rappresentandola con A, sarà

$$Dfx = \frac{A}{x} \tag{24}$$

68. Corollario V. Supponiamo per ultimo che f goda della proprietà indicata dalla equazione

$$f(x+h) - f(x-h) = \varphi x \, \psi h; \tag{25}$$

la formula (3) darà immediatamente

$$Dfx = \tfrac{1}{2}\varphi x \int_{h=0} \frac{\psi h}{h}; \tag{26}$$

Quindi indicando con A la quantità, priva della x, che moltiplica $\frac{1}{2}\varphi x$, sarà

$$Dfx = \tfrac{1}{2} A \varphi x. \tag{27}$$

VII. Le derivate delle funzioni indeterminate composte.

69. Definizione I. Una funzione si dice *semplice* quando risulta da una operazione sola che si faccia sulla variabile.

70. Definizione II. *Composta* dicesi una funzione allorquando risulta dalla combinazione di più altre funzioni, sia che questa combinazione si faccia per mezzo di operazioni algebriche, sia che si faccia mediante operazioni trascendenti.

Secondochè le funzioni che vengono combinate insieme saranno determinate o indeterminate la funzione composta risultante sarà essa pure determinata o indeterminata.

71. Principio I. L' equazione (1) (n. 62) dimostra che

$$D(-fx) = -\int_{h=0} \frac{f(x+h) - fx}{h} = -Dfx$$

dunque *la derivata d'una funzione conserva il segno della funzione medesima.*

72. Principio II. Riducasi fx alla sola x variabile indipendente; l'equazione (1) (n. 62) darà

$$Dx = \left\{ \frac{x+h-x}{h} \right. = 1$$

dunque *la derivata della variabile indipendente è espressa dall'unità.*

73. Principio III. Abbiasi la somma

$$s = \varphi x + \psi x + \xi x + \ldots .$$

l'accrescimento di questa somma corrispondente all'accrescimento h della variabile, sarà

$$\varphi(x+h) - \varphi x + \psi(x+h) - \psi x + \xi(x+h) - \xi x + \ldots$$

dividendo per h e passando al limite, avremo

$$Ds = \left\{ \frac{\varphi(x+h) - \varphi x}{h} \right._{h=0} + \left\{ \frac{\psi(x+h) - \psi x}{h} \right._{h=0} + \left\{ \frac{\xi(x+h) - \xi x}{h} \right._{h=0} + \ldots .$$

ovvero

$$Ds = D\varphi x + D\psi x + D\xi x + \ldots \qquad (1)$$

il qual risultato può scriversi altresì in questo modo

$$s' = \varphi' x + \psi' x + \xi' x + \ldots$$

e poichè a questa funzione s' può applicarsi lo stesso ragionamento che abbiamo fatto rispetto ad s, perciò sarà

$$s'' = \varphi'' x + \psi'' x + \xi'' x + \ldots$$

ed in generale

$$s^{(n)} = \varphi^{(n)} x + \psi^{(n)} x + \xi^{(n)} x + \ldots \qquad (2)$$

dunque *la derivata di qualunque ordine d'un polinomio è uguale alla somma delle derivate dello stesso ordine di tutti i suoi termini.*

74. Scolio. Potrebbe il polinomio contenere uno o più ter-

mini costanti, ma essi non comparirebbero nella sua derivata.

Abbiasi $$s = a + b\varphi x;$$

l' accrescimento della funzione corrispondente all' accrescimento h della variabile, sarà

$$a + b\varphi(x+h) - a - b\varphi x = b[\varphi(x+h) - \varphi x];$$

dividendo per h e passando al limite, avremo (n. 34)

$$Ds = b\int_{h=0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi x}{h},$$

ovvero $$D(a + b\varphi x) = b\varphi' x;$$

facendo $b = 0$ risulta $Da = 0$; dunque *la derivata d' una quantità costante si dee riputare uguale a zero.*

75. Principio IV. Abbiasi il prodotto

$$p = \varphi x \psi x;$$

l' accrescimento di questo prodotto corrispondente all' accrescimento h della variabile sarà (n. 57)

$$\begin{aligned} &\varphi(x+h)\,\psi(x+h) - \varphi x\psi x \\ &= [\varphi x + h\varphi'(x+\lambda)]\,[\psi x + h\psi'(x+\lambda_1)] - \varphi x\psi x \\ &= h\varphi x\psi'(x+\lambda_1) + h\psi x\varphi'(x+\lambda) + h^2\varphi'(x+\lambda)\,\psi'(x+\lambda_1) \end{aligned}$$

dividendo per h e passando al limite, avremo

$$D(\varphi x\psi x) = \varphi x\psi' x + \psi x\varphi' x; \qquad (3)$$

dunque *la derivata del prodotto di due funzioni è uguale alla prima di esse moltiplicata per la derivata della seconda più la seconda moltiplicata per la derivata della prima.*

76. Corollario I. Se uno de' fattori di f fosse costante, per esempio $\psi = a$ sarebbe $\psi' = 0$, e dalla equazione (3) avremmo

$$D(a\varphi x) = a\varphi' x = aD\varphi x;$$

quindi $$D^2(a\varphi x) = D(aD\varphi x) = aD^2\varphi x;$$

ed in generale $$D^n(a\varphi x) = aD^n\varphi x$$

dunque *la derivata di qualunque ordine del prodotto d' una co-*

stante per una funzione è uguale al prodotto di questa costante per la derivata dello stesso ordine della funzione.

77. Corollario II. Abbiasi il prodotto $p = uvwt \ldots yz$, $u, v, w \ldots$ essendo funzioni della x; sarà (n. 75)

$$D(uvwt \ldots) = uD(vwt \ldots) + (vwt \ldots)Du$$

$$D(vwt \ldots) = vD(wt \ldots) + (wt \ldots)Dv$$

$$\ldots\ldots$$

$$D(yz) = yDz + zDy;$$

conseguentemente

$$D(uvwt \ldots) = (vwt \ldots)Du + (uwt \ldots)Dv + (uvt \ldots)Dw + \ldots \quad (4)$$

di qui si vede che *la derivata del prodotto* p *è la somma delle derivate prese rispetto a ciascuno de' suoi fattori.*

Questa regola può esprimersi analiticamente mediante l'equazione simbolica seguente;

$$Dp = D_u p + D_v p + D_w p + \ldots \quad (5)$$

78. Corollario III. Se i fattori $u, v, w \ldots$ fossero uguali fra loro e indicati da z, ciascun termine della derivata Dp verrebbe espresso da $z^{m-1}Dz$; perciò

$$Dz^m = mz^{m-1}Dz; \quad (6)$$

e supponendo $z = x$, x indicando la variabile indipendente, sarà $Dx = 1$ (n. 72), e quindi

$$Dx^m = mx^{m-1}; \quad (7)$$

le due equazioni (6) e (7) emergono per altro dalla ipotesi che m sia numero intero e positivo.

79. Principio V. Abbiasi il quoziente

$$q = \frac{\varphi x}{\psi x};$$

sarà

$$\varphi x = q\psi x;$$

e quindi (n. 75)

$$\varphi' x = q\psi' x + q'\psi x;$$

sostituendo il valore di q, e ricavando dalla equazione risultante il valore di q', avremo

$$D\frac{\varphi x}{\psi x}=\frac{\psi x\varphi' x-\varphi x\psi' x}{\psi x^2} \tag{8}$$

dunque *la derivata del quoziente di due funzioni è uguale al divisore moltiplicato per la derivata del dividendo meno il dividendo nella derivata del divisore, la differenza divisa pel quadrato del divisore medesimo.*

80. Corollario I. Facendo $\varphi x=1$ risulterà

$$D\frac{1}{\psi x}=-\frac{\psi' x}{\psi x^2} \tag{9}$$

81. Corollario II. Facendo $\psi x=x^m$, m essendo intero, ed x variabile indipendente, sarà $\psi' x=mx^{m-1}$, e perciò

$$D\frac{1}{x^m}=-\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} \quad \text{ovvero} \quad Dx^{-m}=-mx^{-m-1}\,; \tag{10}$$

dunque la formula (7) si mantiene vera ove anche l'esponente m diventi negativo.

82. Problema. *Trovare le derivate successive della funzione composta* $fx+(i-x)u$ *dove* fx *ed* u *sono funzioni della variabile* x, *ed* i *costante.*

In virtù de' principj precedenti sarà

$$D(fx+(i-x)u)=Dfx+D[(i-x)u]$$
$$D(fx+(i-x)u)=Dfx+(i-x)Du+u\,D(i-x)$$
$$D(fx+(i-x)u)=f'x+(i-x)u'-u; \tag{11}$$

per conseguenza

$$D^2(fx+(i-x)u)=D[f'x+(i-x)u')-u];$$

ma dalla stessa equazione (11) si ha

$$D(f'x+(i-x)u')=f''x+(i-x)u''-u',$$

dunque

$$D^2(fx+(i-x)u)=f''x+(i-x)u''-2u';$$

e perciò $$D^3(fx+(i-x)u)=f'''x+(i-x)u'''-3u'',$$

$$D^4(fx+(i-x)u)=f^{\text{IV}}x+(i-x)u^{\text{IV}}-4u''',$$

. . . . .

$$D^n(fx+(i-x)u)=f^nx+(i-x)u^{(n)}-nu^{(n-1)}.$$

83. Scolio. Questo risultato si può ben anche ottenere avendo ricorso al teorema I (n. 55); perocchè cambiando x in $x+h$ la funzione proposta diverrà

$$fx + h(f'x + \lambda) + (i - x - h)[u + h(u' + \lambda_1)],$$

ovvero

$$fx + h(f'x + \lambda) + (i - x)u - hu + h(i - x - h)(u' + \lambda_1);$$

sottraendo la funzione proposta, ne verrà

$$h(f'x + \lambda) - hu + h(i - x - h)(u' + \lambda_1);$$

dividendo per h e passando al limite, avremo

$$f'x + (i - x)u' - u;$$

questa sarà la derivata prima già trovata di sopra; nello stesso modo potremmo passare alla derivata seconda, quindi alla terza, ec.

VIII. Le derivate delle funzioni identiche d' una variabile.

84. Definizione. Due funzioni d' una variabile si dicono *identiche* fra loro quando si mantengono uguali per qualunque valore della variabile.

L' identità di due quantità u e v s' indica in questa guisa $u \gtrless v$, e si enuncia *u identica a v*. Nulla vieta per altro che una identità s'indichi ancora col segno della uguaglianza.

85. Teorema I. *Se le funzioni φx e ψx sono identiche le loro derivate del medesimo ordine saranno pure identiche.*

Dovendo la identità $\varphi x \gtrless \psi x$ sussistere per qualunque valore della x, avremo

$$\varphi(x+h) \gtrless \psi(x+h),\ \varphi(x+h) - \varphi x \gtrless \psi(x+h) - \psi x,$$

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi x}{h} \gtrless \frac{\psi(x+h) - \psi x}{h}$$

qualunque sia h; quindi

$$\int_{h=0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi x}{h} \gtrless \int_{h=0} \frac{\psi(x+h) - \psi x}{h}.$$

ovvero $$\varphi' x = \psi' x.$$

Nello stesso modo può dimostrarsi essere

$$\varphi'' x = \psi'' x,\ \varphi''' x = \psi''' x, \ldots \varphi^{(n)} x = \psi^{(n)} x.$$

86. Teorema II. *Se la funzione φx è identicamente uguale a zero le derivate e i differenziali di essa saranno pure identicamente uguali a zero.*

Infatti dalla identità $\varphi x = 0$, si ha

$$\varphi(x+h) = 0,\quad \varphi(x+h) - \varphi x = 0$$

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi x}{h} = 0,\quad \left[\frac{\varphi(x+h) - \varphi x}{h}\right]_{h=0} = 0$$

ovvero $$\varphi' x = 0.$$

Conseguentemente

$$\varphi'' x = 0,\ \varphi''' x = 0, \ldots \varphi^{(n)} x = 0.$$

IX. I Teoremi del Maclaurin e del Taylor.

87. Principio. Sia fi una espressione analitica qualunque nella quale si trova la indeterminata i; sostituendo $x + i - x$ ad i, otterremo l'identità

$$fi = f(x + i - x), \tag{1}$$

la quale sussisterà qualunque sia il valore della x; può adunque la x riputarsi variabile ed $i - x$, potrà considerarsi come un accrescimento indeterminato di essa; avremo adunque (n. 55)

$$fi = fx + (i - x)(f'x + \lambda),$$

e ponendo $$f'x + \lambda = u,$$

sarà $$fi = fx + (i - x)u. \tag{2}$$

Ma siccome variando la x non varia fi, perciò fi ed i si riputeranno costanti; talchè prendendo le derivate d'ambedue i membri risulterà

$$0 = f'x + (i-x)u' - u$$
$$0 = f''x + (i-x)u'' - 2u'$$
$$0 = f'''x + (i-x)u''' - 3u''$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$0 = f^{(n)}x + (i-x)u^{(n)} - nu^{(n-1)}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

dalle quali si ha

$$u = f'x + (i-x)u'$$
$$u' = \tfrac{1}{2}f''x + \tfrac{1}{2}(i-x)u''$$
$$u'' = \tfrac{1}{3}f'''x + \tfrac{1}{3}(i-x)u'''$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$u^{(n-1)} = \frac{1}{n}f^{n}x + \frac{1}{n}(i-x)u^{(n)}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

dimanierachè risalendo alla equazione (2) mediante le successive sostituzioni de' valori u, u', u''... avremo

$$fi = fx + (i-x)f'x + \frac{1}{1.2}(i-x)^2 f''x \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots n}(i-x)^n f^{(n)}x + \ldots (3)$$

88. **Teorema I.** *Sia* fi *una espressione analitica qualunque nella quale si trova la indeterminata* i*; sarà*

$$fi = f0 + \frac{i}{1}f'0 + \frac{i^2}{1.2}f''0 \ldots + \frac{i^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}0 + \ldots \qquad (4)$$

Poichè la x non entra nella espressione (3) che apparentemente, com'è appunto apparente nella identità (1) donde siamo partiti, potrà farsi $x=0$, lo che darà immediatamente l'equazione (4).

89. **Teorema II.** *Sia* f(i + h) *una espressione analitica qualunque nella quale si trovano le due indeterminate* i *e* h *unite insieme mediante l'addizione; sarà*

$$f(i+h) = fi + \frac{h}{1}f'i + \frac{h^2}{1.2}f''i \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}i + \ldots \quad (5)$$

L'identità (1) e per conseguenza l'equazione (3) sono vere

qualunque sia i; possiamo adunque sostituire $i+h$ ad i; avremo allora

$$f(i+h)=fx+(i+h-x)f'x+\frac{1}{1.2}(i+h-x)^2f''x\ldots$$
$$\ldots.+\frac{1}{1.2..n}(i+h-x)^nf^{(n)}x+\ldots.$$

inoltre la x non entrando in questa espressione che apparentemente può ricevere qualunque valore; facendo adunque $x=i$ otterremo l'equazione (5).

90. Scolio. Le equazioni (4) e (5) suppongono che la i e la h sieno quantità indeterminate. Giova il sapere che il primo teorema è detto *Teorema del Maclaurin;* l'altro è noto sotto il nome di *Teorema del Taylor.*

X. *I differenziali delle funzioni d'una sola variabile.*

91. Definizione I. Chiamasi differenziale d'una funzione il prodotto della sua derivata moltiplicata per l'accrescimento della variabile indipendente.

92. Definizione II. Il differenziale del differenziale d'una funzione fx chiamasi differenziale secondo o differenziale del secondo ordine di fx; il differenziale del differenziale secondo chiamasi differenziale terzo o differenziale del terzo ordine di fx; e così di seguito.

93. Definizione III. I calcoli pei quali si determinano i differenziali delle funzioni si dicono *differenziazioni.*

94. Definizione IV. L'indagine de' metodi da usarsi per trovare i differenziali delle funzioni, l'indagine delle proprietà dei differenziali medesimi, l'applicazione di queste proprietà alla soluzione de' problemi formano l'oggetto del *Calcolo differenziale.*

95. Caratteristiche dei differenziali. Il differenziale d'una funzione s'indica scrivendo innanzi ad essa la lettera minuscola d; perlochè il differenziale della funzione fx, supposto che h ovvero Δx sia l'accrescimento della variabile, sarà

$$dfx=hf'x=\Delta xf'x. \tag{1}$$

I differenziali superiori al primo s'indicheranno scrivendo al

di sopra della lettera d un numero che ne esprima l'ordine; dfx, d^2fx, $d^3fx \ldots d^nfx$ saranno i differenziali successivi di fx dal primo ordine sino all' n^{mo} inclusive.

Frattanto sarà

$$d^2fx = ddfx,\ d^3fx = dd^2fx, \ldots d^nfx = dd^{n-1}fx.$$

Se ad indicare le funzione fx ci varremo della lettera u i differenziali successivi di questa funzione si rappresenteranno con du, d^2u, $d^3u \ldots$; e sarà

$$du = u'h = u'\Delta x.$$

Relativamente alle funzioni di più variabili indipendenti è da notare che potendosi avere di esse le derivate parziali rapporto a ciascuna di tali variabili, potranno aversi altresì i *differenziali parziali*. I differenziali parziali di u si esprimeranno così d_xu, d_yu, $d_zu \ldots$ cioè con caratteristiche analoghe a quelle che già usammo rispetto alle derivate; d_xu esprimerà il differenziale parziale della u preso rapporto alla x, d_yu il differenziale parziale preso rapporto alla y, ec.; talmentechè sarà

$$d_xu = u'_x\Delta x,\ d_yu = u'_y\Delta y,\ d_zu = u'_z\Delta z, \ldots$$

Così le espressioni

$$\overset{2}{\underset{x}{d}} f(x, y, z \ldots),\quad \overset{n}{\underset{x}{d}} f(x, y, z \ldots)$$

indicheranno respettivamente il differenziale secondo, ed il differenziale n^{mo} della funzione $f(x, y, z \ldots)$ presi rapporto alla x. Così

$$\overset{2}{\underset{x,y}{d}} f(x, y, z \ldots)$$

esprimerà il differenziale preso rapporto ad y del differenziale già preso rapporto ad x della funzione $f(x, y, z \ldots)$. In generale

$$\overset{m+n+p+\cdots}{\underset{mx,\ ny,\ pz \ldots}{d}} f(x, y, z \ldots)$$

esprimerà il differenziale dell'ordine $m + n + p + \ldots$ preso in volte rapporto ad x, n volte rapporto ad y, p volte raprapporto a z, ec.

96. Scolio I. Facciasi nella equazione (1) $fx = x$; avremo $dx = hx'$; ma $x' = 1$, dunque $dx = h = \Delta x$; dunque *il differenziale della variabile indipendente è uguale all'accrescimento iniziale di questa variabile.*

97. Scolio II. Frattanto l'equazione (1) diventerà

$$dfx = f'x dx;$$

ovvero, facendo $fx = u$,

$$du = u' dx;$$

in questa equazione la u' prende il nome di *coefficiente differenziale;* diguisachè si dice che *il coefficiente differenziale*, ossia *la derivata d'una funzione, esprime il rapporto del differenziale di essa al differenziale della variabile.*

98. Scolio III. La derivata d'una funzione $u = fx$ può adunque esprimersi in questi tre modi diversi,

$$u', \ Du, \ \frac{du}{dx}.$$

È da notare che indicando la derivata di u mediante l'espressione $\frac{du}{dx}$ venghiamo a designare la variabile rapporto a cui si prende tal derivata, in quella guisa medesima che questa derivata si designa mediante la caratteristica $D_x u$.

99. Scolio IV. Si raccoglie da ciò che ogniqualvolta u sarà funzione della variabile indipendente x, avremo (n. 61)

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx};$$

cioè ad esprimere il limite del rapporto $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ basterà mutare i Δ in d.

100. Principio I. Poichè (n. 61)

$$\Delta u = u' \Delta x + \lambda \Delta x;$$

sostituendo du ad $u' \Delta x$, e w a $\lambda \Delta x$, avremo

$$\Delta u = du + w;$$

di qui risulta che *l'accrescimento della funzione* u *corrispondente a un dato accrescimento* Δx *della variabile* x *è uguale al differenziale della funzione stessa più una quantità capace di decrescere indefinitamente in pari tempo di* Δx, *e di andare a zero per* $\Delta x = 0$.

101. Principio II. Essendo $i_0 Dfx$ il differenziale di fx nel supposto che i_0 sia l'accrescimento attribuito alla variabile x in questa prima differenziazione (n. 84), così il differenziale di $i_0 Dfx$ sarà il prodotto della derivata di questa funzione per l'accrescimento i_1 da attribuirsi alla variabile x in questa seconda differenziazione; dimanierachè avremo

$$d^2fx = i_1 D.i_0 Dfx. \tag{2}$$

Parimente il differenziale di $i_1 D.i_0 Dfx$ sarà il prodotto della derivata di questa funzione per l'accrescimento i_2 da attribuirsi alla variabile x in questa terza differenziazione; cioè

$$d^3fx = i_2 D.i_1 D.i_0 Dfx. \tag{3}$$

Così il differenziale di $i_2 D.i_1 D.i_0 Dfx$, indicando i_3 l'accrescimento da attribuirsi alla variabile x in questa quarta differenziazione, sarà

$$d^4fx = i_3 D.i_2 D.i_1 D.i_0 Dfx. \tag{4}$$

In generale sarà

$$d^nfx = i_{n-1} D.i_{n-2} D.i_{n-3} \ldots D.i_0 Dfx \tag{5}$$

102. Principio III. Se la x sarà una variabile indipendente, gli accrescimenti i_0, i_1, i_2, $i_3 \ldots$ saranno quantità cui potremo attribuire il valore che vorremo; quindi saranno necessariamente costanti; potranno altresì essere uguali. Ora

1° Se gl'accrescimenti i_0, i_1, i_2, $i_3 \ldots$ saranno costanti le formule (1), (2), (3), (4) ... si cangeranno nelle seguenti

$$dfx = i_0 Dfx, \quad d^2fx = i_1 i_0 D^2fx, \quad d^3fx = i_2 i_1 i_0 D^3fx, \quad \ldots \tag{6}$$

$$d^nfx = i_{n-1} . i_{n-2} \ldots i_1 . i_0 D^n fx.$$

2° Se gli accrescimenti i_0, i_1, $i_2 \ldots i_{n-1}$ saranno inoltre uguali fra loro, e indicati tutti da h, avremo

$$dfx = hDfx, \quad d^2fx = h^2D^2fx, \quad d^3fx = h^3D^3fx, \quad \ldots \tag{7}$$

$$d^n fx = h^n D^n fx,$$

ovvero

$$df = hf'x, \quad d^2 fx = h^2 f''x, \quad d^3 fx = h^3 f'''x, \ldots$$

$$d^n fx = h^n f^{(n)}x;$$

dunque *quando gli accrescimenti successivi della variabile sono costanti il rapporto del differenziale* n^{mo} *della funzione alla derivata* n^{ma} *di essa è uguale al prodotto degli accrescimenti medesimi; se gli accrescimenti oltre ad essere costanti saranno tutti uguali ad* h *il rapporto del differenziale* n^{mo} *della funzione alla derivata* n^{ma} *sarà uguale alla* n^{ma} *potenza di* h.

103. Scolio I. Le equazioni (6), quando le successive derivate in esse contenute si volessero ricondurre al loro primitivo significato, si potrebbero trasformare nelle seguenti;

$$dfx = i_0 \lim_{i_0=0} \frac{f(x+i_0) - fx}{i_0}$$

$$d^2 fx = i_1 i_0 Df'x = i_1 i_0 \lim_{i_1=0} \frac{f'(x+i_1) - f'x}{i_1}$$

$$d^3 fx = i_2 i_1 i_0 Df''x = i_2 i_1 i_0 \lim_{i_2=0} \frac{f''(x+i_2) - f''x}{i_2}$$

$$d^4 fx = i_3 i_2 i_1 i_0 Df'''x = i_3 i_2 i_1 i_0 \lim_{i_3=0} \frac{f'''(x+i_3) - f'''x}{i_3}$$

. . . .

104. Scolio II. Poniamo $h = dx$ (n. 96); la potenza n^{ma} di h s'indicherà così dx^n, riservando l'espressione $d.x^n$ ad indicare il differenziale della funzione x^n. Allora le formule (7) diverranno

$$dfx = f'xdx, \quad d^2 fx = f''xdx^2, \quad d^3 fx = f'''xdx^3 \ \ldots \ d^n fx = f^{(n)}xdx^n;$$

ovvero

$$du = u'dx, \quad d^2 u = u''dx^2, \quad d^3 u = u'''dx^3 \ \ldots \ d^n u = u^{(n)}dx^n \qquad (8)$$

donde si raccoglie che la derivata n^{ma} della funzione u nella ipotesi di dx costante, può indicarsi mediante il rapporto

$$\frac{d^n u}{dx^n}.$$

105. Scolio III. Poichè i prodotti $hf'x$, $h^2f''x$, $h^3f'''x$, ... sono ordinatamente uguali ai differenziali dfx, d^2fx, d^3fx, ... (n. 102) concluderemo che la formula del Taylor può prendere la seguente forma

$$f(x+h)=fx+\frac{dfu}{1}+\frac{d^2fx}{1.2}+\frac{d^3fx}{1.2.3}\dots+\frac{d^nfx}{1.2..n}\dots;$$

facendo $fx=u$, $f(x+h)=u_1$, sarà

$$u_1=u+\frac{du}{1}+\frac{d^2u}{1.2}+\frac{d^3u}{1.2.3}+\frac{d^4u}{1.2.3.4}\dots+\frac{d^nu}{1.2..n}\dots;$$

e quindi

$$u_1-u=\frac{du}{1}+\frac{d^2u}{1.2}+\frac{d^3u}{1.2.3}\dots+\frac{d^nu}{1.2..n}\dots;$$

di qui si rileva che *i successivi differenziali d' una funzione sono i termini stessi dello sviluppo del suo accrescimento, respettivamente moltiplicati per* 1, 1.2, 1.2.3, ...

106. Principio V. Allorquando gli accrescimenti i_0, i_1, i_2, i_3... si reputano variabili è superfluo supporli disuguali fra loro; converremo adunque di rappresentare anco in questo caso ciascuno di tali accrescimenti con dx, riputando dx variabile. Notisi che dx sarà variabile tostochè x sarà funzione d'un altra variabile indipendente t; infatti da $x=\varphi t$, si ha

$$dx=\varphi' t\, dt, \tag{9}$$

la quale equazione mostra che dx, ove anche dt sia costante, varia al variare di t a cagione del fattore $\varphi' t$. Anche fx, sostituendo ad x il suo valore espresso per t, diverrà funzione di t; talchè la supposizione di dx variabile esige che si considerino x, dx, ed fx come funzioni di un' altra variabile t.

Frattanto facendo $i_0=i_1=i_2=\dots=dx$ ed $fx=u$, le equazioni stabilite al n. 101, diverranno

$$du = dxDu,\ d^2u = dxD.dxDu,\ d^3u = dxD.dxD.dxDu, \dots \quad (10)$$

ovvero

$$du = u'dx,\ d^2u = dxDdu,\ d^3u = dxDd^2u, \dots; \quad (11)$$

dalle quali equazioni, mutando u in x considerata come funzione di t, avremo ancora

$$dx = x'dt,\ d^2x = dxDdx,\ d^3x = dxDd^2x, \dots \quad (12)$$

Perlochè quando si osservi che la derivata del prodotto $u'dx$ (il quale è un prodotto di due funzioni d' una stessa variabile t) si può determinare mediante il principio stabilito al n. 75, otterremo

$$\begin{aligned}
Ddu &= D(u'dx) = u''dx + u'Ddx\\
d^2u &= dx(u''dx + u'Dx),\\
d^2u &= u''dx^2 + u'.dxDdx,\\
d^2u &= u''dx^2 + u'd^2x; \qquad (13)
\end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}
d^3u &= dxD(u''dx^2 + u'd^2x),\\
d^3u &= dx(u'''dx^2 + 2u''dxDdx + u''d^2x + u'Dd^2x),\\
d^3u &= u'''dx^3 + 2u''dx.dxDdx + u''dxd^2x + u'.dxDd^2x,\\
d^3u &= u'''dx^3 + 3u''dxd^2x + u'd^3x; \qquad (14)
\end{aligned}$$

nello stesso modo otterremo i differenziali d^4u, $d^5u, \dots$ espressi come lo sono i precedenti per le derivate di u e pei differenziali successivi della x. Notisi che u', u'', u''',... sono le derivate di fx prese rispetto ad x; dx, d^2x, $d^3x, \dots$ sono i differenziali di ft espressi respettivamente da $f'tdt$, $f''tdt^2$, $f'''tdt^3, \dots$

XI. I differenziali delle funzioni indeterminate composte.

107. Principio I. Moltiplicando per dx l'equazione (1) n. 73, avremo

$$dxDs = dxD\varphi x + dxD\psi x + dxD\xi x + \dots$$

ovvero $$ds = d\varphi x + d\psi x + d\xi x + \ldots$$
conseguentemente
$$d^2 s = d^2\varphi x + d^2\psi x + d^2\xi x + \ldots;$$
in generale
$$d^n s = d^n\varphi x + d^n\psi x + d^n\xi x + \ldots \qquad (1)$$

dunque, dx essendo costante o variabile, *il differenziale di qualunque ordine d' un polinomio è uguale alla somma de' differenziali dello stesso ordine di tutti i suoi termini.*

108. Scolio. Sia a una costante; sarà $Da = 0$; $dxDa = 0$; dunque *il differenziale d' una quantità costante dee riputarsi uguale a zero.*

Talmentechè i termini costanti contenuti nel polinomio s non compariranno nel suo differenziale.

109. Principio II. Moltiplicando per dx l' equazione (3) n. 75, avremo
$$p'dx = \varphi x\psi' x dx + \psi x\varphi' x dx,$$
ovvero $$dp = \varphi x d\psi x + \varphi x d\psi x; \qquad (2)$$

dunque *il differenziale del prodotto di due funzioni è uguale alla prima di esse moltiplicata pel differenziale della seconda più la seconda moltiplicata pel differenziale della prima.*

110. Corollario I. Se uno de' fattori fosse costante per esempio $\psi = a$ sarebbe $d\psi = 0$; conseguentemente
$$d(a\varphi x) = ad\varphi x,$$
$$d^2(a\varphi x) = ad^2\varphi x,$$
in generale $$d^n(a\varphi x) = ad^n\varphi x; \qquad (3)$$

il differenziale di qualunque ordine del prodotto di una costante per una funzione è uguale al prodotto della costante pel differenziale dello stesso ordine di quella funzione.

111. Corollario II. Moltiplicando per dx l' equazione (4) n. 77, avremo
$$dxD(uvw\ldots) = (vw\ldots)dxDu + (uw\ldots)dxDv + (uv\ldots)dxDw\ldots$$

ovvero

$$d(uvw\ldots) = (vw\ldots)du + (uw\ldots)dv + (uv\ldots)dw\ldots \quad (4)$$

donde si vede che *il differenziale del prodotto* p *è la somma dei suoi differenziali presi rispetto a ciascuno de' fattori* u, v, w... *di che si compone il prodotto stesso.*

Questa regola può esprimersi analiticamente mediante l'equazione

$$dp = d_u p + d_v p + d_w p + \ldots \quad (5)$$

112. Corollario III. Se i fattori u, v, w... saranno uguali fra loro, e rappresentati da z ciascun termine del differenziale di p si ridurrà a $z^{m-1}dz$, avremo adunque

$$dz^m = mz^{m-1}dz. \quad (6)$$

Questo calcolo suppone per altro che l'esponente m sia intero e positivo.

113. Scolio. Quando gli accrescimenti i_0, i_1, i_2, i_3... si suppongono costanti, uguali fra loro e rappresentati da dx, il differenziale di qualunque ordine della funzione u si può determinare per mezzo del solo principio espresso dal Corollario I (n. 110); infatti dalla definizione del differenziale avremo primieramente

$$du = u'dx,\ du' = u''dx,\ du'' = u'''dx, \ldots\ du^{(n-1)} = u^{(n)}dx$$

e quindi, in virtù del Corollario I,

$$d^2u = du'dx = u''dx^2,\ d^3u = du''dx = u'''dx^3, \ldots$$

in generale $$d^nu = u^{(n)}dx^n.$$

114. Principio III. Moltiplicando per dx l'equazione (8) n. 79, avremo

$$dxD\frac{\varphi x}{\psi x} = \frac{\psi x\varphi' x dx - \varphi x\psi' x dx}{\psi x^2};$$

ovvero $$d\frac{\varphi x}{\psi x} = \frac{\psi x d\varphi x - \varphi x d\psi x}{\psi x^2}; \quad (7)$$

dunque *il differenziale del quoziente di due funzioni è uguale al divisore moltiplicato pel differenziale del dividendo meno il dividendo*

moltiplicato pel differenziale del divisore, la differenza divisa pel quadrato del divisore medesimo.

115. Corollario I. Facendo $\varphi x = 1$ risulterà

$$d\frac{1}{\psi x} = -\frac{d\psi x}{\psi x^2}. \tag{8}$$

116. Corollario II. E di qui, facendo $\psi x = x^m$, s'inferisce che

$$d\frac{1}{x^m} = -\frac{dx^m}{x^{2m}} \quad \text{ovvero} \quad dx^{-m} = -mx^{-m-1}. \tag{9}$$

Questo calcolo suppone per altro che l'esponente m sia intero.

117. Scolio. Si noti che le equazioni (1) (4) (7) differiscono dalle equazioni (1) (4) (8) (*VII*) per la sola caratteristica d, la quale è majuscola nelle prime, minuscola nelle altre: dunque sostituendo alla caratteristica D la d quelle equazioni, prima relative alle derivate, passano ad esprimere altrettante proprietà dei differenziali.

XII. *Le derivate, i differenziali, e gli sviluppi in serie delle funzioni semplici* x^n, a^x, *log* x, *sen* x, *cos* x, *tang* x, *cot* x.

118. Problema I. *Trovare la derivata di* x^m.

Sostituendo xh ad x, la funzione x^m darà

$$(xh)^m = x^m . h^m;$$

la funzione x^m gode adunque della proprietà enunciata dalla equazione (9) n. 65; e perciò la derivata di essa potrà determinarsi mediante la formula (16) n. 65, ove si verifichi la condizione $f1 = 1$. Ora ponendo $fx = x^m$ si trova

$$f1 = 1^m = 1, \; f(1+\gamma) = (1+\gamma)^m, \; \log f(1+\gamma) = m \log(1+\gamma),$$

dunque

$$Dx^m = mx^{m-1} \quad (1) \qquad\qquad dx^m = mx^{m-1}dx \quad (2)$$

qualunque sia m.

119. Corollario I. Le successive derivate di x^m saranno

$$D^2x^m = m(m-1)x^{m-2}$$

$$D^3x^m = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$D^nx^m = m(m-1)\ldots\ [m-(n-1)]x^{m-n}; \quad (3)$$

facendo $m=n$, avremo pure

$$D^mx^m = 1.2.3\ldots m; \quad (4)$$

le derivate susseguenti son nulle.

120. Corollario II. Sostituendo $-m$ ad m avremo le derivate della frazione semplice razionale x^{-m}, e sarà

$$D\frac{1}{x^m} = -m\frac{1}{x^{m+1}}$$

$$D^2\frac{1}{x^m} = m(m+1)\frac{1}{x^{m+2}}$$

$$D^3\frac{1}{x^m} = -m(m+1)(m+2)\frac{1}{x^{m+3}}$$

$$\cdots\cdots$$

$$D^n\frac{1}{x^m} = (-1)^n m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)\frac{1}{x^{m+n}} \quad (5)$$

per $m=1$ sarà

$$D\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2},\quad D^2\frac{1}{x} = 1.2\frac{1}{x^3},\quad D^3\frac{1}{x} = -1.2.3\frac{1}{x^4},\ \ldots.$$

$$D^n\frac{1}{x} = (-1)^n 1.2.3\ \ldots n\frac{1}{x^{n+1}} \quad (6)$$

121. Corollario III. Sostituendo $\frac{1}{m}$ ad m avremo le derivate della funzione irrazionale $\sqrt[m]{x}$, e sarà

$$D\sqrt[m]{x} = \frac{1}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}} \quad (7)$$

$$D^n\sqrt[m]{x} = \frac{(-1)^{n-1}(m-1)(2m-1)(3m-1)\ldots[(n-1)m-1]}{m^n\sqrt[m]{x^{mn-1}}} \quad (8)$$

per $m=2$ avremo

$$D^n\sqrt{x}=\frac{(-1)^{n-1}\,1.3.5.7\ldots(2n-3)}{2^n\sqrt{x^{2n-1}}};\qquad (9)$$

posto $n=1$ si trova $2n-3=-1$; ciò mostra che il numeratore dee arrestarsi al primo fattore $(-1)^{n-1}=(-1)^0=1$;

perlochè sarà $$D\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.\qquad (10)$$

122. Corollario IV. La serie del Taylor (n. 82) mediante le derivate che abbiamo trovato di sopra darà gli sviluppi di $(x+h)^m$, $(x+h)^{-m}$, $\sqrt[m]{(x+h)}$; basterà per altro tener conto del primo di essi, perchè essendo la formula (3) vera qualunque sia m potrà lo sviluppo medesimo estendersi anche al caso di m negativo e di m fratto. Siffatto sviluppo sarà

$$(x+h)^m=x^m+\frac{m}{1}x^{m-1}h+\frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}h^2+\ldots\ldots$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{1.\,2.\,3\ldots\ldots n}x^{m-n}h^n+\ldots;$$

esso è noto sotto il nome di *formula newtoniana del binomio.*

123. Corollario V. Abbiasi una funzione intera di x,

$$u=x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}\ldots+Sx+T;$$

sarà

$$Du=mx^{m-1}+(m-1)Ax^{m-2}+(m-2)Bx^{m-3}\ldots+S$$

ad ogni derivazione gli esponenti della x *si abbassano d' una unità e sparisce il termine costante.* La derivata m^{ma} sarà

$$D^m u=1.\,2.\,3.\,4\ldots\ldots m;$$

da ciò si raccoglie che la derivata m^{ma} d' una funzione intera del grado m ordinata per le potenze discendenti della x è uguale alla derivata m^{ma} del primo termine. Le derivate susseguenti son nulle.

124. Problema II. *Trovare la derivata di* a^x.

Sostituendo $x+h$ ad x, abbiamo

$$a^{x+h}=a^x.\,a^h;$$

dunque la funzione a^x gode della proprietà enunciata dalla equazione (18) n. 66, e perciò la sua derivata dovrà determinarsi mediante l'equazione (19) n. 66, la quale darà

$$Da^x = a^x \left\{ \frac{a^h - 1}{h} \right\}_{h=0} ; \tag{11}$$

siccome ponendo $h = 0$ si ha $a^h = 1$, perciò indicando con γ una quantità capace di convergere verso lo zero in pari tempo di h, potremo porre

$$a^h = 1 + \gamma ;$$

donde si ricava

$$h \log a = \log (1 + \gamma),$$

e quindi
$$\left\{ \frac{a^h - 1}{h} \right\}_{h=0} = \log a \left\{ \frac{\gamma}{\log (1 + \gamma)} \right\}_{\gamma=0} ; \tag{12}$$

ponendo
$$\left\{ \frac{\gamma}{\log (1 + \gamma)} \right\}_{\gamma=0} = T, \tag{13}$$

avremo

$$\begin{aligned} D a^x &= (T \log a)\, a^x, \qquad (14) \\ D^2 a^x &= (T \log a)^2 a^x, \\ D^3 a^x &= (T \log a)^3 a^x; \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

e conseguentemente (n. 82)

$$a^{x+h} = a^x + \frac{Th \log a}{1} a^x + \frac{(Th \log a)^2}{1.\ 2} a^x + \frac{(Th \log a)^3}{1.\ 2.\ 3} a^x + \dots \tag{15}$$

$$a^h = 1 + \frac{Th \log a}{1} + \frac{(Th \log a)^2}{1.\ 2} + \frac{(Th \log a)^3}{1.\ 2.\ 3} + \dots \tag{16}$$

Pongasi la somma di tutti i coefficienti di questa serie uguale ad e; sarà

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots \tag{17}$$

Or si osservi che facendo

$$Th \log a = 1 \quad \text{cioè} \quad h = \frac{1}{T \log a},$$

a^h si cangia in e; ciò porta a concludere che

$$a^{\frac{1}{T \log a}} = e; \tag{18}$$

donde si ha, prendendo i logaritmi da ambedue le parti,

$$T = \frac{1}{\log e}; \tag{19}$$

laonde, stante l'equazione (13), sarà

$$\left\{\frac{\gamma}{\log(1+\gamma)}\right\}_{\gamma=0} = \frac{1}{\log e},$$

e per l'equazione (14)

$$Da^x = \frac{\log a}{\log e} a^x. \tag{20}$$

Qui i logaritmi di a e di e s'intende che appartengano ad un sistema qualunque: se piacesse di riferirli al sistema dei logaritmi così detti *iperbolici* o *neperiani*, la cui base sappiamo essere e, e che si designano colla lettera minuscola l, sarà $\mathrm{l}e = 1$; per cui cangiando nelle suindicate formule $\log a$, $\log e$ in $\mathrm{l}a$, $\mathrm{l}e$, avremo

$$\left\{\frac{\gamma}{\mathrm{l}(1+\gamma)}\right\}_{\gamma=0} = 1 \tag{21}$$

$$Da^x = a^x \mathrm{l}a. \tag{22}$$

Se poi i logaritmi contenuti nella formula (20) si volessero prendere nel sistema avente per base a, cioè la base stessa della quantità esponenziale, e che designeremo colla lettera majuscola L avremo $\mathrm{L}a = 1$; per la qual cosa cangiando $\log a$, $\log e$ in $\mathrm{L}a$, $\mathrm{L}e$ sarà

$$Da^x = \frac{a^x}{\mathrm{L}e}. \tag{23}$$

125. Corollario I. Alle formule (20), (22), (23) conseguono frattanto le tre differenziali seguenti;

$$da^x = \frac{\log a}{\log e} a^x dx \tag{24}$$

$$da^x = \mathrm{l}a . a^x dx \tag{25}$$

$$da^x = \frac{a^x dx}{\mathrm{L}e} \tag{26}$$

delle quali la prima ha luogo qualunque sia la base, la seconda suppone che la base sia e, la terza che la base sia a.

126. Corollario II. Le tre diverse espressioni della derivata prima danno tre diverse espressioni per ciascuna derivata degli ordini superiori. Ordinariamente si usa la (22) essendo la più semplice; da questa formula si ricava

$$D^2 a^x = a^x \mathrm{l}a^2,\ D^3 a^x = a^x \mathrm{l}a^3,\ D^4 a^x = a^x \mathrm{l}a^4,\ \ldots.\ D^n a^x = a^x \mathrm{l}a^n \tag{27}$$

notisi che $\mathrm{l}a^n$ indica la potenza $n.^{ma}$ del logaritmo di a; $\mathrm{l}.a^n$ esprimerebbe il logaritmo della $n.^{ma}$ potenza di a.

127. Corollario III. Sostituendo il valore di T (19) nella equazione (16) avremo,

1° la base essendo qualunque

$$a^h = 1 + \frac{\log a}{\log e} \cdot \frac{h}{1} + \frac{\log a^2}{\log e^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{\log a^3}{\log e^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \ldots \tag{28}$$

e mutando h in x

$$a^x = 1 + \frac{\log a}{\log e} \cdot \frac{x}{1} + \frac{\log a^2}{\log e^2} \cdot \frac{x^2}{1.2} + \frac{\log a^3}{\log e^3} \cdot \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots \tag{29}$$

2° la base essendo e

$$a^x = 1 + \mathrm{l}a \frac{x}{1} + \mathrm{l}a^2 \frac{x^2}{1.2} + \mathrm{l}a^3 \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots. \tag{30}$$

3° la base essendo a

$$a^x = 1 + \frac{1}{\mathrm{L}e} \cdot \frac{x}{1} + \frac{1}{\mathrm{L}e^2} \cdot \frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{\mathrm{L}e^3} \cdot \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots \tag{31}$$

128. Corollario IV. Facendo $a = e$, la formula (22) dà

$$De^x = e^x;\ \text{quindi}\ D^2 e^x = e^x,\ D^3 e^x \ldots.\ D^n e^x = e^x. \tag{32}$$

dunque *le derivate di qualunque ordine della funzione* e^x *sono uguali alla funzione medesima.*

Le equazioni (20), (23) confermano questo resultato, perchè allorquando $a = e$ il logaritmo di a è uguale al logaritmo di e qualunque sia la base, ed Le si muta in $La = 1$.

Ciascuno dei tre sviluppi di a^x, facendo $a = e$, darà

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.\,2} + \frac{x^3}{1.\,2.\,3} + \dots \tag{33}$$

129. Scolio. Lo sviluppo della esponenziale e^x basterebbe a determinare i tre sviluppi suindicati relativi ad a^x. Infatti pongasi l'identità $e^{la} = a$; da essa avremo

$$la \log e = \log a, \quad la = \frac{\log a}{\log e}; \tag{34}$$

quindi
$$e^{\frac{\log a}{\log e}} = a, \quad e^{\frac{x \log a}{\log e}} = a^x; \tag{35}$$

talchè la serie (33) la quale esprime lo sviluppo di e^x, sostituendo $\dfrac{x \log a}{\log e}$ ad x, si muta nello sviluppo di a^x trovato di sopra.

130. Problema III. *Trovare la derivata di* $\log x$.

Supponiamo in primo luogo che il logaritmo sia iperbolico. Sostituendo xh ad x si trova

$$l(xh) = lx + lh;$$

dunque la funzione lx gode della proprietà espressa dalla equazione (21) n. 67; diguisachè la sua derivata sarà determinata dalla formula (23) n. 67, la quale dà

$$Dlx = \frac{1}{x} \left[\frac{l(1+\gamma)}{\gamma} \right]_{\gamma=0}; \tag{36}$$

ma stante l'equazione (21) n. 124,

$$\left[\frac{l(1+\gamma)}{\gamma} \right]_{\gamma=0} = \frac{1}{\left[\dfrac{\gamma}{l(1+\gamma)} \right]_{\gamma=0}} = 1$$

dunque $$Dlx = \frac{1}{x}. \tag{37}$$

Or poichè l' identità $a^{Lx} = x$ dà

$$Lx.la = lx, \tag{38}$$

perciò sostituendo nella (37) $Lx.la$ ad lx, e quindi dividendo per la avremo

$$DLx = \frac{1}{xla}; \tag{39}$$

ed osservando che $e^{la} = a$, $la.Le = 1$, e che perciò $la = \frac{1}{Le}$, (40)

avremo altresì $$DLx = \frac{Le}{x}. \tag{41}$$

131. Corollario I. Le formule (37), (39), (41) danno poi i differenziali seguenti

$$dlx = \frac{dx}{x}, \tag{42}$$

$$dLx = \frac{dx}{xla} = \frac{Ledx}{x}. \tag{43}$$

132. Corollario II. Quanto alle derivate degli ordini superiori ponendo mente alla formula (6) n. 120, otterremo

$$D^2lx = -\frac{1}{x^2},\quad D^3lx = 1.2\frac{1}{x^3},\quad D^4lx = -1.2.3\frac{1}{x^4}\ldots$$

$$D^nlx = (-1)^{n-1}\,1.2.3\;\ldots.\;(n-1)\frac{1}{x^n}. \tag{44}$$

Queste derivate moltiplicate che sieno per Le, oppure divise per la, si muteranno nelle derivate di Lx, come risulta dalle formule (39) e (41).

133. Corollario III. Frattanto la formula del Taylor darà

$$l(x+h) = lx + \frac{h}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{h^2}{x^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{h^3}{x^3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{h^4}{x^4}\ldots \tag{45}$$

ovvero

$$l\left(1+\frac{h}{x}\right) = \frac{h}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{h^2}{x^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{h^3}{x^3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{h^4}{x^4} + \ldots. \tag{46}$$

sostituendo x ad $\frac{h}{x}$, avremo

$$l(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots \tag{47}$$

Or poichè le equazioni (38) e (40) danno

$$l(1+x)=L(1+x)la=\frac{L(1+x)}{Le},$$

perciò avremo ancora i due sviluppi seguenti

$$L(1+x)=\frac{1}{la}\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots\right) \tag{48}$$

$$L(1+x)=Le\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots\right). \tag{49}$$

134. Problema IV. *Trovare le derivate di* sen x *e* cos x.

Rispetto a $\operatorname{sen} x$ sostituendo successivamente $x+h$ ed $x-h$ ad x e prendendo la differenza dei due risultati, otterremo

$$\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}(x-h)=2\cos x \operatorname{sen} h;$$

di qui si vede che la funzione $\operatorname{sen} x$ soddisfà alla condizione (25) n. 68, e perciò la sua derivata dovrà determinarsi mediante la formula (26) n. 68; porremo adunque

$$\varphi x=2\cos x, \qquad \psi h=\operatorname{sen} h,$$

ed avremo

$$D \operatorname{sen} x=\cos x \int_{h=0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}.$$

Qui si osservi che essendo $h=M(\operatorname{sen} h, \operatorname{tang} h)$, sarà

$$\frac{\operatorname{sen} h}{h}=M\left(\frac{\operatorname{sen} h}{\operatorname{sen} h}, \frac{\operatorname{sen} h}{\operatorname{tang} h}\right)=M(1, \cos h);$$

ma $\int \cos h=1$, dunque (n. 44)

$$\int_{h=0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}=1; \tag{50}$$

e conseguentemente

$$D \operatorname{sen} x = \cos x. \tag{51}$$

Rispetto a $\cos x$ osserveremo come sopra che

$$\cos(x+h) - \cos(x-h) = -2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h;$$

donde risulta che anche il coseno soddisfà alla condizione (25) n. 68; la derivata di $\cos x$ potrà adunque ricavarsi anch' essa dalla formula (26) n. 68, ponendo

$$\varphi x = -2 \operatorname{sen} x, \qquad \psi h = \operatorname{sen} h;$$

per cui risulterà

$$D \cos x = -\operatorname{sen} x \left[\frac{\operatorname{sen} h}{h} \right]_{h=0},$$

ovvero

$$D \cos x = -\operatorname{sen} x. \tag{52}$$

135. Corollario I. Le formule (51) (52) danno immediatamente

$$d \operatorname{sen} x = \cos x \, dx \tag{53}$$

$$d \cos x = -\operatorname{sen} x \, dx. \tag{54}$$

136. Corollario II. Frattanto sarà

1° $D^2 \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x$, $D^3 \operatorname{sen} x = -\cos x$, $D^4 \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$; (55)

quest' ultimo risultato dimostra che la derivata quinta, la sesta, la settima ec. avranno i medesimi valori delle quattro derivate precedenti, i quali si riprodurranno periodicamente nel medesimo ordine:

2° $D^2 \cos x = -\cos x$, $D^3 \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$, $D^4 \operatorname{sen} x = \cos x$; (56)

qui pure l'ultimo risultato dimostra che le derivate quinta, sesta, settima ec. avranno i medesimi valori delle quattro derivate precedenti, i quali si riprodurranno periodicamente nell'ordine stesso.

137. Corollario III. Le derivate successive del seno e del coseno possono trasformarsi ancora nelle seguenti espressioni (*);

(*) Si osservi che

$$\cos\left(x + \frac{n}{2}\pi\right) = \cos\left(-x - \frac{n}{2}\pi\right), \quad -\operatorname{sen}\left(x + \frac{n}{2}\pi\right) = \operatorname{sen}\left(-x - \frac{n}{2}\pi\right);$$

$$
\begin{aligned}
D \operatorname{sen} x &= \operatorname{sen}\left(x + \tfrac{1}{2}\pi\right) \\
D^2 \operatorname{sen} x &= \operatorname{sen}\left(x + \tfrac{2}{2}\pi\right) \\
D^3 \operatorname{sen} x &= \operatorname{sen}\left(x + \tfrac{3}{2}\pi\right) \\
D^4 \operatorname{sen} x &= \operatorname{sen}\left(x + \tfrac{4}{2}\pi\right) \\
D^5 \operatorname{sen} x &= \operatorname{sen}\left(x + \tfrac{5}{2}\pi\right) \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{57}
$$

passando al complemento sarà

$$\cos\left(x + \frac{n}{2}\pi\right) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{n+1}{2}\pi\right) \tag{a}$$

$$-\operatorname{sen}\left(x + \frac{n}{2}\pi\right) = \cos\left(x + \frac{n+1}{2}\pi\right); \tag{b}$$

sostituendo $n+1$ ad n nella (*a*), e paragonando il risultato colla (*b*) avremo

$$\operatorname{sen}\left(x + \frac{n}{2}\pi\right) = -\operatorname{sen}\left(x + \frac{n+2}{2}\pi\right); \tag{c}$$

passando ai complementi, mutando i segni agli archi, e sostituendo $n+1$ ad n, avremo altresì

$$\cos\left(x + \frac{n}{2}\pi\right) = -\cos\left(x + \frac{n+2}{2}\pi\right); \tag{d}$$

finalmente sostituendo nella (*b*) $n-1$ ad n, avremo

$$\cos\left(x + \frac{n}{2}\pi\right) = -\operatorname{sen}\left(x + \frac{n-1}{2}\pi\right) \tag{e}$$

Sicchè per trasformare il seno in un coseno che abbia lo stesso valore ci varremo della formula (*a*) che qui trascriviamo

$$\cos\left(x + \frac{n}{2}\pi\right) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{n+1}{2}\pi\right) \tag{1}$$

Per trasformare un seno negativo in un seno o coseno positivo, ci varremo delle formule (*b*), (*c*), in virtù delle quali sarà

$$-\operatorname{sen}\left(x + \frac{n}{2}\pi\right) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{n+2}{2}\pi\right) = \cos\left(x + \frac{n+1}{2}\pi\right) \tag{2}$$

$$
\begin{aligned}
D \cos x &= \cos\left(x + \tfrac{1}{2}\pi\right) \\
D^2 \cos x &= \cos\left(x + \tfrac{2}{2}\pi\right) \\
D^3 \cos x &= \cos\left(x + \tfrac{3}{2}\pi\right) \qquad (58) \\
D^4 \cos x &= \cos\left(x + \tfrac{4}{2}\pi\right) \\
D^5 \cos x &= \cos\left(x + \tfrac{5}{2}\pi\right) \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Per trasformare un coseno negativo in un seno o coseno positivo ci varremo delle formule (d), (e), cioè

$$-\cos\left(x + \frac{n}{2}\pi\right) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{n-1}{2}\pi\right) = \cos\left(x + \frac{n+2}{2}\pi\right) \quad (3)$$

Le formule (1) (2) (3) riescono utilissime in molte analitiche trasformazioni.

Infatti proponiamoci di trasformare tutti i termini

$$+\cos x,\ -\operatorname{sen} x,\ -\cos x,\ +\operatorname{sen} x,\ +\cos x,\ -\operatorname{sen} x, \text{ ec.}$$

in una serie di seni positivi.

Avremo dalla (1) per $n = 0$, $+\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{1}{2}\pi\right)$

dalla (2) per $n = 0$, $-\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{2}{2}\pi\right)$

dalla (3) per $n = 4$, $-\cos\left(x + 2\pi\right) = -\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{3}{2}\pi\right)$;

oltracciò è manifesto che $+\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + 2\pi\right) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{4}{2}\pi\right)$.

Or siccome senza alterare il seno possiamo aggiungere all' arco un numero qualunque di circonferenze, perciò sarà

$$
\begin{aligned}
+\cos x &= \operatorname{sen}\left(x + \tfrac{5}{2}\pi\right) \\
-\operatorname{sen} x &= \operatorname{sen}\left(x + \tfrac{6}{2}\pi\right) \ldots\ldots \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

dunque ai termini dati potranno sostituirsi i seguenti

$$\operatorname{sen}\left(x + \tfrac{1}{2}\pi\right),\ \operatorname{sen}\left(x + \tfrac{2}{2}\pi\right),\ \operatorname{sen}\left(x + \tfrac{3}{2}\pi\right),\ \operatorname{sen}\left(x + \tfrac{4}{2}\pi\right),\ \operatorname{sen}\left(x + \tfrac{5}{2}\pi\right), \text{ ec.}$$

Proponiamoci in secondo luogo di trasformare tutti i termini

$$-\operatorname{sen} x,\ -\cos x,\ +\operatorname{sen} x,\ +\cos x,\ -\operatorname{sen} x,\ -\cos x, \text{ ec.}$$

in coseni positivi.

dunque sarà

$$D^n \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{n}{2}\pi\right) \quad (59) \quad D^n \cos x = \cos\left(x + \frac{n}{2}\pi\right) \quad (60)$$

138. Corollario IV. Potremo frattanto sviluppare sen x e cos x secondo le potenze ascendenti dell' arco. Facciasi nelle formule (57) (58) $x = 0$; avremo i valori di $f0, f'0, f''0, \ldots$ quindi avendo ricorso al Teorema del Maclaurin, otterremo

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots + \frac{x^n}{1.2..n} \operatorname{sen} \frac{n}{2}\pi \ldots \quad (61)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} \cos \frac{n}{2}\pi \ldots \quad (62)$$

139. Problema V. *Trovare la derivata di* tang x *e* cot x.

1° Poichè $\operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, avremo n. 79,

$$D \operatorname{tang} x = \frac{\cos x\, D \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x D \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x};$$

ovvero
$$D \operatorname{tang} x = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad (63)$$

2° E poichè $\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, avremo pure

Avremo dalla (2) per $n = 0$, $-\operatorname{sen} x = \cos(x + \frac{1}{2}\pi)$,

dalla (3) per $n = 0$, $-\cos x = \cos(x + \frac{2}{2}\pi)$,

dalla (3) per $n = 1$, $+\operatorname{sen} x = \cos(x + \frac{3}{2}\pi)$;

è poi manifesto che $+\cos x = \cos(x + \frac{4}{2}\pi)$.

Conseguentemente sarà pure $-\operatorname{sen} x = \cos(x + \frac{5}{2}\pi)$,

$-\cos x = \cos(x + \frac{6}{2}\pi)$,

. . . .

talmentechè ai termini dati potremo sostituire i seguenti

$\cos(x + \frac{1}{2}\pi)$, $\cos(x + \frac{2}{2}\pi)$, $\cos(x + \frac{3}{2}\pi)$, $\cos(x + \frac{4}{2}\pi)$, $\cos(x + \frac{5}{2}\pi)$, ec.

$$D\cot x = \frac{\operatorname{sen} x\, D\cos x - \cos x\, D\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x},$$

ovvero
$$D\cot x = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}. \tag{64}$$

140. Corollario V. Dalle equazioni (63), (64) si hanno i differenziali

$$d\operatorname{tang} x = \frac{dx}{\cos^2 x}, \tag{65}$$

$$d\cot x = -\frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}. \tag{66}$$

XIII. Le derivate e i differenziali di qualunque ordine di alcune funzioni complesse.

141. Problema. *Trovare la derivata* n^{ma} *del prodotto* p=u v w...z *i cui fattori* u, v, w, ... *sono funzioni della* x.

Quando le caratteristiche D_u, D_v, D_w, ... si considerino come altrettante quantità la regola analitica (5) n. 77, relativa alla derivata prima di p potrà esprimersi in questa guisa

$$Dp = (D_u + D_v + D_w + \ldots)\, p; \tag{1}$$

infatti eseguendo la moltiplicazione avremo

$$(D_u + D_v + D_w + \ldots)\, p = D_u p + D_v p + D_w p + \ldots$$
$$= D_u uvw\ldots + D_v uvw\ldots + D_w uvw\ldots + \ldots$$

ma le espressioni $D_u uvw\ldots$, $D_v uvw\ldots$, $D_w uvw\ldots$, sono equivalenti a $vw\ldots Du$, $uw\ldots Dv$, $uv\ldots Dw$, ec. perciò l'equazione simbolica (1) riproduce l'equazione effettiva seguente

$$vw\ldots Du + uw\ldots Dv + uv\ldots Dw + \ldots$$

Ciò posto è da notare che ottenuta la prima derivata, per passare alla seconda è d'uopo che si facciano due operazioni; primieramente bisogna determinare la derivata d'ogni termine in

quella guisa stessa che si è presa la derivata del prodotto uvw... cioè rapporto ad u, v, w, ec.; in secondo luogo bisogna sommare tutti i risultati che si ottengono. Per la prima di queste operazioni, in virtù della medesima equazione simbolica (1), avremo

$$D.D_u p = (D_u + D_v + D_w + \ldots)D_u p,$$
$$D.D_v p = (D_u + D_v + D_w + \ldots)D_v p,$$
$$D.D_w p = (D_u + D_v + D_w + \ldots)D_w p,$$
$$\cdots\cdots$$

per la seconda, cioè sommando, avremo

$$D^2 p = (D_u + D_v + D_w + \ldots)(D_u p + D_v p + D_w p + \ldots);$$

ma $D_u p + D_v p + D_w p + \ldots = Dp = (D_u + D_v + D_w + \ldots)p$,

dunque $$D^2 p = (D_u + D_v + D_w + \ldots)^2 p. \tag{2}$$

Nella stessa guisa potremo dimostrare che

$$D^3 p = (D_u + D_v + D_w + \ldots)^3 p; \tag{3}$$

dunque in generale sarà

$$D^n p = (D_u + D_v + D_w + \ldots)^n p. \tag{4}$$

Ora il termine generale dello sviluppo del secondo membro di questa equazione è (*)

$$T = \frac{1.2\ldots n \; D_u^a D_v^b D_w^c \ldots . D_z^i p}{1.2\ldots a \times 1.2\ldots b \times 1.2\ldots c \times \ldots 1.2\ldots . i} \tag{5}$$

essendo $a + b + c \ldots + i = n$; dunque riconducendo questa espressione simbolica al suo vero significato, si vedrà che il termine generale della derivata n^{ma} del prodotto $p = uvw \ldots z$, non solo è indicato dalla formula (5) ma ben anche dalla formula seguente,

$$T = \frac{1.2\ldots n \, D_{au,\, bv,\, cw,\ldots iz}^{a+b+c \cdots + i} (uvw \ldots z)}{1.2\ldots a \times 1.2\ldots b \times 1.2\ldots c \times \ldots 1.2\ldots i}; \tag{6}$$

e poichè

(*) *V. Francœur, Cours de Math. T. II p. 13.*

$$\underset{au,\,bv,\,cw\,\ldots\,iz}{\overset{a+b+c\ldots+i}{D}}(uvw\ldots z)=u^{(a)}v^{(b)}w^{(c)}\ldots z^{(i)},$$

conseguentemente

$$T=\frac{1.2\ldots n\,u^{(a)}v^{(b)}w^{(c)}\ldots z^{(i)}}{1.2\ldots a\times1.2\ldots b\times1.2\ldots c\times\ldots1.2\ldots i}; \qquad (7)$$

dove la somma degl' indici a, b, $c\ldots i$ sarà uguale ad n: tanti termini avrà di questa forma la derivata n^{ma} di p, quanti sono i sistemi de' valori interi e positivi di a, b, $c\ldots i$ capaci di soddisfare alla èquazione

$$a+b+c\ldots.+i=n;$$

questo risultato è noto sotto il nome di *Teorema del Leibnitz.*

142. Corollario I. La regola analitica relativa al differenziale del prodotto di più funzioni ed espressa dalla equazione (5) n. 111, si deduce dalla regola relativa alla derivata di questo stesso prodotto cambiando il D in d; perciò avremo

$$dp=(d_u+d_v+d_w+\ldots)p, \qquad (8)$$

ed anche

$$d^np=(d_u+d_v+d_w+\ldots)^np; \qquad (9)$$

talchè il termine generale del differenziale n^{mo} di p, sarà

$$T_1=\frac{1.2\ldots n\,\underset{au,\,bv,\,cw\,\ldots\,iz}{\overset{a+b+c\ldots+i}{d}}(uvw\ldots z)}{1.2\ldots a\times1.2\ldots b\times1.2\ldots c\times\ldots1.2\ldots i} \qquad (10)$$

ovvero

$$T_1=\frac{1.2\ldots n\,d^au\,d^bv\,d^cw\ldots d^iz}{1.2\ldots a\times1.2\ldots b\times1.2\ldots c\times\ldots1.2\ldots i} \qquad (11)$$

143. Corollario II. Se il prodotto p si riducesse a due soli fattori uv, avremmo

$$(D_u+D_v)^n=\overset{n}{D}_u+\frac{n}{1}\overset{n-1}{D}_u D_v+\frac{n(n-1)}{1.2}\overset{n-2}{D}_u\overset{2}{D}_v+\ldots$$
$$\ldots+nD_u\overset{n-1}{D}_v+\overset{n}{D}_v$$

ma, $\overset{n}{\underset{u}{D}} = \overset{n}{\underset{u}{D}}(uv) = vD^n u$, $\overset{n-1}{\underset{u}{D}}\ \underset{v}{D} = \overset{n-1}{\underset{u}{D}}\ \underset{v}{D}\ (uv) = D^{n-1}uDv, \ldots\ldots;$
dunque

$$D^n(uv) = vD^n u + nD^{n-1}u\, Dv + \frac{n(n-1)}{1.2} D^{n-2}u\ D^2 v + \ldots$$
$$\ldots + nDu\, D^{n-1}v + uD^n v;$$

ovvero, sostituendo ai D gli apici,

$$D^n(uv) = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1.2} u^{(n-2)}v'' \ldots\ldots + nu'v^{(n-1)} + uv^{(n)}$$

144. Corollario III. Mutando D in d passeremo dalla derivata di uv al differenziale, il quale avrà la forma seguente

$$d^n(uv) = vd^n u + nd^{n-1}udv + \frac{n(n-1)}{1.2} d^{n-2}ud^2 v \ldots + ndud^{n-1}v + ud^n v.$$

145. Corollario IV. Abbiasi $u = x^a$; sarà

$$u^{(n)} = a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)x^{a-n}$$

e quindi
$$u^{(n-1)} = a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+2)x^{a-n+1}$$
$$u^{(n-2)} = a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+3)x^{a-n+2}$$
$$u^{(n-3)} = a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+4)x^{a-n+3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

cosicchè dalla precedente equazione avremo

$$D^n(vx^a) = a(a-1)(a-2)\ldots\ldots(a-n+1)\, v\, x^{a-n}$$
$$+ \frac{n}{1} a(a-1)(a-2)\ldots\ldots(a-n+2)v'x^{a-n+1}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2} a(a-1)(a-2)\ldots\ldots(a-n+3)v''x^{a-n+2}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} a(a-1)(a-2)\ldots\ldots(a-n+4)v'''x^{a-n+3}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

Facendo successivamente $n = a,\ = a+1,\ = a+2, \ldots$ otterremo

$$D^a(vx^a) = a(a-1)(a-2)\ldots\ldots 2.1.v$$

$$+\frac{a}{1}a(a-1)(a-2)\ldots\ldots 3.2\,v'x$$

$$+\frac{a(a-1)}{1.2}a(a-1)(a-2)\ldots 4.3\,v''x^2$$

$$+\ldots\ldots$$

$$D^{a+1}(vx^a) = \frac{a+1}{1}a(a-1)(a-2)\ldots\ldots 2.1\,v'$$

$$+\frac{(a+1)a}{1.2}a(a-1)(a-2)\ldots 3.2\,v''x$$

$$+\ldots\ldots$$

$$D^{a+2}(vx^a) = \frac{(a+2)(a+1)}{1.2}a(a-1)(a-2)\ldots 2.1\,v''$$

$$+\frac{(a+2)(a+1)a}{1.2.3}a(a-1)(a-2)\ldots 3.2\,v'''x$$

$$+\ldots\ldots$$

$$D^{a+3}(vx^a) = \frac{(a+3)(a+2)(a+1)}{1.2.3}a(a-1)(a-2)\ldots 2.1\,v'''$$

$$+\frac{(a+3)(a+2)(a+1)a}{1.2.3.4}a(a-1)(a-2)\ldots 3.2\,v^{\text{IV}}x$$

$$+\ldots\ldots$$

XIV. Le derivate e i differenziali delle funzioni di funzioni.

146. Definizione. Dicesi *funzione di funzione* ogni funzione composta che risulta da più operazioni successive; la prima effettuata sulla variabile, e ciascuna delle altre sul risultato della operazione da cui è preceduta.

147. Principio I. Sia $y = fz$, $z = \varphi u$, $u = \psi t$, $t = \xi x$; x sia la variabile indipendente; sarà $y = f[\varphi(\psi(\xi x))] = Fx$ cioè y sarà funzione di funzione; rappresentando con $\Delta x = h$ l'accrescimento costante della variabile indipendente x, avremo

$$\Delta t = \Delta x(t'_x+\alpha),\ \Delta u = \Delta t(u'_t+\beta),\ \Delta z = \Delta u(z'_u+\gamma),\ \Delta y = \Delta z(y'_z+\delta)$$

moltiplicando queste equazioni fra loro, otterremo

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (y'_z+\delta)(z'_u+\gamma)(u'_t+\beta)(t'_x+\alpha) \tag{1}$$

Or se Δy è l'accrescimento che riceve la y per l'accrescimento Δz di z, il quale dipende unicamente dall'accrescimento Δx della x, è chiaro che Δy sarà uguale all'accrescimento che riceve Fx per lo stesso accrescimento Δx attribuito alla x; talchè avremo

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x)-Fx}{\Delta x} \tag{2}$$

dove Δx sarà costante perchè la x si suppone indipendente. Or se Δx ovvero h convergerà verso lo zero, anche Δt, quindi Δu, Δz, Δy, e per conseguenza α, β, γ, δ, convergeranno verso lo zero, talchè passando dall'equazione (1) all'equazione de' limiti, avremo

$$F'_x x = y'_z z'_u u'_t t'_x; \tag{3}$$

dunque *la derivata di* y *presa rapporto ad* x *è il prodotto di tutte le derivate delle funzioni da cui essa dipende ciascuna presa rapporto alla sua propria variabile.*

148. Scolio. Questo principio può usarsi e quando la x sarà indeterminata, nel qual caso t, u, z saranno pure indeterminate, e quando la x riceverà un valore particolare x_0, purchè (supponendo che t, u, v ricevano i valori particolari t_0, u_0, z_0) ξx sia funzione continua fra x_0 ed $x_0+\Delta x$, ψt continua fra t_0 e $t_0+\Delta t$, φu continua fra u_0 e $u_0+\Delta u$, ed fz ovvero y continua fra z_0 e $z_0+\Delta z$. Siffatto principio serve a determinare la derivata della funzione y rapporto alla variabile indipendente x, senza avere ricorso alle sostituzioni che dovremmo fare per ottenere la funzione Fx.

149. Principio II. In virtù del principio precedente sarà

$$z'_x = z'_u u'_t t'_x,$$

perlochè la (3) diverrà

$$y'_x = y'_z z'_x;$$

moltiplicando per dx

$$y'_x dx = y'_z z'_x dx;$$

ma $$y'_x dx = dy, \quad z'_x dx = dz,$$

perciò $$dy = y'_z dz; \tag{4}$$

dunque *il differenziale d' una funzione fz è uguale alla derivata di fz presa rapporto a z come se z fosse variabile indipendente.*

150. Corollario I. Il differenziale del primo ordine d'una funzione fx trovato nella ipotesi di x variabile indipendente può estendersi anche al caso in cui la x venga ad esprimere una funzione d'un'altra variabile.

151. Corollario II. Per lo stesso Principio II, si trova

$$dz = z'_u du, \quad du = u'_t dt, \quad dt = t'_x dx;$$

talchè risalendo per via di successive sostituzioni dalla ultima di queste equazioni alla (4), avremo

$$dy = y'_z z'_u du = y'_z z'_u u'_t dt = y'_z z'_u u'_t t'_x dx;$$

di questa guisa si riproduce l' equazione (3).

152. Scolio. I differenziali successivi di fz si otterranno differenziando successivamente il prodotto $f'zdz$ considerato come composto di due fattori variabili $f'z$ e dz; e sarà

$$\begin{aligned} d fz &= f'zdz, \\ d^2fz &= f''zdz^2 + f'z\, d^2z, \\ d^3fz &= f'''zdz^3 + 3f''zdzd^2z + f'd^3z; \\ &\ldots\ldots \end{aligned}$$

facendo $fz = u$, e mutando la z in x si vedrà che queste espressioni coincidono con quelle che già trovammo al n. 106.

XV. *Le derivate e i differenziali delle funzioni inverse.*

153. Definizione. Due funzioni si dicono *inverse* fra loro quando la variabile della prima di esse è uguale alla seconda funzione e viceversa.

154. Corollario I. Ad avere una funzione che sia la inversa d' una funzione data φx, dovremo porre l'equazione $\varphi x = y$;

l'espressione analitica che otterremo risolvendo questa equazione rapporto ad x, purchè si muti y in x, sarà la funzione inversa richiesta, perciò x^m e $\sqrt[m]{x}$ sono funzioni inverse; tali sono ancora a^x ed lx; sen x ed ar sen x.

155. Corollario II. Sia $y=\varphi x$; risolvendo questa equazione rapporto ad x avremo $x=\psi y$; φx e ψx saranno funzioni inverse; or se nella funzione φx si sostituisse ψy ad x avremmo y; perciò se nella funzione φx sostituiremo ψx ad x avremo x; dunque *due funzioni sono inverse quando ponendo una di esse nell' altra in luogo della variabile, il risultato sarà questa variabile stessa.*

156. Principio. Sia

$$d\varphi x=\varphi' x\, dx; \tag{1}$$

in questa equazione può la x convertirsi in una funzione qualunque (n. 149); sostituiscasi adunque ψy ad x (ψx essendo la funzione inversa a φx); φx si muterà in y per cui avremo

$$dy=\varphi' x\, d\psi y \quad \text{e} \quad \varphi' x\, \psi' y=1;$$

ora cambiando y in x, ψy e $\psi' y$ diventeranno ψx e $\psi' x$ cioè la funzione inversa di φx e la derivata della funzione inversa medesima; per cui risulterà

$$dx=\varphi' x d\psi x \qquad (2) \qquad\qquad \varphi' x\, \psi' x=1 \qquad (3)$$

si raccoglie da ciò che *il prodotto delle derivate di due funzioni inverse è uguale all' unità.*

157. Scolio. Le equazioni (2) e (3) potranno risolversi rispetto a $d\psi x$ ed a $\psi' x$; dunque dato il differenziale o la derivata di una funzione potremo immediatamente ottenere il differenziale o la derivata della funzione inversa.

158. Problema I. *Dato il differenziale di x^m dove m è intero trovare il differenziale di $\sqrt[m]{x}$.*

Poichè $dx^m=mx^{m-1}dx$ sostituendo $\sqrt[m]{x}$ ad x, avremo

$$dx=m\sqrt[m]{x^{m-1}}\,d\sqrt[m]{x}$$

$$d\sqrt[m]{x}=\frac{dx}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}}; \qquad D\sqrt[m]{x}=\frac{1}{m\sqrt[m]{x^{m-1}}}.$$

159. Scolio. Da ciò si vede che la regola

$$Dx^m=mx^{m-1}$$

ove fosse stabilita per m intero, potrebbe estendersi in virtù della dimostrazione precedente anche al caso di m fratto.

160. **Problema II.** *Dato il differenziale di* e^x *trovare il differenziale di* lx.

Poichè $de^x = e^x dx$, sostituendo lx ad x, avremo

$$dx = x dlx$$

$$dlx = \frac{dx}{x}; \quad Dlx = \frac{1}{x}.$$

161. **Problema III.** *Dato il differenziale di* sen x *trovare il differenziale di* ar sen x.

Siccome $d \operatorname{sen} x = \cos x dx$, sostituendo ar sen x ad x, avremo

$$dx = \cos \operatorname{ar} \operatorname{sen} x \, d \operatorname{ar} \operatorname{sen} x;$$

ma $\cos \operatorname{ar} \operatorname{sen} x = \sqrt{(1-x^2)}$, dunque

$$dx = \sqrt{(1-x^2)}\, d \operatorname{ar} \operatorname{sen} x;$$

$$d \operatorname{ar} \operatorname{sen} x = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \quad (4) \qquad D \operatorname{ar} \operatorname{sen} x = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}. \quad (5)$$

162. **Corollario.** I differenziali e le derivate di ar sen x superiori alla prima sono per modo complicate che difficilmente si scorge la legge secondo cui procedono; perciò ad avere lo sviluppo di ar sen x ci varremo del metodo seguente. Essendo

$$D \operatorname{ar} \operatorname{sen} x = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

sviluppando mediante la formula newtoniana del binomio, avremo

$$D \operatorname{ar} \operatorname{sen} x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \ldots; \qquad (6)$$

pongasi

$$\operatorname{ar} \operatorname{sen} x = A + Mx^m + Nx^n + Px^p + Qx^q + \ldots; \qquad (7)$$

sarà

$$D \operatorname{ar} \operatorname{sen} x = mMx^{m-1} + nNx^{n-1} + pPx^{p-1} + qQx^{q-1} + \ldots;$$

e poichè questa derivata è forza che sia identica alla derivata (6), avremo

$$m-1=0,\; n-1=2,\; p-1=4,\; q-1=6, \ldots\ldots$$

$$mM=1, \quad nN=\frac{1}{2}, \quad pP=\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}, \quad qQ=\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \ldots\ldots$$

donde si ha

$$m=1,\ n=3,\ p=5,\ q=7,\ \ldots.$$

$$M=1,\ N=\frac{1}{2.3},\ P=\frac{1.3}{2.4.5},\ Q=\frac{1.3.5}{2.4.6.7},\ldots;$$

resta indeterminata la A; ma poichè si dee supporre che ar cos x sia il più piccolo arco avente per seno x, perciò facendo $x=0$ risulterà ar sen $x=0$; dunque $A=0$; quindi

$$\text{ar sen}\,x=\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{x^7}{7}+\ldots.. \quad (8)$$

163. Problema IV. *Dato il differenziale di* cos x *trovare il differenziale di* ar cos x.

Poichè $d\cos x=-\text{sen}\,xdx$, sostituendo ar cos x ad x sarà

$$dx=-\text{sen ar cos}\,xd\,\text{ar cos}\,x;$$

ma
$$\text{sen ar cos}\,x=\sqrt{(1-x^2)},$$

dunque
$$dx=-\sqrt{(1-x^2)}d\,\text{ar cos}\,x,$$

$$d\,\text{ar cos}\,x=-\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \quad (9) \qquad D\,\text{ar cos}\,x=-\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} \quad (10)$$

164. Problema V. *Dato il differenziale di* tang x *trovare il differenziale di* ar tang x.

Poichè $d\,\text{tang}\,x=\frac{dx}{\cos^2x}$, sostituendo ar tang$x$ ad x, avremo

$$dx=\frac{d\,\text{ar tang}\,x}{\cos^2\text{ar tang}\,x};$$

ma
$$\cos^2a=\frac{1}{1+\text{tang}^2a},\quad \cos^2\text{ar tang}\,x=\frac{1}{1+x^2},$$

dunque
$$dx=(1+x^2)d\,\text{ar tang}\,x,$$

$$d\,\text{ar tang}\,x=\frac{dx}{1+x^2} \quad (11) \qquad D\,\text{ar tang}\,x=\frac{1}{1+x^2} \quad (12)$$

165. Corollario. I differenziali e le derivate successive di ar tang x si complicano a misura che s'inalza il loro ordine; perciò all'oggetto di sviluppare la funzione ar tang x secondo le potenze di x avremo ricorso ad un metodo analogo a quello che abbiamo usato di sopra per sviluppare ar sen x. Essendo

$$D\,\text{ar tang}\,x=(1+x^2)^{-1},$$

sviluppando mediante la formula newtoniana del binomio, avremo

$$D \operatorname{ar tang} x = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots\ ; \quad (13)$$

pongasi

$$\operatorname{ar tang} x = A + Mx^m + Nx^n + Px^p + Qx^q + \ \ldots\ ; \quad (14)$$

sarà

$$D \operatorname{ar tang} x = mMx^{m-1} + nNx^{n-1} + pPx^{p-1} + qQx^{q-1} + \ldots\ ;$$

ma questa derivata dee necessariamente essere identica alla derivata (13), dunque

$$m-1=0,\ n-1=2,\ p-1=4,\ q-1=6,\ \ldots$$
$$mM=1,\ nN=-1,\ pP=1,\ qQ=-1,\ \ldots$$

donde si ha

$$m=1,\ n=3,\ p=5,\ q=7,\ \ldots.$$
$$M=1,\ N=-\frac{1}{3},\ \ P=\frac{1}{5},\ \ Q=-\frac{1}{7},\ \ldots;$$

inoltre $A=0$, perchè facendo $x=0$, supponendosi che ar tang x sia il più piccolo arco avente per tangente x, è forza che abbiasi ar tang $x=0$; dunque

$$\operatorname{ar tang} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots. \quad (15)$$

166. Problema VI. *Dato il differenziale di* cot x *trovare il differenziale di* ar cot x.

Poichè $d \cos x = -\dfrac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}$, sostituendo ar cos x ad x, sarà

$$dx = -\frac{d \operatorname{ar cot} x}{\operatorname{sen}^2 \operatorname{ar cot} x};$$

ma $\qquad \operatorname{sen}^2 a = \dfrac{1}{1+\cot^2 a}, \quad \operatorname{sen}^2 \operatorname{ar cot} x = \dfrac{1}{1+x^2},$

dunque $\qquad dx = -(1+x^2) d \operatorname{ar cot} x,$

$$d \operatorname{ar cot} x = -\frac{dx}{1+x^2} \quad (16) \qquad D \operatorname{ar cot} x = -\frac{1}{1+x^2} \quad (17)$$

XVI. *I differenziali delle funzioni di più variabili.*

167. Lemma. Sia $u = f(x, y, z, \ldots)$ una funzione di più variabili indipendenti $x, y, z \ldots$; supponiamo che per gli accrescimenti Δx, Δy, $\Delta z, \ldots$ delle medesime variabili $x, y, z, \ldots$ la funzione $f(x, y, z, \ldots)$ riceva l' accrescimento Δu; avremo

$$\Delta u = f(x + \Delta y\,,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z, \ldots) - f(x,\ y\,,\ z\,, \ldots);$$

or siffatta espressione può trasformarsi nella seguente

$$\begin{aligned}\Delta u = {} & f(x + \Delta x,\ y,\ z, \ldots) - f(x,\ y,\ z, \ldots) \\ & + f(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z\,, \ldots) - f(x + \Delta x,\ y,\ z, \ldots.) \\ & + f(x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z, \ldots) - f(x + \Delta x,\ y + \Delta y, z, \ldots) \\ & + \ldots\ldots\end{aligned}$$

sotto questa forma Δu non è che la somma di tante differenze o accrescimenti parziali quante sono le variabili $x, y, z, \ldots$; il primo è un accrescimento della funzione $f(x, y, z \ldots)$ il quale dipende dall'accrescimento della x; lo indicheremo in questa guisa $\Delta_x f(x, y, z, \ldots)$; il secondo è un accrescimento della funzione $f(x + \Delta x, y + \Delta y, z, \ldots)$; il quale dipende dall' accrescimento della y, e perciò lo indicheremo in questa guisa $\Delta_y f(x + \Delta x, y\,, z \ldots)$; e così via discorrendo; talchè sarà

$$\begin{aligned}\Delta u = {} & \Delta_x f(x,\ y,\ z, \ldots) \\ & + \Delta_y f(x + \Delta x, y, z, \ldots) \qquad (1) \\ & + \Delta_z f(x + \Delta x, y + \Delta y,\ z,\ \ldots) \\ & + \ldots\ldots\end{aligned}$$

Di qui si raccoglie che l' accrescimento completo Δu risultante dagli accrescimenti simultanei Δx, Δy, $\Delta z, \ldots$ risulterà tanto più piccolo quanto più piccoli saranno gli n accrescimenti parziali

$$\Delta_x f(x,\ y,\ z \ldots),\ \Delta_y f(x + \Delta x,\ y,\ z \ldots),\ \Delta_z f(x + \Delta x,\ y + \Delta y, z \ldots), \ldots$$

e che esso convergerà verso lo zero se gli accrescimenti medesimi

convergeranno a un tempo verso lo zero; le quali condizioni sono appunto quelle che si esigono acciocchè $f(x, y, z, \ldots)$ sia funzione compiutamente continua rapporto a tutte le variabili da cui dipende. Ma se la funzione $f(x, y, z, \ldots)$ sarà parzialmente continua rispetto ad $x, y, z, \ldots$ gli accrescimenti

$$\Delta_x f(x, y, z, \ldots), \; \Delta_y f(x + \Delta x, y, z, \ldots), \; \Delta_z f(x + \Delta x, y + \Delta y, z, \ldots),$$

convergeranno verso lo zero in pari tempo di $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$ e si annulleranno in pari tempo di queste quantità, dunque *una funzione di più variabili sarà continua rapporto a tutte le variabili stesse considerate in istato di simultaneo accrescimento, quando sarà continua parzialmente rispetto a ciascuna di esse.*

168. **Principio I.** Rappresentino $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ delle quantità capaci di convergere verso lo zero con Δx; $\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots$ delle quantità capaci di convergere verso lo zero con Δy; $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ delle quantità capaci di convergere verso lo zero con Δz; e così di seguito: in virtù della equazione (3) n. 55, sarà

$$\Delta fx = \Delta x f'x + \lambda \Delta x\,;$$

sicchè potremo trasformare l'espressione (1) di Δu nella seguente

$$\begin{aligned}
\Delta u = {} & \Delta x\, f'_x(x, y, z, \ldots) + \alpha \Delta x \\
& + \Delta y\, f'_y(x + \Delta x, y, z, \ldots) + \beta \Delta y \\
& + \Delta z\, f'_z(x + \Delta x, y + \Delta y, z, \ldots) + \gamma \Delta z \\
& + \ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ma poichè $f(x + \Delta x) = fx + \varepsilon$ (dove ε si suppone che sia una quantità capace di convergere verso lo zero con Δx), perciò

$$\begin{aligned}
f'_y(x + \Delta x, y, z, \ldots) &= f'_y(x, y, z, \ldots) + \alpha_1 \\
f'_z(x + \Delta x, y, z, \ldots) &= f'_z(x, y, z, \ldots) + \alpha_2 \\
f'_z(x + \Delta x, y + \Delta y, z, \ldots) &= f'_z(x, y + \Delta y, z, \ldots) + \alpha_3 \\
&= f'_z(x, y, z, \ldots) + \beta_1 + \alpha_3
\end{aligned}$$

e così di seguito; ragione per cui avremo

$$\begin{aligned}
\Delta u = {} & \Delta x\, f'_x(x, y, z, \ldots) + \alpha\, \Delta x \\
& + \Delta y\, f'_y(x, y, z, \ldots) + \alpha_1 \Delta y + \beta \Delta y \\
& + \Delta z\, f'_z(x, y, z, \ldots) + \beta_1 \Delta z + \alpha_3\, \Delta z + \gamma \Delta z \\
& + \ldots\ldots
\end{aligned}$$

ovvero

$\Delta u = \Delta x f'_x(x, y, z, \ldots) + \Delta y f'_y(x, y, z, \ldots) + \Delta z f'_z(x, y, z, \ldots) + \omega$

dove ω indicherà una quantità capace di convergere verso lo zero tostochè Δx, Δy, $\Delta z, \ldots$ convergano insieme verso questo limite. Siffatta equazione potrà scriversi più brevemente così

$$\Delta u = u'_x \Delta x + u'_y \Delta y + u'_z \Delta z \ldots . + \omega. \tag{2}$$

Ora, poichè x, y, $z, \ldots$ sono indipendenti fra loro, Δx, Δy, $\Delta z, \ldots$ si possono mutare in dx, dy, $dz, \ldots$ (n. 96); perciò

$$\Delta u = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz \ldots . + \omega; \tag{3}$$

ma $$u'_x dx = d_x u,\ u'_y dy = d_y u,\ u'_z dz = d_z u, \ldots . \tag{4}$$

dunque $$\Delta u = d_x u + d_y u + d_z u \ldots + \omega \tag{5}$$

dunque *l'accrescimento della funzione corrispondente agli accrescimenti simultanei* Δx, Δy, $\Delta z, \ldots$ *delle variabili* x, y, $z, \ldots$ *è uguale alla somma de'differenziali parziali di questa funzione presi di mano in mano rapporto a ciascuna di quelle variabili, più una quantità capace di convergere verso lo zero con* Δx, Δy, $\Delta z, \ldots$

169. Corollario I. La somma dei differenziali parziali di una funzione u suol chiamarsi *differenziale completo* di questa funzione e designarsi colla caratteristica du. Talchè sarà

$$du = d_x u + d_y u + d_z u + \ldots$$

ovvero $$du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz + \ldots; \tag{6}$$

quindi l'equazione (5) si ridurrà alla seguente

$$\Delta u = du + \omega,$$

e sotto tal forma coinciderà col principio stabilito al n. 100; dunque *l'accrescimento d'una funzione di qualsivoglia numero di variabili dee riputarsi uguale al suo differenziale più una quantità capace di convergere verso lo zero quando gli accrescimenti attribuiti alle variabili stesse convergono insieme verso questo limite.*

170. Corollario II. Se le variabili x, y, $z, \ldots$ in luogo di essere indipendenti fra loro fossero dipendenti da una variabile t, e si avesse

$$x = \varphi t,\ y = \psi t,\ z = \chi t, \ldots$$

la u sarebbe funzione di t anch'essa, cioè avremmo

$$u = f(\varphi t,\ \psi t,\ \chi t, \ldots),$$

ed in tal caso Δx, Δy, $\Delta z, \ldots$ non essendo accrescimenti arbitrari costanti, come il sono nel caso in cui le variabili si reputano indipendenti, non potranno cambiarsi in dx, dy, $dz, \ldots$; infatti sarà

$$\Delta x = \Delta t(\varphi' t + \lambda),\ \Delta y = \Delta t(\psi' t + \lambda_1),\ \Delta z = \Delta t(\chi' t + \lambda_2), \ldots \quad (7)$$

λ, λ_1, $\lambda_2, \ldots$ essendo quantità capaci di convergere verso lo zero in pari tempo di Δt; per cui l'equazione (2) diverrà

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = u'_x(\varphi' t + \lambda) + u'_y(\psi' t + \lambda_1) + u'_z(\chi' t + \lambda_2) + \ldots \quad (8)$$

Ora se α, α_1, $\alpha_2, \ldots$ convergono verso lo zero in pari tempo di Δx fatta la sostituzione del valore di Δx [eq. (7)] queste quantità convergeranno verso lo zero a misura che convergerà verso lo zero Δt; se β, β_1, $\beta_2, \ldots$ convergono verso lo zero in pari tempo di Δy fatta la sostituzione del valore di Δy tali quantità convergeranno verso lo zero con Δt; lo stesso dicasi di γ, γ_1, $\gamma_2, \ldots$ ec.; se adunque ω, λ, λ_1, λ_2, $\lambda_3, \ldots$ convergono come supponiamo verso lo zero quando convergono a un tempo verso lo zero Δx, Δy, $\Delta z, \ldots$ fatta la sostituzione de' valori (7) dovranno le quantità ω, λ, λ_1, λ_2, $\lambda_3 \ldots$ convergere a un tempo verso lo zero con Δt. Dunque passando dall'equazione (8) a' limiti, sarà

$$\frac{du}{dt} = u'_x \varphi' t + u'_y \psi' t + u'_z \chi' t + \ldots \quad (9)$$

e quindi $\quad du = u'_x \varphi' t dt + u'_y \psi' t dt + u'_z \chi' t dt + \ldots$

ma $\quad \varphi' t dt = dx,\ \psi' t dt = dy,\ \chi' t dt = dz, \ldots \quad (10)$

dunque $\quad du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz + \ldots .$

la quale è identica alla equazione (6).

Di qui s'inferisce che l'equazione (6) ha luogo nel caso in cui x, y, $z, \ldots$ sieno variabili indipendenti, e nel caso altresì in cui ciascuna di esse sia funzione di una variabile t. Non dobbiamo per altro scordare che allorquando x, y, $z, \ldots$ sono variabili indipendenti, i differenziali dx, dy, $dz, \ldots$ essendo respettivamente identici agli accrescimenti Δx, Δy, $\Delta z, \ldots$. sono quantità costanti capaci di ricevere qualunque valore, mentre nell'altro caso dx, dy, $dz, \ldots$ sono quantità variabili i cui valori

espressi da $\varphi' t dt$, $\psi' t dt$, $\chi' t dt, \ldots$ dipendono dal valore di t. Oltredichè quando si tratta di variabili indipendenti l'equazione (6) è il risultato d'una definizione, mentre nell'altro caso essa è un teorema il quale esige che si dimostri essere la somma di tutti i differenziali parziali di $f(x, y, z, \ldots)$ dopo aver sostituito φt ad x, ψt ad y, χt a $z \ldots.$ identica al differenziale di $f(\varphi t, \psi t, \chi t, \ldots)$. Da ciò si vede che la definizione del differenziale d'una funzione di più variabili si accorda perfettamente colla definizione del differenziale d'una variabile sola.

171. Corollario III. Sia fx una funzione composta, cioè una funzione che risulti dalla combinazione di più funzioni $\varphi x, \psi x, \chi x, \ldots$, sarà

$$fx = f(\varphi x, \psi x, \chi x, \ldots);$$

facendo
$$\varphi x = y, \ \psi x = z, \ \chi x = t, \ldots$$

questa funzione diverrà

$$fx = f(y, z, t, \ldots) = u$$

quindi più facilmente potremo averne il differenziale e la derivata; il differenziale sarà (n. 169),

$$du = u'_y dy + u'_z dz + u'_t dt + \ldots; \tag{11}$$

ad avere il differenziale medesimo espresso in x basterà sostituire $\varphi x, \psi x, \chi x \ldots$ ad $y, z, t \ldots$ ed $\varphi' x dx$, $\psi' x dx$, $\chi' x dx \ldots$ a dy, dz, $dt, \ldots$

Dividendo poi l'equazione (11) per dx, avremo la derivata di fx, cioè

$$f'x = u'_y \varphi' x + u'_z \psi' x + u'_t \chi' t + \ldots; \tag{12}$$

concluderemo frattanto che *il differenziale o la derivata d'una funzione composta è la somma dei differenziali o delle derivate relative a ciascuna di esse considerate come indipendenti fra loro.*

Per questa regola si ritrovano agevolmente tutti i principj che dimostrammo rispetto alle funzioni composte. Sieno y, z, $t, \ldots$ tutte funzioni della x; in virtù della sola regola precedente avremo

$$d(y + z + t + \ldots) = dy + dz + dt + \ldots$$
$$d^n(y + z + t + \ldots) = d^n y + d^n z + d^n t + \ldots$$

$$d^n Ay = Ad^n y$$

$$d\frac{y}{z} = \frac{zdy - ydz}{z^2}$$

$$dy^z = y^{z-1}(zdy + yl ydz)$$

$$dy^y = (1 + ly)y^y dy.$$

172. Corollario IV. Se le variabili x, y, z, ... fossero tra loro legate mediante una equazione $v = 0$, una di esse variabili non sarebbe altrimenti indipendente, ma sarebbe funzione di tutte le altre; infatti risolvendo l' equazione $v = 0$ rapporto ad una delle variabili stesse, per esempio rapporto alla x, avremo

$$x = \varphi(y,\ z,\ \ldots),$$

e l' equazione $u = f(x,\ y,\ z,\ \ldots)$ si cangerà nella seguente

$$u = f[\varphi(y,\ z,\ \ldots),\ y,\ z,\ \ldots] = \xi(y,\ z,\ \ldots);$$

per lo chè sarà

$$du = \xi'_y dy + \xi'_z dz + \ldots\ldots$$

Qui la derivata parziale ξ'_y non è altro che la derivata parziale di u presa nella ipotesi che la y sia sola variabile, ma x è funzione di y, dunque in virtù del Corollario precedente avremo

$$\xi'_y = u'_x x'_y + u'_y;$$

parimente poichè x è funzione di z, sarà

$$\xi'_z = u'_x x'_z + u'_z,$$

e così di seguito; sostituendo otterremo

$$du = u'_x(x'_y dy + x'_z dz + \ldots) + u'_y dy + u'_z dz + \ldots\ldots;$$

ma essendo y, z, ... indipendenti fra loro, abbiamo

$$x'_y dy + x'_z dz + \ldots = dx$$

dunque $$du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz \ldots$$

equazione identica alla (6).

Se le variabili x, y, z, t .... fossero legate fra loro mediante due equazioni $v = 0$, $w = 0$ due di esse variabili, non sarebbero altrimenti indipendenti, ma sarebbero funzioni di tutte le altre: infatti dalle equazioni $v = 0$, $w = 0$ avremo mediante l' eliminazione,

$$x = \varphi(z, t, \ldots), \quad y = \psi(z, t, \ldots),$$

per cui l' equazione $u = f(x, z, t, \ldots)$ si cangerà nella seguente

$$u = f[\varphi(z, t, \ldots), \psi(z, t, \ldots), z, t, \ldots] = \xi(z, t, \ldots)$$

e sarà $$du = \xi'_z dz + \xi'_t dt + \ldots .$$

Ora ξ'_z è la derivata parziale di ξ presa rapporto a z, ovvero la derivata parziale della funzione u presa nella ipotesi che z sia sola variabile; ma x ed y sono funzioni di z, dunque prendendo la derivata di u nell' ipotesi di z variabile dovremo considerare come variabili e funzioni di z anche x ed y, talchè avremo

$$\xi'_z = u'_x x'_z + u'_y y'_z + u'_z;$$

parimente osservando che x ed y sono pure funzioni di t, avremo

$$\xi'_t = u'_x x'_t + u'_y y'_t + u'_t;$$

e così di seguito. Dunque

$$\begin{aligned} du = {} & u'_x(x'_z dz + x'_t dt + \ldots) \\ & + u'_y(y'_z dz + y'_t dt + \ldots) \\ & + u'_z dz + u'_t dt + \ldots \end{aligned}$$

ma $$x'_z dz + x'_t dt + \ldots = dx, \quad y'_z dz + y'_t dt + \ldots = dt, \ldots$$

perciò

$$du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz + \ldots$$

identica alla equazione (6).

Lo stesso avverrebbe se le n variabili fossero legate fra loro mediante 3, 4, 5 ... $n-1$ equazioni (n. 6), cioè per siffatta restrizione non si altererebbe la forma della equazione (6).

173. Corollario V. Per ultimo abbiasi

$$x = \varphi(v, w, \ldots), \; y = \psi(v, w, \ldots), \; z = \chi(v, w, \ldots), \ldots$$

sarà

$$u = f[\varphi(v, w, \ldots), \psi(v, w, \ldots) \ldots] = \xi(v, w, \ldots)$$

e quindi

$$du = \xi'_v dv + \xi'_w dw + \ldots\ldots$$

Ora ξ'_v non è altro che la derivata della funzione proposta $u = f(x, y, z, \ldots)$ presa nella supposizione di v sola variabile, sicchè $x, y, z \ldots$ debbono riputarsi funzioni della sola v; laonde avremo

$$\xi'_v = u'_x x'_v + u'_y y'_v + u'_z z'_v + \ldots;$$

per la stessa ragione sarà

$$\xi'_w = u'_x x'_w + u'_y y'_w + u'_z z'_w + \ldots.$$

e così di seguito. Sostituendo queste espressioni nella equazione precedente otterremo

$$\begin{aligned} du = {} & u'_x(x'_v dv + x'_w dw + \ldots) \\ & + u'_y(y'_v dv + y'_w dw + \ldots) \\ & + u'_z(z'_v dv + z'_w dw + \ldots) \\ & + \ldots \end{aligned}$$

ma

$$\begin{aligned} x'_v dv + x'_w dw + \ldots &= dx, \\ y'_v dv + y'_w dw + \ldots &= dy, \\ z'_v dv + z'_w dw + \ldots &= dz, \\ \ldots\ldots & \end{aligned}$$

perciò

$$du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz + \ldots;$$

questa equazione coincide colla equazione (6); dunque il differenziale della funzione u sarà uguale alla somma dei differenziali parziali di questa funzione presi rispetto a ciascuna variabile ove anche queste variabili sieno tutte funzioni di altre variabili indipendenti.

Può adunque concludersi che *il differenziale del prim' ordine di* u *conserva sempre la forma indicata dall' equazione* (6) *qualunque sia la dipendenza che le variabili possono avere fra loro, o con altre variabili.*

XVII. I differenziali successivi delle funzioni di più variabili.

174. Teorema. *Un differenziale parziale di qualunque ordine non muta invertendo in qualsivoglia modo le differenziazioni da cui esso risulta.*

Abbiasi una funzione $u = f(x, y, z, \ldots)$ di qualunque numero di variabili, supponiamo che $x, y, \ldots$ ricevano respettivamente gli accrescimenti $h, k, \ldots$; incominciando dall'attribuire ad x l'accrescimento h, avremo [n. 87 eq. (8)]

$$f(x+h, y, z, \ldots) = f(x, y, z, \ldots) + hf'_x(x+\alpha, y, z, \ldots);$$

quindi attribuendo ad y l'accrescimento k, sarà

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k, z, \ldots) &= f(x, y+k, z, \ldots) + hf'_x(x+\alpha, y+k, z, \ldots) \\ &= f(x, y, z, \ldots) + kf'_y(x, y+\beta, z, \ldots) \\ &+ h[f'_x(x+\alpha, y, z, \ldots) + kf''_{xy}(x+\alpha, y+\beta_1, z, \ldots)] \quad (1) \end{aligned}$$

Se in luogo di cominciare questo calcolo dalla x si comincerà dalla y cui è dovuto l'accrescimento k, avremo

$$f(x, y+k, z, \ldots) = f(x, y, z, \ldots) + kf'_y(x, y+\beta, z, \ldots);$$

e quindi, attribuendo ad x l'accrescimento h,

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k, z, \ldots) &= f(x+h, y, z, \ldots) + kf'_y(x+h, y+\beta, z, \ldots) \\ &= f(x, y, z, \ldots) + hf'_x(x+\alpha, z, y, \ldots) \\ &+ k[f'_y(x, y+\beta, z, \ldots) + hf''_{yx}(x+\alpha_1, y+\beta, z, \ldots] \quad (2) \end{aligned}$$

Ora uguagliando le espressioni dello stato variato della funzione, e sopprimendo i termini comuni, avremo

$$f''_{xy}(x+\alpha, y+\beta_1, z, \ldots) = f''_{yx}(x+\alpha_1, y+\beta, z, \ldots)$$

e poichè $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ convergono verso lo zero in pari tempo di h e k, perciò passando alla equazione de' limiti sarà

$$f''_{xy}(x, y, z, \ldots) = f''_{yx}(x, y, z, \ldots).$$

Moltiplicando per dx e dy avremo pure

$$dyD_y[D_x f(x, y, z, \ldots)dx] = dxD_x[D_y f(x, y, z, \ldots)dy]$$

cioè (n. 91) $d^2_{xy} f(x, y, z, \ldots) = d^2_{yx} f(x, y, z, \ldots);$

il qual risultato può altresì esprimersi in questa guisa

$$d_y d_x u = d_x d_y u.$$

Ciò posto abbiasi un differenziale qualunque; per esempio

$$d_s d_t d_z d_y d_x u$$

risultante da cinque differenziazioni; prendiamo a dimostrare che invertendo una di queste con quella che immediatamente la segue o che immediatamente la precede il differenziale non muta. Un differenziale siffatto, giova ricordarlo, ci avverte che dopo avere differenziata la funzione u rapporto ad x, il risultato dee differenziarsi rapporto ad y, quindi rapporto a z, quindi rapporto a t, per ultimo rapporto ad s. Or dopo avere differenziata la funzione u rapporto ad x, rispetto alle differenziazioni susseguenti relative ad y ed a z potremo tenere quell' ordine che più piace; conseguentemente sarà

$$d_z d_y d_x u = d_y d_z d_x u;$$

quindi differenziando da ambedue le parti rapporto a t e ad s, otterremo

$$d_s d_t d_z d_y d_x u = d_s d_t d_y d_z d_x u; \tag{3}$$

parimente dopo avere differenziata la funzione rapporto ad x e ad y, le differenziazioni susseguenti rapporto a z ed a t possono farsi in quell' ordine che si vuole; perciò sarà

$$d_t d_z d_y d_x u = d_z d_t d_y d_x u;$$

e quindi differenziando da ambedue le parti rapporto ad s, avremo

$$d_s d_t d_z d_y d_x u = d_s d_z d_t d_y d_x u; \tag{4}$$

frattanto dalle equazioni (3) e (4) apparisce che la differenziazione della funzione rapporto a z può farsi prima della differenziazione rapporto ad y o dopo la differenziazione rapporto a t.

Or se il differenziale di u non muta quando una delle differenziazioni da cui esso risulta, quella per esempio rapporto a z, la quale supporremo che sia la differenziazione n^{ma}, s' inverte con quella che immediatamente la segue o che immediatamente la precede, si può conchiudere che la differenziazione medesima rapporto a z potrà di mano in mano diventare la $(n+1)^{sima}$, la

$(n+2)^{sima}$,... oppure la $(n-1)^{sima}$, la $(n-2)^{sima}$,... cioè potrà invertirsi con una qualunque delle altre; ma lo stesso può dirsi delle differenziazioni relative alle altre variabili; dunque invertendo in qualsivoglia modo le differenziazioni il differenziale non muta.

175. Scolio I. Sia $u=f(x, y, z)$; se x, y, z saranno variabili indipendenti, dx, dy, dz... dovranno riputarsi costanti; talchè avremo (n. 91 e 110)

$$d_x f(x, y, z) = f'_x(x, y, z)dx,$$

$$d^2_{xy} f(x, y, z) = dx\, d_y f'_x(x, y, z) = f''_{xy}(x, y, z)dxdy,$$

$$d^3_{xyz} f(x, y, z) = dxdyd_z f''_{xy}(x, y, z) = f'''_{xyz}(x, y, z)\, dxdydz\,;$$

dunque assoggettando la funzione $f(x, y, z)$ ad m differenziazioni rapporto a x, n differenziazioni rapporto ad y, p differenziazioni rapporto a z, il differenziale risultante sarà uguale alla derivata della funzione $f(x, y, z)$ presa m volte rapporto ad x, n volte rapporto ad y, p volte rapporto a z, moltiplicato pei fattori costanti dx^m, dy^n, dz^p. Avremo adunque

$$d^{m+n+p}_{mx,\,ny\cdot pz} f(x, y, z) = D^{m+n+p}_{mx\,.ny\,.pz} f(x, y, z)dx^m dy^n dz^p. \tag{5}$$

Siffatto differenziale potrebbe pure indicarsi in questa guisa

$$d^p_z\ d^n_y\ d^m_x\ u,$$

e la derivata così

$$D^p_z\ D^n_y\ D^m_x\ u.$$

Or poichè
$$D^m_x u = \frac{d^m u}{dx^m},$$

sarà
$$D^n_y\ D^m_x u = \frac{1}{dy^n} d^n \frac{d^m u}{dx^m}$$

$$D^p_z\ D^n_y\ D^m_x u = \frac{1}{dz^p} d^p \frac{1}{dy^n} d^n \frac{d^m u}{dx^m};$$

ma dx, dy, dz si suppongono costanti, perciò

$$D^p_z\ D^n_y\ D^m_x\ u = \frac{d^{m+n+p} u}{dx^m\, dy^n\, dz^p};$$

questa pure è una espressione che potrà usarsi per indicare la derivata parziale di u presa m volte rapporto ad x, n volte rapporto ad y, e p volte rapporto a z.

176. Scolio II. Essendo il differenziale primo della funzione $u=f(x, y, z)$ dato dalla espressione

$$du = d_x u + d_y u + d_z u; \tag{6}$$

differenziando questa espressione medesima rapporto ad x, rapporto ad y, e rapporto a z avremo il differenziale secondo della funzione u; il quale sarà

$$d^2u = \overset{2}{d}_x u + \overset{2}{d}_y u + \overset{2}{d}_z u + 2\overset{2}{d}_{xy} u + 2\overset{2}{d}_{xz} u + 2\overset{2}{d}_{yz} u; \tag{7}$$

differenziando nuovamente avremo il differenziale terzo, e sarà

$$d^3u = \overset{3}{d}_x u + \overset{3}{d}_y u + \overset{3}{d}_z u + 3\overset{3}{d}_{x,2y} u + 3\overset{3}{d}_{x,2z} u$$

$$+ 3\overset{3}{d}_{2x,y} u + 3\overset{3}{d}_{2x,z} u + 3\overset{3}{d}_{2y,z} u + 3\overset{3}{d}_{y,2z} u + 6\overset{3}{d}_{xyz} u. \tag{8}$$

In queste equazioni le differenziazioni sono enunciate dalla caratteristica d; allorquando queste differenziazioni dovranno veramente eseguirsi sarà necessario sapere se le variabili x, y, z sieno indipendenti o funzioni di altre variabili. Nel primo caso dx, dy, dz essendo costanti, avremo

$$du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} d^2u = {} & u''_x dx^2 + u''_y dy^2 + u''_z dz^2 \\ & + 2u''_{xy} dxdy + 2u''_{xz} dxdz + 2u''_{yz} dydz, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} d^3u = {} & u'''_x dx^3 + u'''_y dy^3 + u'''_z dz^3 + 3u'''_{2x.y} dx^2dy + 3u'''_{2x,z} dx^2dz \\ & + 3u'''_{x.2y} dxdy^2 + 3u'''_{x,2z} dxdz^2 + 3u'''_{2y,z} dy^2dz \\ & + 3u'''_{y,2z} dydz^2 + 6u'''_{xyz} dxdydz, \end{aligned} \tag{11}$$

e cosi di seguito.

Nel secondo caso dx, dy, dz saranno variabili, l' equazione (9) come sappiamo non muterà (n. 150), ma alla equazione (10) dovremo sostituire la seguente

$$d^2u = u''_x dx^2 + u''_y dy^2 + u''_z dz^2 + 2u''_{xy} dxdy + 2u''_{xz} dxdz + 2u''_{yz} dydz$$

$$+ u'd^2x + u'd^2y + u'd^2z;$$

e differenziando questa nella supposizione di dx, dy, dz variabili

avremo quella espressione del differenziale terzo che dee sostituirsi alla (11), e così via discorrendo. Le equazioni (9), (10), (11) si scrivono talora nel seguente modo;

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz\,;$$

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2u}{dz^2}dz^2$$

$$+ 2\frac{d^2u}{dxdy}dxdy + 2\frac{d^2u}{dxdz}dxdz + 2\frac{d^2u}{dydz}dydz\,;$$

$$d^3u = \frac{d^3u}{dx^3}dx^3 + \frac{d^3u}{dy^3}dy^3 + \frac{d^3u}{dz^3}dz^3$$

$$+ 3\frac{d^3u}{dx^2dy}dx^2dy + 3\frac{d^3u}{dx^2dz}dx^2dz + 3\frac{d^3u}{dxdy^2}dxdy^2$$

$$+ 3\frac{d^3u}{dxdz^2}dxdz^2 + 3\frac{d^3u}{dy^2dz}dy^2dz + 3\frac{d^3u}{dydz^2}dydz^2 + 6\frac{d^3u}{dxdydz}dxdydz.$$

177. Scolio III. L'equazione

$$du = d_x u + d_y u + d_z u + \ldots.$$

esprime ad un tempo il differenziale di una funzione u delle variabili x, y, $z\ldots$ e il differenziale del prodotto u dei fattori x, y, $z\ldots$; può adunque dirsi lo stesso della equazione simbolica

$$du = (d_x + d_y + d_z + \ldots)\,u; \tag{12}$$

e poichè questa osservazione può pure estendersi ai differenziali degli ordini superiori, perciò l'equazione simbolica (12) conduce immediatamenle alla seguente

$$d^n u = (d_x + d_y + d_z + \ldots)^n u;$$

tal formula rappresenta il differenziale n^{mo} della funzione u. Conseguentemente la formula

$$\frac{1.2\ldots n d^{a+b\cdots+i}_{ax, by, \ldots it}\, u}{1.2..a \times 1.2..b \times 1.2..c \times \ldots 1.2..i},$$

la quale si deduce dalla formula (10) del n. 142 cambiando p in u ed u, v, w, ... in x, y, z,... esprimerà il termine generale del differenziale n^{mo} d'una funzione u delle variabili $x, y, z\ldots t$.

XVIII. I differenziali delle funzioni identiche di più variabili.

178. **Definizione.** Due funzioni di più variabili si diranno identiche fra loro allorquando saranno parzialmente identiche rispetto a ciascuna delle variabili stesse.

179. **Teorema I.** *Se due funzioni* $\varphi(x, y, z, \ldots)$, $\psi(x, y, z, \ldots)$ *sono identiche, le loro derivate parziali del medesimo ordine prese rispetto alle medesime variabili saranno pure identiche; identici saranno ancora i loro differenziali parziali e i loro differenziali completi.*

In virtù del Teorema I, n. 85, sarà

$$\varphi'_x(x, y, z, \ldots) \equiv \psi'_x(x, y, z \ldots), \quad \varphi'_y(x, y, z, \ldots) \equiv \psi'_y(x, y, z, \ldots), \text{ ec.} \quad (1)$$

$$\varphi''_x(x, y, z, \ldots) \equiv \psi''_x(x, y, z, \ldots), \quad \varphi''_y(x, y, z \ldots) \equiv \psi''_y(x, y, z, \ldots), \text{ ec.} \quad (2)$$

Ora osservando che l'identità $\varphi(x, y, z, \ldots) \equiv \psi(x, y, z, \ldots)$ dee sussistere per qualunque valore delle variabili, potremo sostituire $x+h$ ad x, ed $y+k$ ad y; sicchè avremo

$$\varphi(x+h, y+k, z, \ldots) \equiv \psi(x+h, y+k, z, \ldots)$$

e quindi [n. 174 eq. (1) e (2)]

$$\begin{gathered}\varphi(x, y, z, \ldots) + k\varphi'_y(x, y+\beta, z, \ldots) + h\varphi'_x(x+\alpha, y, z, \ldots) \\ + kh\,\varphi''_{xy}(x+\alpha, y+\beta_1, z, \ldots) \equiv \psi(x, y, z, \ldots) + k\psi'_y(x, y+\beta_2, z, \ldots) \\ + h\psi'_x(x+\alpha_1, y, z, \ldots) + hk\psi''_{xy}(x+\alpha_1, y+\beta_3, z, \ldots) \quad (3)\end{gathered}$$

sopprimendo i termini identici, dividendo per h, e riflettendo che h e k sono indeterminate, l'identità (3) si risolverà nelle identità parziali che seguono;

$$\begin{gathered}\varphi'_x(x+\alpha, y, z, \ldots) \equiv \psi'_x(x+\alpha_1, y, z, \ldots), \\ \varphi'_y(x, y+\beta, z, \ldots) \equiv \psi'_y(x, y+\beta_2, z, \ldots), \\ \varphi''_{xy}(x+\alpha, y+\beta_1, z, \ldots) \equiv \psi''_{xy}(x+\alpha_1, y+\beta_3, z, \ldots);\end{gathered}$$

passando a' limiti avremo dalla terza,

$$\varphi''_{xy}(x, y, z \ldots) \equiv \psi''_{xy}(x, y, z, \ldots).$$

Queste due derivate sono funzioni di $x, y, z, \ldots$ sulle quali

potrà ripetersi la medesima dimostrazione; perciò prendendo la derivata di esse più volte di seguito rapporto ad x, e più volte di seguito rapporto ad y, avremo

$$\varphi^{(m+n)}_{mx,ny}(x, y, z, \ldots) \geq \psi^{(m+n)}_{mx,ny}(x, y, z, \ldots);$$

ma il teorema che ha luogo per le variabili x, y ha luogo altresì per le altre variabili z, t, ec. dunque in generale sarà

$$\varphi^{(m+n+p+\ldots)}_{mx,\,ny,\,pz\ldots}(x, y, z, \ldots) \geq \psi^{(m+n+p+\ldots)}_{mx,\,ny,\,pz\ldots}(x, y, z, \ldots).$$

Ora dalla identità delle derivate parziali s'inferisce l'identità dei differenziali parziali; quindi quella dei differenziali completi.

180. Teorema II. *Se la funzione* $u = \varphi(x, y, z \ldots)$ *è identicamente uguale a zero, qualunque derivata parziale di essa sarà pure identicamente uguale a zero; uguali identicamente a zero saranno ancora i differenziali parziali e il differenziale completo di questa funzione.*

In virtù del Teorema II n. 86, sarà

$$\varphi'_x(x, y, z, \ldots) \geq 0,\ \varphi'_y(x, y, z, \ldots) \geq 0, \ldots \qquad (4)$$
$$\varphi^{(n)}_x(x, y, z, \ldots) \geq 0,\ \varphi'^{(n)}_y(x, y, z, \ldots) \geq 0, \ldots$$

Ora si osservi che l'identità $\varphi(x, y, z, \ldots) \geq 0$ dovendo sussistere per qualunque valore della x, della y, ec., dà

$$\varphi(x + h, y + k, z, \ldots) \geq 0,$$

e quindi [n. 174 eq. (1)]

$$\varphi(x, y, z, \ldots) + k\varphi'_y(x, y + \beta, z, \ldots) + h\varphi'_x(x + \alpha, y, z, \ldots)$$
$$+ hk\varphi''_{xy}(x + \alpha, y + \beta_1, z, \ldots) \geq 0; \qquad (5)$$

ma dalle identità (4) si ha

$$\varphi'_x(x + \alpha, y, z, \ldots) \geq 0,\ \varphi'_y(x, y + \beta, z, \ldots) \geq 0,$$

dunque l'identità (5) si ridurrà alla seguente

$$\varphi''_{xy}(x + \alpha, y + \beta_1, z, \ldots) \geq 0;$$

dalla quale, passando al limite, avremo

$$\varphi''_{x.y}(x, y, z, \ldots) \gtrless 0;$$

per conseguenza

$$\varphi^{(m+n)}_{mx, ny}(x, y, z, \ldots) \gtrless 0;$$

ed in generale

$$\varphi^{(m+n+p\ldots)}_{mx, ny, pz, \ldots}(x, y, z, \ldots) \gtrless 0.$$

Ora se ogni derivata parziale della funzione $\varphi(x, y, z \ldots)$ è identicamente nulla è forza che ogni differenziale parziale di questa funzione sia anch'esso identicamente nullo, e nullo il differenziale completo.

XIX. *I differenziali delle funzioni omogenee, e di quelle della somma di più variabili.*

181. Definizione I. Una funzione di più variabili x, y, z dovrà riputarsi omogenea allorquando sostituendo $tx, ty, tz, \ldots$ ad $x, y, z, \ldots$ risulterà moltiplicata per t^n. L'esponente n intero o fratto, positivo o nullo o negativo, della quantità t si dirà *grado* o *dimensione* della funzione.

182. Definizione II. Una espressione analitica delle variabili $x, y, z, \ldots$ si dirà funzione della somma di queste variabili stesse allorquando facendo $x+y+z+\ldots=t$ essa diverrà funzione della sola t.

183. Teorema I. *La somma di tutte le derivate parziali d'una funzione omogenea moltiplicate respettivamente per le variabili cui si riferiscono è uguale alla funzione medesima moltiplicata pel suo grado.*

Sia $u=\varphi(x, y, z, \ldots)$ una funzione omogenea del grado n; sarà

$$\varphi(tx, ty, tz, \ldots)=t^n\varphi(x, y, z, \ldots);$$

ovvero, facendo $\varphi(tx, ty, tz, \ldots)=U$,

$$U=t^n u;$$

ma questa equazione è vera qualunque sia t, dunque avremo (n. 85)

$$U'_t = nu\,t^{n-1}.$$

Ciò posto facciasi $tx = X$, $ty = Y$, $tz = Z$, . . . sarà

$$U = \varphi(X, Y, Z, \ldots),$$

nella quale equazione X, Y, Z . . . saranno funzioni di t; e perciò otterremo

$$U'_t = U'_X X'_t + U'_Y Y'_t + U'_Z Z'_t + \ldots;$$

ma $$X'_t = x, \quad Y'_t = y, \quad Z'_t = z, \quad \ldots,$$

dunque $$U'_t = U'_X x + U'_Y y + U'_Z z + \ldots;$$

e per conseguenza

$$U'_X x + U'_Y y + U'_Z z + \ldots = nut^{n-1}. \qquad (1)$$

La t è una quantità capace di ricevere qualunque valore; potrà adunque farsi $t = 1$, ed allora X, Y, Z,... si muteranno in x, y, z, . . . la U in u, e le derivate U'_X, U'_Y, U'_Z, . . . nelle derivate u'_x, u'_y, u'_z, . . . ; quindi l'equazione ottenuta precedentemente diventerà

$$u'_x x + u'_y y + u'_z z + \ldots = nu,$$

come dovevasi dimostrare.

Esempio. Sia $u = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$ funzione omogenea del secondo grado; sarà $n = 2$; inoltre

$$u'_x = 2Ax + 2Dy + 2Ez,$$

$$u'_y = 2By + 2Dx + 2Fz,$$

$$u'_z = 2Cz + 2Ex + 2Fy;$$

e quindi

$$2x(Ax + Dy + Ez) + 2y(By + Dx + Fz) + 2z(Cz + Ex + Fy) = 2u.$$

184. Teorema II. *Le derivate parziali d'una funzione della somma di più variabili sono uguali fra loro.*

Sia $u = \varphi(x + y + z + \ldots)$; facendo $x + y + z + \ldots = t$, avremo $$u = \varphi t;$$

nella quale equazione t sarà funzione di x, y, z, ...; talmentechè avremo

$$u'_x = \varphi'_t t \cdot t'_x, \quad u'_y = \varphi'_t t \cdot t'_y, \quad u'_z = \varphi'_t t \cdot t'_z, \quad \ldots$$

Ma dall' equazione $t = x + y + z + \ldots$ si ha

$$t'_x = 1, \quad t'_y = 1, \quad t'_z = 1, \quad \ldots$$

dunque

$$u'_x = \varphi'_t t, \quad u'_y = \varphi'_t t, \quad u'_z = \varphi'_t t, \quad \ldots$$

e conseguentemente

$$u'_x = u'_y = u'_z \ldots = \varphi'_t t,$$

come dovevasi dimostrare.

185. Corollario. Il differenziale completo

$$du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz + \ldots.$$

potrà mettersi sotto questa forma

$$du = \varphi'_t t (dx + dy + dz + \ldots),$$

ed esso sarà noto tostochè conosceremo l' espressione di $\varphi'_t t$ determinata come se t fosse una variabile indipendente. Questa equazione può estendersi anche al caso in cui alcuna delle variabili sia negativa.

Esempio. Abbiasi

$$u = (x + y + z + \ldots)^m;$$

sarà $\quad u = t^m, \; u'_t = mt^{m-1} = m(x + y + z + \ldots)^{m-1};$

quindi $\quad u'_x = u'_y = u'_z = m(x + y + z + \ldots)^{m-1},$

e $\quad du = m(x + y + z + \ldots)^{m-1}(dx + dy + dz + \ldots).$

XX. I Differenziali delle funzioni implicite.

186. Definizione I. Una variabile u dipendente dalle variabili x, y, z, ... è detta *funzione esplicita* di queste variabili quando ci è nota l' espressione analitica di u in funzione di x, y, z, ...

187. Definizione II. Una variabile u dipendente dalle variabili

$x, y, z, \ldots$ è detta *funzione implicita* di queste variabili stesse allorquando il legame fra u e le $x, y, z, \ldots$ è dato da una equazione $\varphi(u, x, y, z, \ldots) = 0$ dove la u si trova in qualsivoglia modo combinata con $x, y, z, \ldots$

188. Scolio. Abbiasi l'equazione $\varphi(u, x, y, z \ldots) = 0$ fra le n variabili $u, x, y, z, \ldots$; $n-1$ di queste variabili saranno indipendenti; la rimanente che supporremo u sarà funzione implicita di esse, per cui potremo porre $u = f(x, y, z, \ldots)$. Ogniqualvolta sarà dato di determinare questa funzione f, cioè ogniqualvolta potremo risolvere algebricamente l'equazione proposta $\varphi(u, x, y, z, \ldots) = 0$ rapporto ad u, la medesima u diverrà funzione esplicita delle variabili $x, y, z, \ldots$

189. Principio. Esprimendo con U la funzione $\varphi(u, x, y, z, \ldots)$, il differenziale di questa funzione sarà rappresentato da

$$\frac{dU}{du}du + \frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \ldots . \qquad (1)$$

qualunque sia la dipendenza che le variabili $u, x, y, z, \ldots$ possono avere e fra loro e con altre variabili, cioè qualunque sia l'espressione analitica delle variabili stesse (n. 173). Potremo adunque fare $u = f(x, y, z, \ldots)$, ed allora l'espressione (1) rappresenterà il differenziale della funzione U quando la u si muta in $f(x, y, z, \ldots)$; ma la funzione U, sostituendo $f(x, y, z, \ldots)$ ad u risulta identicamente uguale a zero, dunque anche l'espressione (1) quando la u si muta in $f(x, y, z, \ldots)$ risulterà identicamente uguale a zero; avremo cioè

$$\frac{dU_1}{du} df(x, y, z, \ldots) + \frac{dU_1}{dx}dx + \frac{dU_1}{dy}dy + \ldots = 0:$$

e conseguentemente

$$df(x, y, z, \ldots) = -\frac{\dfrac{dU_1}{dx}dx + \dfrac{dU_1}{dy}dy + \ldots}{\dfrac{dU_1}{du}}. \qquad (2)$$

Questo sarà il differenziale della funzione $f(x, y, z, \ldots)$ ossia della variabile u.

Ciò posto si osservi che uguagliando a zero l'espres-

sione (1) e risolvendo l'equazione risultante rapporto a du, si trova

$$du = -\frac{\frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \ldots}{\frac{dU}{du}}. \tag{3}$$

Or l'equazione (2) suppone che ad u sia stato sostituito il suo valore analitico $f(x, y, z, \ldots)$, mentre la (3) non è libera dalla u; ma siccome il secondo membro della equazione (2) non differisce, quanto alla forma, dal secondo membro della (3), perciò la (3), ponendo $f(x, y, z, \ldots)$ in luogo di u risulterà identica alla (2), possiamo adunque concludere *che ad avere il differenziale di una delle variabili contenute nella equazione* U$=0$ *dovremo uguagliare a zero il differenziale completo della funzione* U, *e risolvere l'equazione risultante* dU$=0$ *rapporto a quel differenziale di cui si vuol l'espressione.*

190. Scolio I. Questo principio giova a mostrare come l'espressione del differenziale d'una funzione implicita u data dalla equazione $U=0$ possa ottenersi indipendentemente dalla risoluzione della equazione medesima rapporto ad u. Vero è che in questa guisa otteremo una espressione di du non libera dalla u, ma nulla vieta che si elimini la u avendo ricorso alla equazione $U=0$: rari per altro sono i casi ne' quali occorre liberare il differenziale du dalla u. Si noti che le equazioni $U=0$, $dU=0$ può avvenire che sieno di tal forma da rendere impossibile l'eliminazione di u.

Esempio. Sia

$$U = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0;$$

avremo
$$xdx + ydy + zdz = 0,$$

e quindi
$$dz = -\frac{x}{z}dx - \frac{y}{z}dy.$$

191. Scolio II. Se l'equazione $U=0$ contenesse due sole variabili x, y, essendo la x variabile indipendente, ed y funzione della x, avremmo

$$dy = -\frac{\frac{dU}{dx}}{\frac{dU}{dy}}dx, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dU}{dx}}{\frac{dU}{dy}}; \tag{4}$$

dunque *senza risolvere l'equazione* $U=\varphi(x, y)=0$ *avremo la derivata di* y *rapporto ad* x *dividendo la derivata parziale di* U *rapporto ad* x *per la derivata parziale di* U *rapporto ad* y, *purchè si cambi il segno al quoziente.*

Esempio I. Sia

$$U=x^2+y^2-r^2=0;$$

avremo $$\frac{dU}{dx}=2x, \qquad \frac{dU}{dy}=2y;$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}, \qquad dy=-\frac{x}{y}dx.$$

Esempio II. Sia

$$U=x^2+y^2-2rx-r^2=0;$$

sarà $$\frac{dU}{dx}=2(x-r), \quad \frac{dU}{dy}=2y;$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{r-x}{y}, \qquad dy=\frac{r-x}{y}dx.$$

192. Scolio III. Se dalla espressione del differenziale dy si eliminasse la y inalzeremmo il differenziale medesimo al grado che ha la y nella equazione $U=0$; infatti la differenziazione lascia nella espressione di dy i radicali stessi che sono nella espressione analitica di y (n. 121). Se dy si troverà nella equazione $dU=0$ al primo grado soltanto, ciò significherà che dalla equazione $dU=0$ non è stata eliminata la y; facendo tale eliminazione compariranno nella espressione della dy i radicali medesimi che sono nella espressione della y.

Esempio. Dalla equazione

$$U=x^2+y^2-r^2=0,$$

abbiamo ottenuto $$dy=-\frac{x}{y}dx;$$

ora $$y=\sqrt{(r^2-x^2)},$$

dunque

$$dy=-\frac{xdx}{\sqrt{(r^2-x^2)}}, \qquad dy^2=\frac{x^2dx^2}{r^2-x^2}.$$

193. Scolio IV. Supponiamo che si abbiano le $m-1$ equazioni

$$U=0,\ V=0,\ W=0,\ldots$$

fra le m variabili $x, y, z, \ldots$; solo una di esse, per esempio x, sarà indipendente; le altre saranno funzioni implicite di questa. Poichè i differenziali delle funzioni $U, V, W, \ldots$, quando vi si introducessero i valori delle variabili $x, y, z, \ldots$ tratti dalle equazioni date risulterebbero, per le ragioni dette di sopra (n. 182), identicamente uguali a zero, perciò potremo porre le equazioni

$$\frac{dU}{dx}dx+\frac{dU}{dy}dy+\frac{dU}{dz}dz+\ldots=0,$$

$$\frac{dV}{dx}dx+\frac{dV}{dy}dy+\frac{dV}{dz}dz+\ldots=0,$$

$$\frac{dW}{dx}dx+\frac{dW}{dy}dy+\frac{dW}{dz}dz+\ldots=0,$$

$$\cdots\cdots$$

le quali saranno $m-1$ di numero, e del primo grado rapporto a $dx, dy, dz\ldots$; adunque mediante l'eliminazione otterremo i valori dei differenziali dy, $dz, \ldots.$ in funzione delle variabili $x, y, z, \ldots$ e del differenziale costante dx: lo che ci esime dal risolvere le equazioni date rapporto alle variabili stesse.

194. Scolio V. Se le m variabili fossero fra loro legate dalle due equazioni $U=0$, $V=0$, $m-2$ di quelle variabili sarebbero indipendenti, e le due rimanenti dipendenti da esse cioè funzioni implicite di queste; e mediante le equazioni $dU=0$, $dV=0$ potranno ottenersi i differenziali delle due variabili stesse espressi in funzione dei differenziali costanti delle altre, e di tutte le variabili $x, y, z, \ldots$

In generale se le m variabili fossero legate insieme per mezzo di n equazioni (si suppone $n<m$) $m-n$ di queste variabili sarebbero indipendenti, e le n variabili rimanenti funzioni implicite di queste. Le n equazioni $dU=0$, $dV=0$, $dW=0, \ldots$ ci daranno i differenziali delle n variabili dipendenti espressi in funzione dei differenziali costanti delle altre, e di tutte le variabili $x, y, z, \ldots$; il qual calcolo non richiederà che la semplice risoluzione di equazioni del primo grado.

Abbiansi le due equazioni

$$U = \varphi(u, x, y, z) = 0, \tag{5}$$

$$V = \psi(u, x, y, z) = 0, \tag{6}$$

nelle quali u ed x si considerano come variabili indipendenti, y e z funzioni implicite di u e di x date da queste equazioni. Differenziando avremo

$$\frac{dU}{du}du + \frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dz}dz = 0, \tag{7}$$

$$\frac{dV}{du}du + \frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{dy}dy + \frac{dV}{dz}dz = 0; \tag{8}$$

le quali sono due equazioni del primo grado rapporto a du, dx, dy, dz: perciò sarà facile mediante l'eliminazione ottenere i valori di dy e dz; i quali valori risulteranno espressi in funzione dei differenziali costanti du, dx e delle variabili u, x, y, z.

I valori di dy e dz possono ben anche ottenersi in altra guisa: poichè y e z sono funzioni implicite di u e di x, dovremo porre

$$dy = \frac{dy}{du}du + \frac{dy}{dx}dx, \tag{9}$$

$$dz = \frac{dz}{du}du + \frac{dz}{dx}dx; \tag{10}$$

ond'è che le due equazioni precedenti diverranno

$$\left(\frac{dU}{du} + \frac{dU}{dy}\frac{dy}{du} + \frac{dU}{dz}\frac{dz}{du}\right)du + \left(\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dU}{dz}\frac{dz}{dx}\right)dx = 0,$$

$$\left(\frac{dV}{du} + \frac{dV}{dy}\frac{dy}{du} + \frac{dV}{dz}\frac{dz}{du}\right)du + \left(\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dV}{dz}\frac{dz}{dx}\right)dx = 0,$$

le quali dovendo sussistere qualunque sia du e dx, perchè u ed x si reputano indipendenti, daranno le quattro equazioni seguenti;

$$\frac{dU}{du} + \frac{dU}{dy}\frac{dy}{du} + \frac{dU}{dz}\frac{dz}{du} = 0, \quad \frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dU}{dz}\frac{dz}{dx} = 0,$$

$$\frac{dV}{du} + \frac{dV}{dy}\frac{dy}{du} + \frac{dV}{dz}\frac{dz}{du} = 0, \quad \frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dV}{dz}\frac{dz}{dx} = 0;$$

esse serviranno a determinare i valori delle quattro derivate parziali $\frac{dy}{du}$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{du}$, $\frac{dz}{dx}$ in funzione delle variabili u, x, y, z.

Sostituendo questi valori nelle equazioni (9) e (10) otterremo le richieste espressioni dei differenziali dy e dz.

Potremmo ragionare nello stesso modo sopra un maggior numero di variabili e di equazioni.

195. Scolio VI. Supponiamo che la z funzione implicita delle due variabili indipendenti x, y, sia determinata dalla equazione

$$U = \varphi(x, y, z) = 0; \tag{11}$$

da essa ricaveremo

$$\frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dz}dz = 0; \tag{12}$$

e di qui avremo il differenziale dz. Or l'espressione di questo differenziale non è altro che una funzione di x, y, z essendochè dx e dy debbono riputarsi costanti; l'equazione (12) potrà adunque considerarsi come un'equazione contenente quattro variabili, e differenziarsi in virtù del principio esposto al n. 182; è da notare che nella differenziazione ciascuna delle derivate parziali $\frac{dU}{dx}, \frac{dU}{dy}, \frac{dU}{dz}$ dovrà trattarsi come funzione di x, y, z; e dz come una nuova variabile il cui differenziale verrà rappresentato da d^2z; ne risulterà adunque la seguente equazione:

$$\frac{d^2U}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2U}{d^2y}dy^2 + \frac{d^2U}{dz^2}dz^2 + 2\frac{d^2U}{dxdy}dxdy$$
$$+ 2\frac{d^2U}{dxdz}dxdz + 2\frac{d^2U}{dydz}dydz + \frac{dU}{dz}d^2z = 0;$$

di qui potremo ricavare il valore di d^2z. Differenziando di nuovo questa equazione avremo il valore di d^3z, e così di seguito. Procederemmo nello stesso modo, quando anche il numero delle variabili fosse maggiore.

Se l'equazione (11) non contenesse che le variabili x, y, cosicchè y fosse funzione della sola x, avremmo

$$\frac{d^2U}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2U}{dxdy}dxdy + \frac{d^2U}{dy^2}dy^2 + \frac{dU}{dy}d^2y = 0; \tag{13}$$

dividendo per dx^2 e sostituendo nella equazione risultante l'espressione (4) della derivata $\frac{dy}{dx}$, otterremo

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2U}{dx^2}\left(\frac{dU}{dy}\right)^2+2\frac{d^2U}{dxdy}\frac{dU}{dx}\frac{dU}{dy}+\frac{d^2U}{dy^2}\left(\frac{dU}{dx}\right)^2}{\left(\frac{dU}{dy}\right)^3}; \quad (14)$$

questa espressione si potrebbe ottenere ugualmente differenziando il valore di $\frac{dy}{dx}$ espresso dalla formula (4).

Potremmo continuare nello stesso modo per trovare le espressioni delle derivate $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, . . .

196. Scolio VII. Supponiamo che y e z, funzioni implicite della variabile indipendente x, siano date dalle due equazioni

$$U=\psi(x,y,z)=0, \quad (15)$$

$$V=\varphi(x,y,z)=0; \quad (16)$$

e proponiamoci di determinare i differenziali d^2y, d^2z; avremo primieramente

$$\frac{dU}{dx}dx+\frac{dU}{dy}dy+\frac{dU}{dz}dz=0, \quad (17)$$

$$\frac{dV}{dx}dx+\frac{dV}{dy}dy+\frac{dV}{dz}dz=0; \quad (18)$$

e di qui

$$dy=-\frac{\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dz}-\frac{dV}{dx}\frac{dU}{dz}}{\frac{dU}{dy}\frac{dV}{dz}-\frac{dV}{dy}\frac{dU}{dz}}dx, \qquad dz=-\frac{\frac{dV}{dx}\frac{dU}{dy}-\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dy}}{\frac{dU}{dy}\frac{dV}{dz}-\frac{dV}{dy}\frac{dU}{dz}}dy;$$

ora differenziandó le due equazioni (17) e (18) otterremo

$$\frac{d^2U}{dx^2}dx^2+\frac{d^2U}{dy^2}dy^2+\frac{d^2U}{dz^2}dz^2+2\frac{d^2U}{dxdy}dxdy+2\frac{d^2U}{dxdz}dxdz$$
$$+2\frac{d^2U}{dydz}dydz+\frac{dU}{dy}d^2y+\frac{dU}{dz}d^2z=0,$$

$$\frac{d^2V}{dx^2}dx^2+\frac{d^2V}{dy^2}dy^2+\frac{d^2V}{dz^2}dz^2+2\frac{d^2V}{dxdy}dxdy+2\frac{d^2V}{dxdz}dxdz$$
$$+2\frac{d^2V}{dydz}dydz+\frac{dV}{dy}d^2y+\frac{dV}{dz}d^2z=0;$$

dalle quali potremo ricavare le espressioni di d^2y e d^2z dopo avere sostituiti i valori di dy e dz dati dalle due formule precedenti.

Le espressioni di d^2y e d^2z possono ugualmente ottenersi differenziando immediatamente i valori di dy e dz.

Proseguendo nello stesso modo otterremmo le espressioni di d^3y, d^3z, d^4y, d^4z, ec.

XXI. *Il cambiamento della variabile indipendente.*

197. Principio I. Sia $y=\varphi x$, $x=\chi t$; avremo (n. 147)

$$y'_t=\varphi'_x x\,.\,x'_t,$$

ovvero

$$y'=\varphi'_x x\,.\,x'$$

sopprimendo l'indice t da quelle derivate che si prendono rapporto a t riputata variabile indipendente. Frattanto otterremo

$$\varphi'_x x=\frac{y'}{x'}.$$

Or da questa equazione si ha

$$\varphi''_x x\,.\,x'=D\frac{y'}{x'},$$

$$\varphi''_x x=\frac{1}{x'}D\frac{y'}{x'};$$

e di qui

$$\varphi'''_x x\,.\,x'=D\frac{1}{x'}D\frac{y'}{x'},$$

$$\varphi'''_x x=\frac{1}{x'}D\frac{1}{x'}D\frac{y'}{x'};$$

e così di seguito. Dimanierachè sostituendo y'_x, y''_x, y'''_x, ... a $\varphi'_x x$, $\varphi''_x x$, $\varphi'''_x x$, ... avremo la seguente serie di equazioni;

$$\left.\begin{aligned}
y'_x&=\frac{y'}{x'}\\
y''_x&=\frac{1}{x'}D\frac{y'}{x'}\\
y'''_x&=\frac{1}{x'}D\frac{1}{x'}D\frac{1}{x'}D\frac{y'}{x'}\\
&\dots\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

dalle quali risulta che *se la* x, *cessando di esser variabile indipendente, diventerà una funzione della variabile* t *riputata indipendente, le derivate* y'_x, y''_x, y'''_x, . . . *della funzione* $y = \varphi x$ *acquisteranno i valori dati dalle equazioni* (1).

198. Corollario I. Effettuando i calcoli avremo

$$
\begin{aligned}
y'_x &= \frac{y'}{x'} \\
y''_x &= \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3} \qquad\qquad (2) \\
y'''_x &= \frac{x'(x'y''' - y'x''') - 3x''(x'y'' - y'x'')}{x'^5} \\
&\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

queste saranno veramente le espressioni da sostituirsi alle derivate di y prese rapporto ad x, quando x diventi una funzione di t.

199. Corollario II. Abbiasi una equazione derivata

$$\xi(x, y, y', y'', y''', \ldots) = 0, \qquad (3)$$

nella quale la x si reputa variabile indipendente, e dove y, y', y''... sono funzioni della x; se avverrà che la x cessando di esser variabile indipendente diventi funzione d'un'altra variabile t, per adattare l'equazione (3) a questo caso, converrà sostituire ad y', y'', y''', ..., i valori di y'_x, y''_x, y'''_x, ... dati dalle formule (2), per cui l'equazione (3) si cangerà nella seguente

$$\xi_1(x, y, x', y', x'', y'', \ldots) = 0. \qquad (4)$$

200. Corollario III. Se la x tornerà ad esser variabile indipendente faremo $x' = 1$, $x'' = 0$, $x''' = 0$, . . . e per tal modo la (4) diverrà nuovamente la (3); infatti le formule (2) ponendo $x' = 1$, $x'' = 0$, $x''' = 0$, . . . daranno

$$
\begin{aligned}
y'_x &= y' \\
y''_x &= y'' \\
y'''_x &= y''' \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

201. Corollario IV. Se vorremo considerare la y come variabile indipendente, e la x come funzione della y cioè $x = \psi y$, allora x', x'', x''', . . . rappresenteranno le derivate successive di ψy, cioè $\psi' y$, $\psi'' y$, $\psi''' y$, . . . ed y', y'', y''', . . . saranno le derivate

successive della variabile indipendente, per cui dovremo porre $y' = 1, y'' = 0, y''' = 0, \ldots$; così le equazioni (2) si cangeranno nelle seguenti

$$\begin{aligned} y'_x &= \frac{1}{x'} \\ y''_x &= -\frac{x''}{x'^3} \\ y'''_x &= \frac{3x''^2 - x'x'''}{x'^5} \\ &\ldots\ldots \end{aligned} \tag{5}$$

Diguisachè quando nella equazione (3) stabilita nella ipotesi di x variabile indipendente, vorremo rendere indipendente la y, e considerare la x come funzione di y, bisognerà sostituire ad $y', y'', y''', \ldots$ le espressioni di $y'_x, y''_x, y'''_x \ldots$ date dalle formule (5). Così la funzione ξ si muterà in una funzione ξ_2 di $y, x, x', x'', x''', \ldots$ cioè l'equazione (3) diventerà

$$\xi_2 (y, x, x', x'', x''', \ldots) = 0. \tag{6}$$

202. Corollario V. Qui cade di dovere osservare che se l'equazione $y = \varphi x$ risoluta rapporto ad x darà $x = \psi y$, le equazioni (5) gioveranno a mostrare le relazioni esistenti fra le successive derivate delle due funzioni inverse $\varphi x, \psi x$ (n. 150). Dunque mediante le formule (5), data che sia la derivata di qualunque ordine d'una funzione, troveremo immediatamente la derivata della funzione inversa.

La prima delle equazioni (5) coincide colla equazione (3) stabilita al n. 156.

203. Corollario VI. Quando non dovendo esser variabile indipendente la x, nè la y, dovrà esserlo la t, affinchè la funzione ξ_1 possa trasformarsi in una funzione della sola t, converrà che oltre alla relazione della x colla y, sia data quella che dee sussistere fra la t e la x, oppure fra la t e la y. Supponiamo primieramente che sieno date le equazioni

$$f(x, y) = 0, \qquad F(x, t) = 0;$$

dalla seconda avremo $x', x'', x''', \ldots$ espresse per x e t; mentre la prima ci darà $y', y'', y''', \ldots$ espresse per $y, x, x', x'', \ldots$ quindi per x, y, t: cosicchè ξ_1 si ridurrà ad una funzione di

x, y, t, e poscia ad una funzione della sola t, ove per altro possa eliminarsi la y mediante l'equazione $f(x, y) = 0$, e quindi la x per mezzo dell'altra equazione $F(x, t) = 0$.

Se verranno date le equazioni

$$f(x, y) = 0, \qquad F_1(y, t) = 0,$$

il calcolo non differirà sostanzialmente dal precedente: sicchè ci varremo della seconda di esse per esprimere $y', y'', y''', \ldots$ in y e t, e della prima per esprimere $x', x'', x''', \ldots$ in $x, y, y', y'', \ldots$, quindi in x, y, t: allora ξ_1 si potrà ridurre ad una funzione di x, y, t, ed anche ad una funzione della sola t, ove possa eliminarsi la x per mezzo dell' equazione $f(x, y) = 0$, e la y mediante l'altra equazione $F_1(y, t) = 0$.

204. Corollario VII. In secondo luogo supponiamo che sieno date le equazioni

$$f(x, y) = 0, \qquad F_2(x, y, t) = 0;$$

sarà facile tornare al caso precedente, quando però si possa eliminare da esse la x o la y; perocchè eliminando la x otterremo una equazione la quale conterrà y e t; eliminando la y otterremo una equazione fra x e t: quanto al resto dell'operazione procederemo come sopra.

205. Corollario VIII. In terzo luogo supponiamo date le equazioni

$$F(x, t) = 0, \qquad F_1(y, t) = 0;$$

ci varremo della prima per esprimere $x', x'', x''', \ldots$ in funzione di x e t; della seconda per esprimere $y', y'', y''', \ldots$ in funzione di y e t: così ξ_1 potrà ridursi ad una funzione di x, y, t: quindi per eliminare x ed y ci dovremo valere delle due equazioni date. Siffatta eliminazione non presenterà, com' è chiaro, alcuna difficoltà quando x ed y sieno due funzioni esplicite di t, cioè quando abbiasi $x = \chi t, y = \chi_1 t$.

206. Corollario IX. Se l'equazione $\xi = 0$ fosse priva di una delle variabili, per esempio della x, anche l' equazione $\xi_1 = 0$ sarebbe priva di questa variabile, stantechè le espressioni (2) che vengono introdotte nella funzione ξ non contengono la x, nè la y. In questo caso per trasformare la funzione ξ_1 in una funzione della sola t, basterà che congiuntamente ad una

equazione fra y e t sia data una equazione derivata fra x' e t, cioè le due equazioni seguenti

$$F_1(y,\ t) = 0, \qquad F_2(x',\ t) = 0;$$

si suppone però che mediante la prima di esse riesca possibile la eliminazione della y.

207. Scolio I. Si osservi che in luogo della equazione derivata $F_2(x',\ t) = 0$ potrebbe esser nota una equazione derivata fra y e t', oppure fra y, y' e t', dove la y fosse stata considerata come funzione di t, e t come funzione di x. Quando ciò avvenga sarà necessario porre nell' equazione derivata proposta $\frac{1}{x'}$ in luogo di t', ed $\frac{y'}{x'}$ in luogo di y'; l'equazione così modificata darà i valori di $x', x'', x''', \ldots$ quali convengono alla equazione $\xi_1 = 0$.

Esempio I. Sia data la funzione del primo ordine

$$\xi = \frac{y - xy'}{x + yy'}; \tag{7}$$

sostituendo $\frac{y'}{x'}$ ad y', ne risulterà la seguente

$$\xi_1 = \frac{yx' - xy'}{xx' + yy'}. \tag{8}$$

Ora abbiansi le equazioni

$$x = r\cos t, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\, t; \tag{9}$$

dove r si suppone essere una funzione nota di t, e t la variabile indipendente. Qui siamo nel caso di cui abbiamo parlato nel Corollario VII, n. 204., e poichè

$$x' = r'\cos t - r\,\mathrm{sen}\, t, \quad y' = r'\,\mathrm{sen}\, t + r\cos t; \tag{10}$$

fatta la sostituzione risulterà l' equazione

$$\xi_1 = \frac{r}{r'}; \tag{11}$$

di questa guisa ξ_1 sarà ridotta ad una funzione della sola t variabile indipendente.

Esempio II. Sia data la funzione del secondo ordine

$$\xi = \frac{(1 - y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}; \tag{12}$$

sostituendo $\frac{y'}{x'}$ ad y', ed $\frac{x'y''-y'x''}{x'^3}$ ad y'', avremo

$$\xi_1 = \frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y''-y'x''}. \tag{13}$$

Cosicchè quando abbiasi come sopra $x=r\cos t$, $y=r\,\mathrm{sen}\,t$, la ξ_1 verrà trasformata nella seguente,

$$\xi_1 = \frac{(r'^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r'^2-rr''}, \tag{14}$$

la quale è funzione della sola t.

Esempio III. Se poi avremo

$$y-t'=0,$$

dove si suppone y funzione di t, e t funzione di x, e dove t' è la derivata di t rapporto ad x, dovremo por mente alla osservazione fatta al n. 207. Sicchè sostituiremo innanzi tutto $\frac{1}{x'}$ a t'; allora l'equazione $y-t'=0$ si cambierà in

$$y-\frac{1}{x'}=0;$$

da cui emergeranno le seguenti,

$$x'=\frac{1}{y},\quad x''=-\frac{y'}{y^2}.$$

Sostituendo questi valori nella formula (13) otterremo

$$\xi_1 = \frac{(1+y^2y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y(yy''+y'^2)}; \tag{15}$$

la quale potrà trasformarsi in una funzione di t variabile indipendente, ove sia data una equazione $F_1(y,t)=0$ fra y e t; infatti mediante questa equazione esprimeremo y' ed y'' in funzione di y e t; quindi elimineremo y.

Esempio IV. Abbiasi

$$t'^2-y'^2=1,$$

dove y si suppone funzione di t, e t funzione di x. Porremo $\frac{1}{x'}$ in luogo di t', $\frac{y'}{x'}$ in luogo di y', ed avremo

$$x'^2 + y'^2 - 1 = 0;$$

da cui si ottiene

$$x'^2 + y'^2 = 1, \quad x'x'' + y'y'' = 0, \quad x'' = -\frac{y'y''}{x'};$$

sostituendo questi valori nella formula (13), risulterà

$$\xi_1 = \frac{x'}{y''} = \frac{\sqrt{(1 - y'^2)}}{y''}; \tag{16}$$

la quale potrà ridursi, come la (15), ad una funzione della sola t mediante una equazione $F_1(y, t) = 0$ fra y e t.

Se in luogo della equazione $F_1(y, t) = 0$, fosse data una equazione $F(x, t) = 0$ fra x e t avremmo da essa i valori di x' ed x'' in funzione di t; sicchè bisognerebbe esprimere ξ_1 in funzione di x' ed x''; e poichè

$$y'' = -\frac{x'x''}{y'},$$

sostituendo questo valore nella (16), risulterebbe

$$\xi_1 = \frac{x'}{y''} = -\frac{y'}{x''} = -\frac{\sqrt{(1 - x'^2)}}{x''}. \tag{17}$$

Esempio V. Sia data la funzione

$$\xi = \frac{y'''}{x''}, \tag{18}$$

nella quale la x si suppone indipendente: abbiasi inoltre come sopra l'equazione

$$t^2 - y^2 = 1, \quad \text{ovvero} \quad x'^2 + y'^2 = 1.$$

Dovendosi trasformare la ξ in una funzione della variabile indipendente t, cominceremo dal sostituire nella ξ le espressioni di y'' e di y''' date dalle formule (2); sicchè avremo

$$\xi_1 = \frac{x'(x'y''' - y'x''') - 3x''(x'y'' - y'x'')}{xx'^2(x'y'' - y'x'')}, \tag{19}$$

ovvero

$$\xi_1 = \frac{x'y''' - y'x'''}{xx'(x'y'' - y'x'')} - \frac{3x''}{xx'^2}. \tag{20}$$

Or poichè

$$x' = \sqrt{(1 - y'^2)},$$

sarà

$$x'' = -\frac{y'y''}{\sqrt{(1-y'^2)}} = -\frac{y'y''}{x'},$$

$$x''' = -\frac{y'y'''}{x'} - \frac{y''^2}{x'} + \frac{y'y''x''}{x'^2} = -\frac{y'y'''}{x'} - \frac{y''^2}{x'^3}:$$

sostituendo nella funzione (20) questa espressione di x''', e la precedente di x'', avremo

$$\xi_1 = \frac{y'''}{xx'y''} + \frac{4y'y''}{xx'^3};$$

finalmente sostituendo l'espressione di x', risulterà

$$\xi_1 = \frac{y'''}{xy''\sqrt{(1-y'^2)}} + \frac{4y'y''}{x\sqrt{(1-y'^2)^3}}. \qquad (21)$$

Per eliminare y, y', y'' sarà necessario conoscere una equazione $F_1(y, t) = 0$; rimane la x, la quale non potrà eliminarsi ammenochè non sia nota una equazione $f(x, y) = 0$ fra x e y, oppure una equazione $F(x, t) = 0$ fra x e t.

208. Scolio II. Abbiamo veduto come le derivate di y rapporto ad x si possano esprimere per le derivate di y e di x rapporto ad una stessa variabile t indipendente e di cui x ed y erano due diverse funzioni. Or giova avvertire che il problema più generale del cambiamento di una variabile indipendente consiste nel trasformare una funzione ξ contenente le derivate di y rapporto ad x, in una funzione ξ_2 che contenga non già le derivate di x e di y rapporto a t qual'è la ξ_1, ma le derivate di un' altra funzione u rapporto a t riputata variabile indipendente. All'oggetto di schiarire questo problema supponiamo che congiuntamente alla equazione $f(x, y) = 0$ fra x e y, abbiansi le due equazioni

$$U = \varphi(x, y, u, t) = 0,$$
$$V = \psi(x, y, u, t) = 0,$$

fra le quattro variabili x, y, u, t. Una di queste variabili, per esempio la t, sarà indipendente; le altre x, y, u saranno funzioni della t. Differenziando le equazioni $U = 0$, $V = 0$ nella ipotesi appunto che x ed y sieno funzioni di t, avremo

$$U'_x x' + U'_y y' + U'_u u' = 0,$$
$$V'_x x' + V'_y y' + V'_u u' = 0;$$

(le derivate x', y', u' da cui si è soppresso l'indice, s'intendono prese rapporto alla variabile indipendente t); di quì ricaveremo i valori di x', y' in funzione di u'. Differenziando nuovamente queste equazioni, otterremo le seguenti,

$$U''_x x'^2 + 2\,U''_{xy} x' y' + 2\,U''_{xu} x' u' + U'_x x'' + \ldots = 0,$$

$$V''_x x'^2 + 2\,V''_{xy} x' y' + 2\,V''_{xu} x' u' + V'_x x'' + \ldots = 0;$$

dalle quali potremo eliminare le derivate x', y' per mezzo dei loro valori ottenuti di sopra, e quindi ricavare i valori delle derivate x'', y'' in funzione di u'' ed u'. Proseguendo in tal guisa tutte le derivate $x', y', x'', y'', x''', y''', \ldots.$ potranno esprimersi per le derivate $u', u'', u''', \ldots$; quindi avendo ricorso alle formule (2) le quali ci danno le derivate $y'_x, y''_x, y'''_x, \ldots$ in funzione di $x', y', x'', y'', x''', y''', \ldots$ giungeremo ad esprimere $y'_x, y''_x, y'''_x, \ldots$ in funzione di $u', u'', u''', \ldots$ Ciò fatto, qualunque funzione ξ in cui si trovino le derivate di y rapporto ad x potrà trasformarsi in una funzione ξ_1 che contenga solamente le derivate di u rapporto a t. Si raccoglie da ciò che la soluzione del problema non offrirà difficoltà quando sieno noti i valori delle derivate $y'_x, y''_x, y'''_x \ldots$ in funzione delle derivate $u', u'', u''', \ldots$ Questi valori dipendono unicamente dalle equazioni che legano x ed y con t ed u: nulla vieta però che queste equazioni oltre contenere x, y, t ed u, contengano altre variabili; vuolsi solo che tutte le equazioni date, sieno tante di numero quante sono le variabili meno una; senza di ciò non avremmo una sola variabile indipendente come abbiamo supposto.

Le precedenti considerazioni possono rendersi più generali nel seguente modo. Supponiamo che congiuntamente alla equazione $f(x, y) = 0$ sieno date le $m - 2$ equazioni

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0, \ldots.$$

fra le m variabili $x, y, z, \ldots v, u, t$, e proponiamoci di esprimere tutte le derivate della funzione y rapporto alla variabile x da cui dipende, per mezzo delle derivate successive della funzione u rapporto alla variabile t considerata come indipendente. Differenziando le equazioni $U = 0$, $V = 0$, $W = 0, \ldots.$

avremo $m-2$ equazioni del primo grado rapporto ad x', y', $z',\ldots u'$; per mezzo di esse otterremo adunque i valori di x', y', ... in funzione di u'. Differenziando le equazioni già ottenute $dU=0$, $dV=0$, $dW=0,\ldots$ (da cui potremo eliminare x', y', $z'\ldots v'$) avremo $m-2$ equazioni del primo grado rapporto ad x'', y'', z'', ... u'', mediante le quali otterremo i valori di x'', y'', ... v'' in funzione di u'' e di u'. Differenziando poscia le equazioni $d^2U=0$, $d^2V=0$, $d^2W=0$, ... (dalle quali potranno eliminarsi x'', y'', z'', ... v'') avremo $m-2$ equazioni del primo grado rapporto ad x''', y''', z''', ... u'''; da esse avremo x''', y''', ... v''' in funzione di u''', u'', u'. Seguitando di questo modo esprimeremo tutte le derivate di x e di y rapporto a t in funzione delle derivate successive di u rapporto a t.

209. Scolio III. Resta che si consideri il caso in cui le variabili indipendenti sieno più di una. Abbiasi l'equazione

$$f(u, x, y, z, y'_u, y'_x, z'_u, z'_x, y''_u, y''_{ux}, \ldots)=0 \qquad (22)$$

contenente quattro variabili u, x, y, z, delle quali u ed x si suppongono indipendenti e le altre, cioè y e z, funzioni di u ed x. Supponiamo che u ed x cessando di essere variabili indipendenti diventino funzioni di s e t nuove variabili indipendenti; dovremo eliminare dalla funzione f le derivate y'_u, y'_x, z'_u, z'_x,... ed introdurvi le derivate delle variabili u, x, y, z rapporto ad s ed a t. A tale oggetto si osservi che essendo y e z funzioni di u ed x mentre u ed x sono funzioni di s e t, avremo

$$y'_s=y'_u u'_s+y'_x x'_s, \qquad y'_t=y'_u u'_t+y'_x x'_t,$$

$$z'_s=z'_u u'_s+z'_x x'_s, \qquad z'_t=z'_u u'_t+z'_x x'_t;$$

dalle quali equazioni mediante l'eliminazione si ricava

$$y'_u=\frac{y'_t x'_s-y'_s x'_t}{x'_s u'_t-x'_t u'_s}, \qquad y'_x=\frac{y'_s u'_t-y'_t u'_s}{x'_s u'_t-x'_t u'_s},$$

$$z'_u=\frac{z'_t x'_s-z'_s x'_t}{x'_s u'_t-x'_t u'_s}, \qquad z'_x=\frac{z'_s u'_t-z'_t u'_s}{x'_s u'_t-x'_t u'_s};$$

Ciò posto, differenziando le quattro espressioni precedenti di y'_s, y'_t, z'_s, z'_t rapporto ad s ed a t avremo le espressioni di

$$y''_s,\ y''_t,\ y''_{st},\ z''_s,\ z''_t,\ z''_{st}$$

cioè sei equazioni, dalle quali per l'eliminazione otterremo i valori delle sei derivate y''_u, y''_x, y''_{ux}, z''_u, z''_x, z''_{ux} in funzione delle derivate di u, x, y, z rapporto ad s ed a t. Di questa guisa potremo continuare il calcolo. Per ridurre la f ad una funzione delle sole variabili indipendenti s e t converrà che si conoscano le relazioni fra u, x, y e z, non meno che quelle fra u, x e le variabili indipendenti s e t.

210. Scolio IV. Le formule (1) non sono ristrette al caso in cui il cambiamento della variabile indipendente debba farsi in una equazione derivata qual'è la (3); esse giovano altresì ad effettuare siffatto cambiamento in qualunque equazione differenziale: sarà necessario per altro preparare convenientemente quelle formule stesse ponendovi

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3},\ \ldots \text{ in luogo di } y'_x,\ y''_x,\ y'''_x,\ \ldots$$

$$\frac{dy}{dt},\ \frac{d^2y}{dt^2},\ \frac{d^3y}{dt^3},\ \ldots \text{ in luogo di } y',\ y'',\ y''',\ \ldots$$

$$\frac{dx}{dt},\ \frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^3y}{dt^3},\ \ldots \text{ in luogo di } x',\ x'',\ x''',\ \ldots$$

211. Principio II. Poichè in virtù delle formule (1) cessando la x di esser variabile indipendente, y'_x dee mutarsi in $\frac{y'}{x'}$, perciò nella stessa ipotesi $\frac{dy}{dx}$ dovrà mutarsi in $\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}$; ma

$$\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dx},$$

dunque l'espressione $\frac{dy}{dx}$ della derivata del prim'ordine non muta ove anche x diventi funzione di t. Ciò concorda con quanto dicemmo al n. 150. Vero è che sostituendo $\frac{dy}{dx}$ al quoziente $\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}$, perdesi di vista la condizione che ci viene imposta dalle espressioni $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$, di prendere i differenziali dx e dy rapporto a t; ma siccome questa condizione può anche rimaner sottintesa nelle

caratteristiche differenziali dx, dy, perciò conchiuderemo che *una funzione del prim'ordine non va soggetta ad alcuna alterazione per il cambiamento della variabile indipendente; solo si richiede che in tal caso i differenziali contenuti in questa funzione s'intendano presi rapporto alla nuova variabile* t.

212. Scolio. Questa è una delle ragioni per cui le caratteristiche differenziali Leibnitziane $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ destinate a rappresentare le derivate di x e di y si preferiscono alle caratteristiche algebriche x', y' usate dal Lagrange.

213. Principio III. Poichè cessando la x di essere variabile indipendente, le derivate

$$y''_x, y'''_x, y^{\text{IV}}_x, \ldots$$

si cambiano respettivamente in

$$\frac{1}{x'} D \frac{y'}{x'}, \quad \frac{1}{x'} D \frac{1}{x'} D \frac{y'}{x'}, \quad \frac{1}{x'} D \frac{1}{x'} D \frac{1}{x'} D \frac{y'}{x'}, \ldots \tag{23}$$

però sussistendo la stessa ipotesi i coefficienti differenziali

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \frac{d^4y}{dx^4}, \ldots \tag{24}$$

si cambieranno respettivamente nelle espressioni seguenti

$$\frac{1}{dx} d \frac{dy}{dx}, \quad \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{dy}{dx}, \quad \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{dy}{dx}, \ldots \tag{25}$$

Infatti siccome $\frac{y'}{x'}$ deesi cambiare in $\frac{dy}{dx}$ (n. 202), risulterà (n. 91)

$$\frac{1}{x'} D \frac{y'}{x'} = \frac{1}{dx} dt D \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx} d \frac{dy}{dx},$$

$$\frac{1}{x'} D \frac{1}{x'} D \frac{y'}{x'} = \frac{1}{dx} dt D \frac{1}{dx} d \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{dy}{dx},$$

$$\frac{1}{x'} D \frac{1}{x'} D \frac{1}{x'} D \frac{y'}{x'} = \frac{1}{dx} dt D \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{1}{dx} d \frac{dy}{dx},$$

. . . . . .

e così di seguito.

Osservando che le espressioni (25) non differiscono dalle espressioni (23), cioè dalle (1), che per le caratteristiche D, le quali sono in queste majuscole, ed in quelle minuscole, conchiude-

remo che nel modo che dalle (1) si ebbero le (2) così dalle (25) si avranno le seguenti (n. 117);

$$
\begin{aligned}
y'_x &= \frac{dy}{dx}, \\
y''_x &= \frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3}, \\
y'''_x &= \frac{dx(dxd^3y - dyd^3x) - 3d^2x(dxd^2y - dyd^2x)}{dx^5},
\end{aligned} \tag{26}
$$

. . . . . .

le quali si deducono dalle equazioni (2) sostituendo agli apici, che è quanto dire ai D i d. Dunque 1° *per passare dall' ipotesi della* x *variabile indipendente all'ipotesi della* x *funzione di* t *basterà sostituire ai coefficenti differenziali* $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, . . . *rappresentanti le derivate* y'_x, y''_x, y'''_x, . . . *le espressioni date dalle equazioni* (26); 2° *per tornare all' ipotesi della* x *variabile indipendente basterà supporre costante il differenziale* dx *e rendere nulli tutti i differenziali susseguenti* d^2x, d^3x, . . .

214. Scolio I. Le espressioni (26) coincidono coi valori di u'', u''', ... che possono ricavarsi dalle equazioni (13), (14), ... stabilite al n. 106, ben inteso che la u si cambi in y.

215. Scolio II. Le espressioni (25) si mutano immediatamente nelle (24) sol che suppongasi dx costante; dunque *le derivate successive di* y *prese rapporto ad* x *sono sempre i differenziali della frazione* $\frac{dy}{dx}$ *divisi respettivamente per* dx; *colla differenza però che allorquando* $x = \chi t$ *ambedue i termini della frazione* $\frac{dy}{dx}$ *sono variabili, mentre nel caso di* x *indipendente il denominatore di essa è costante.*

XXI. Il rapporto degli accrescimenti di due funzioni d' una stessa variabile.

216. Principio. Sia fx una funzione di x continua fra i limiti x_0 ed $x_0 + h$, x_0 ed $x_0 - h$ della variabile: dalle equazioni (3) (14) (n. 55 e 60), avremo

$$f(x_0+h)-fx_0=h(f'x_0+\lambda)$$

$$fx_0-f(x_0-h)=h(f'x_0+\lambda_1)$$

decrescendo h potranno λ e λ_1 riuscire minori di qualunque quantità data; cosicchè $f'x_0+\lambda$ giungerà sempre ad avere il segno di $f'x_0$; indichiamo adunque con i un valore di h tale che $f'x$ risulti maggiore di λ e di λ_1, sarà

1° $f(x_0+i)>fx_0$ quando sia $f'x_0>0$,

$fx_0>f(x_0-i)$ quando sia $f'x_0>0$;

2° $f(x_0+i)<fx_0$ quando sia $f'x_0<0$,

$fx_0<f(x_0-i)$ quando sia $f'x_0<0$;

di qui emergono le seguenti proposizioni.

1° Se sarà $f'x>0$ per tutti i valori di x compresi fra x_0 ed x_0+i, la funzione fx al crescere della x da x_0 ad x_0+i crescerà; se sarà $f'x>0$ per tutti i valori di x compresi fra x_0 ed x_0-i, la funzione fx al decrescere della x da x_0 ad x_0-i decrescerà.

2° Se sarà $f'x<0$ per tutti i valori di x compresi fra x_0 ed x_0+i, la funzione $f'x$ al crescere della x da x_0 ad x_0+i decrescerà; se sarà $fx<0$ per tutti i valori di x compresi fra x_0 ed x_0-i, la funzione fx al decrescere della x da x_0 ad x_0-i crescerà.

Viceversa 1° se una funzione fx al crescere della x da x_0 ad x_0+i crescerà, avremo $f'x>0$ per tutti i valori di x compresi fra x_0 ed x_0+i; e se una funzione fx al decrescere della x da x_0 ad x_0-i decrescerà, avremo $f'x>0$ per tutti i valori di x compresi fra x_0 ed x_0-i.

2° Se una funzione fx al crescere della x da x_0 ad x_0+i decrescerà, avremo $f'x<0$ per tutti i valori di x compresi fra x_0 ed x_0+i; e se una funzione fx al decrescere della x da x_0 ad x_0-i crescerà, avremo $f'x<0$ per tutti i valori di x compresi fra x_0 ed x_0-i.

Esempio. Sia $fx=\frac{1}{x}$, $D\frac{1}{x}=-\frac{1}{x^2}$. Per tutti i valori di x compresi fra $+\infty$ e $-\infty$ abbiamo $D\frac{1}{x}<0$; dunque fx cre-

scendo la x fra due limiti qualunque positivi o negativi anderà decrescendo.

217. Scolio. Alcune funzioni crescono sino a certo limite, toccato il quale decrescono; il segno della derivata metterà in evidenza questo limite stesso.

Esempio. Sia $fx = \operatorname{sen} x$, $D \operatorname{sen} x = \cos x$. Sarà $D \operatorname{sen} x$ positiva da $x = 0$ sino ad $x = \frac{1}{2}\pi$, negativa da $x = \frac{1}{2}\pi$ ad $x = \pi$; dunque $\operatorname{sen} x$ crescerà al crescere di x da $x = 0$ ad $x = \frac{1}{2}\pi$, decrescerà da $x = \frac{1}{2}\pi$ ad $x = \pi$; lo che concorda con quanto si stabilisce nella Trigonometria.

218. Teorema I. *Se le funzioni* fx, Fx *e le loro derivate* $f'x$, $F'x$ *saranno continue per tutti i valori della* x *compresi fra* x_0 *ed* $x_0 + h$, *e se inoltre* $F'x$ *conserverà per questi valori il medesimo segno, avremo*

$$\frac{f(x_0+h)-fx_0}{F(x_0+h)-Fx_0} = \frac{f'(x_0+\theta h)}{F'(x_0+\theta h)},$$

dove si suppone $\theta < 1$.

Infatti stante la continuità delle funzioni fx, $f'x$, Fx, $F'x$, ed in virtù del Teorema III n. 58, sarà

$$f(x_0+h) = fx_0 + hf'(x_0+\theta h),$$
$$F(x_0+h) = Fx_0 + hF'(x_0+\theta h);$$

e quindi

$$\frac{f(x_0+h)-fx_0}{F(x_0+h)-Fx_0} = \frac{f'(x_0+\theta h)}{F'(x_0+\theta h)}; \qquad (1)$$

si esige per altro che $F'x$ per tutti i valori della x compresi fra x_0 ed x_0+h conservi il medesimo segno, perchè in questo caso la funzione Fx, crescendo la variabile da x_0 ad x_0+h, sarà costantemente crescente o costantemente decrescente (n. 216), e la funzione $F'x$ per questi valori della x non sarà mai zero; laonde non potrà nè il primo nè il secondo membro della equazione (1) riuscire infinito.

219. Scolio. Questo teorema può altresì dimostrarsi indipendentemente dal Teorema III n. 58, nel seguente modo.

Supponiamo che i valori successivi e continui della x sieno x_0, $x_0+h_0 = x_1$, $x_1+h_1 = x_2$, $x_2+h_2 = x_3$, ... $x_n+h_n = x_0+h$; i rapporti degli accrescimenti successivi delle due funzioni saranno

$$\frac{f(x_0+h_0)-fx_0}{F(x_0+h_0)-Fx_0}, \quad \frac{f(x_1+h_1)-fx_1}{F(x_1+h_1)-Fx_1}, \quad \ldots \frac{f(x_n+h_n)-fx_n}{F(x_n+h_n)-Fx_n} \tag{2}$$

ovvero, stante la supposta continuità delle due funzioni (n. 55),

$$\frac{f'x_0+\lambda_0}{F'x_0+\omega_0}, \quad \frac{f'x_1+\lambda_1}{F'x_1+\omega_1}, \quad \ldots \frac{f'x_n+\lambda_n}{F'x_n+\omega_n}; \tag{3}$$

avremo adunque (n. 24),

$$\frac{f(x_0+h)-fx_0}{F(x_0+h)-Fx_0}=M\left(\frac{f'x_0+\lambda_0}{F'x_0+\omega_0}, \quad \frac{f'x_1+\lambda_1}{F'x_1+\omega_1}, \ldots \frac{f'x_n+\lambda_n}{F'x_n+\omega_n}\right),$$

ma $\left\{\frac{f'x_0+\lambda_0}{F'x_0+\omega_0}\right\}_{h_0=0}=\frac{f'x_0}{F'x_0}, \quad \left\{\frac{f'x_1+\lambda_1}{F'x_1+\omega_1}\right\}_{h_1=0}=\frac{f'x_1}{F'x_1}, \ldots\ldots$

perciò dovrà sussistere una delle equazioni seguenti (n. 42.);

$$\frac{f(x_0+h)-fx_0}{F(x_0+h)-Fx_0}=\frac{f'x_0}{F'x_0}, \quad \frac{f(x_0+h)-fx_0}{F(x_0+h)-Fx_0}=\frac{f'x_1}{F'x_1}, \ldots$$

$$\frac{f(x_0+h)-fx_0}{F(x_0+h)-Fx_0}=M\left(\frac{f'x_0}{F'x_0}, \quad \frac{f'x_1}{F'x_1}, \ldots \frac{f'x_n}{F'x_n}\right); \tag{4}$$

la prima di queste equazioni è assurda e non può aver luogo; infatti in virtù del Teorema I n. 55, si ha

$$\frac{f(x_0+h)-fx_0}{F(x_0+h)-Fx_0}=\frac{f'x_0+\lambda_0}{F'x_0+\omega_0};$$

eccettuata adunque la prima delle equazioni (4), le altre dimostrano che il valore del rapporto

$$\frac{f(x_0+h)-fx_0}{F(x_0+h)-Fx_0}$$

dee coincidere con uno dei valori che acquista la frazione $\frac{f'x}{F'x}$ allorquando la x passa dal valore x_0 al valore x_n inclusive, che è quanto dire allorquando la x riceve uno dei valori compresi fra x_0 ed x_n+h_n, ovvero fra x_0 ed x_0+h. Or la frazione $\frac{f'x}{F'x}$ in virtù della continuità del numeratore e del denominatore è capace di passare dal valore che essa acqui-

sta per $x=x_0$ a quello che riceve per $x=x_0+h$, passando rigorosamente per tutti i valori intermedi, nè può la frazione medesima per alcuno di questi valori della x riuscire infinita, perchè il denominatore $F'x$ dovendo conservare il medesimo segno non passa giammai per lo zero, dunque fra i valori numerici della frazione $\frac{f'x}{F'x}$ dovremo incontrarne uno, che diremo $\frac{f'x_i}{F'x_i}$, uguale al rapporto $\frac{f(x_0+h)-fx_0}{F(x_0+h)-Fx_0}$; dunque

$$\frac{f(x_0+h)-fx_0}{F(x_0+h)-Fx_0}=\frac{f'x_i}{F'x_i};$$

ora x_i dovendo esser compreso fra x_0 ed x_0+h può rappresentarsi, quando sia $\theta<1$, con $x_0+\theta h$; dunque

$$\frac{f(x_0+h)-fx_0}{F(x_0+h)-Fx_0}=\frac{f'(x_0+\theta h)}{F'(x_0+\theta h)}. \qquad (5)$$

220. Corollario I. Affinchè una funzione frazionaria della x sia continua fra i limiti x_0 ed x_0+h è necessario che sieno continui dentro i medesimi limiti il numeratore e il denominatore di essa, e che il denominatore per tutti i valori di x compresi fra x_0 ed x_0+h non possa ridursi a zero; dunque l'equazione

$$\frac{f(x+h)-fx}{F(x+h)-Fx}=\frac{f'(x+\theta h)}{F'(x+\theta h)},$$

sarà vera per un valore particolare della x, $x=x_0$, purchè le frazioni $\frac{fx}{Fx}$, $\frac{f'x}{F'x}$ sieno continue per tutti i valori della x compresi fra x_0 ed x_0+h.

Questa equazione non che le utili applicazioni di essa che passiamo ad esporre sono opera del signor Cauchy (1).

(1) V. *Cauchy*, *Leçons sur le calcul diff.* Paris 1829. 4e Leçon. *Moigno*, *Leçons de calcul diff. et int.* Paris 1840. T. I. 5e Leçon.

221. Corollario II. Sia x_0 radice di ambedue le equazioni $fx = 0$, $Fx = 0$, e le funzioni $\frac{fx}{Fx}$, $\frac{f'x}{F'x}$ sieno continue da x_0 ad $x_0 + h$, avremo

$$\frac{f(x_0 + h)}{F(x_0 + h)} = \frac{f'(x_0 + \lambda)}{F'(x_0 + \lambda)},$$

dove sarà $\lambda < h$.

222. Corollario III. Sia $\lambda_1 < \lambda, \lambda_2 < \lambda_1, \lambda_3 < \lambda_2, \ldots$ avremo

$$\frac{f'(x_0 + \lambda)}{F'(x_0 + \lambda)} = \frac{f''(x_0 + \lambda_1)}{F''(x_0 + \lambda_1)}, \quad \frac{f''(x_0 + \lambda_1)}{F''(x_0 + \lambda_1)} = \frac{f'''(x_0 + \lambda_2)}{F'''(x_0 + \lambda_2)}, \ldots$$

ed in fine
$$\frac{f^{(n-1)}(x_0 + \lambda_{n-2})}{F^{(n-1)}(x_0 + \lambda_{n-2})} = \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta h)}{F^{(n)}(x_0 + \theta h)}; \tag{6}$$

purchè per $x = x_0$ vadano a zero le derivate delle funzioni fx, Fx sino all' ordine $n-1$ inclusive, e purchè le frazioni

$$\frac{f'x}{F'x}, \frac{f''x}{F''x}, \ldots \frac{f^{(n)}x}{F^{(n)}x},$$

sieno continue per tutti i valori della x compresi fra x_0 ed $x_0 + h$. Nella equazione (6) dovremmo porre λ_{n-1} in luogo di θh; ma λ_{n-1} sarebbe al pari di θh una frazione indeterminata di h. Frattanto risalendo alla equazione (1) potremo stabilire che *se le derivate successive delle funzioni* $\mathrm{f}\mathbf{x}$ *ed* $\mathrm{F}\mathbf{x}$ *fino all' ordine* $\mathrm{n} - 1$ *inclusive anderanno a zero per* $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0$, *e se le funzioni*

$$\frac{\mathrm{fx}}{\mathrm{Fx}}, \frac{\mathrm{f'x}}{\mathrm{F'x}}, \frac{\mathrm{f''x}}{\mathrm{F''x}}, \ldots \frac{\mathrm{f^{(n)}x}}{\mathrm{F^{(n)}x}},$$

saranno continue per tutti i valori della x *compresi fra* x_0 *ed* $\mathrm{x}_0 + h$ *avremo*

$$\frac{f(x_0 + h) - fx_0}{F(x_0 + h) - Fx_0} = \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta h)}{F^{(n)}(x_0 + \theta h)}.$$

Se tutte queste condizioni si verificassero, ed x_0 fosse inoltre radice della equazione $Fx = 0$, avremmo

$$\frac{f(x_0 + h) - fx_0}{F(x_0 + h)} = \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta h)}{F^{(n)}(x_0 + \theta h)}. \tag{7}$$

Se poi x_0 fosse radice di ambedue le equazioni $fx = 0$, $Fx = 0$, allora sarebbe

$$\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)} = \frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{F^{(n)}(x_0+\theta h)}.$$

223. Corollario IV. Sia $Fx = (x - x_0)^n$; risulterà

$$F'x = n(x-x_0)^{n-1}$$

$$F''x = n(n-1)(x-x_0)^{n-2}$$

$$F'''x = n(n-1)(n-2)(x-x_0)^{n-3}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$F^{(n)}x = n(n-1)(n-2)\ldots 4.3.2.1\,;$$

in questo caso per $x = x_0$ anderanno a zero la funzione Fx e le sue derivate dalla prima sino a quella dell'ordine $n - 1$ inclusive, ed i rapporti $\frac{fx}{Fx}, \frac{f'x}{F'x} \ldots \frac{f^{(n)}x}{F^{(n)}x}$ saranno funzioni continue da x_0 ad $x_0 + h$ ove sieno continue $fx, f'x, \ldots f^{(n)}x$. Perciò l'equazione (7) darà

$$f(x_0+h) - fx_0 = \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x_0+\theta h). \tag{8}$$

Se poi verificheremo essere $fx_0 = 0$, allora sarà

$$f(x_0+h) = \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x_0+\theta h). \tag{9}$$

224. Corollario V. Facendo $n = 1$ l'equazione (8) dà

$$f(x_0+h) = fx_0 + hf'(x_0+\theta h);$$

teorema che già dimostrammo al n. 58. Questo teorema emerge altresì dalla equazione (1) n. 218, ponendo $Fx = x$. Dunque il Teorema III n. 58, ed il Teorema I n. 218, possono considerarsi a vicenda come principio e conseguenza l'uno dell'altro.

225. Corollario VI. Se i valori della x in luogo di essere compresi fra x_0 ed $x_0 + h$ fossero compresi fra 0 ed h, le formule precedenti, nella supposizione che le funzioni fx ed Fx

soddisfacciano alle condizioni stabilite, potranno adattarsi a questo caso facendo $x_0 = 0$; talchè avremo

$$\frac{fh}{Fh} = \frac{f^{(n)}(\theta h)}{F^{(n)}(\theta h)},$$

$$fh - f0 = \frac{h^n}{1.2..n} f^{(n)}(\theta h),$$

$$fh = \frac{h^n}{1.2..n} f^{(n)}(\theta h);$$

nelle quali equazioni la h, che qui esprime un valore particolare della x, potrà cambiarsi in x_0; tali equazioni si traducono manifestamente nelle proposizioni seguenti.

1° Se per $x = 0$, le funzioni fx, Fx e le loro derivate sino a quella dell'ordine $n - 1$ inclusive anderanno a zero, e se inoltre le funzioni

$$\frac{fx}{Fx}, \ \frac{f'x}{F'x}, \ldots \frac{f^{(n)}x}{F^{(n)}x},$$

saranno continue per tutti i valori della x compresi fra 0 ed x_0, avremo

$$\frac{fx_0}{Fx_0} = \frac{f^{(n)}(\theta x_0)}{F^{(n)}(\theta x_0)}. \tag{10}$$

2° Se per $x = 0$ le derivate della funzione fx sino a quella dell'ordine $n - 1$ saranno nulle, e se oltracciò la funzione fx e le sue derivate compresa l' n^{ma} saranno continue per tutti i valori della x compresi fra 0 ed x_0, avremo

$$fx_0 - f0 = \frac{x^n}{1.2..n} f^{(n)}(\theta x_0). \tag{11}$$

3° Finalmente se congiuntamente alle condizioni precedenti si verificherà essere $f0 = 0$, avremo

$$fx_0 = \frac{x^n}{1.2..n} f^{(n)}(\theta x_0). \tag{12}$$

226. Corollario VII. Ponendo mente all'equazione (12) potremo anche stabilire il seguente teorema.

Se per $x=0$ una funzione della x, che diremo U, e le sue derivate successive sino a quella dell'ordine $n-1$ inclusive, anderanno a zero per $x=0$, e se oltracciò la funzione medesima e le sue derivate non esclusa quella dell'ordine n saranno continue per tutti i valori della x da 0 ad x_0, potrà la U esprimersi mediante la quantità $\frac{x^n}{1.2..n}$ moltiplicata per la derivata n^{ma} di U, purchè nella derivata medesima si sostituisca θx ad x: il qual risultato sarà vero per qualunque valore di x compreso fra i limiti 0 ed x_0.

227. Corollario VIII. Abbiasi la funzione fx; sarà

$$f(x+h)=fx+f(x+h)-fx;$$

ponendo
$$\alpha=f(x+h)-fx, \tag{13}$$
avremo
$$f(x+h)=fx+\alpha; \tag{14}$$
dove α sarà una funzione di h e di x capace di andare a zero per $h=0$. Ciò posto si osservi che dall'equazione (13) si ha

$$\alpha'_h=f'(x+h); \tag{15}$$

se adunque α ed α'_h saranno funzioni continue per tutti i valori della h da 0 ad h, lo che avrà luogo quando fx ed $f'x$ saranno continue per tutti i valori della x da x_0 ad x_0+h, avremo (n. 226)

$$\alpha=hf'(x+\theta h) \tag{16}$$

dove sarà $\theta<1$; quindi dalla (14) otterremo

$$f(x+h)=fx+hf'(x+\theta h); \tag{17}$$

equazione già nota (n. 224).

In secondo luogo, poichè

$$f'(x+\theta h)=f'x+f'(x+\theta h)-f'x,$$

ponendo
$$\alpha_1=f'(x+\theta h)-f'x, \tag{18}$$
avremo
$$f'(x+\theta h)=f'x+\alpha_1; \tag{19}$$
dove α_1 sarà una funzione di h e di x capace di andare a zero per $h=0$; quindi la (16) darà

$$\alpha=hf'x+\beta; \tag{20}$$

e qui pure β sarà una funzione di h e di x capace di andare a

zero per $h=0$: frattanto la (14) si muterà nella seguente

$$f(x+h)=fx+hf'x+\beta\,; \tag{21}$$

la quale dà

$$\beta'_h=f'(x+h)-f'x,$$
$$\beta''_h=f''(x+h);$$

donde si vede che per $h=0$ risulterà $\beta'_h=0$: se adunque $fx, f'x, f''x$ saranno continue per tutti i valori della x compresi fra x_0 ed x_0+h, supponendo $\theta_1<1$, avremo (n. 226)

$$\beta=\frac{h^2}{1.2}f''(x+\theta_1 h); \tag{22}$$

e quindi per la (21),

$$f(x+h)=fx+\frac{h}{1}f'x+\frac{h^2}{1.2}f''(x+\theta_1 h). \tag{23}$$

In terzo luogo, poichè

$$f''(x+\theta_1 h)=f''x+f''(x+\theta_1 h)-f''x,$$

ponendo $$\alpha_2=f''(x+\theta_1 h)-f''x, \tag{24}$$

avremo $$f''(x+\theta_1 h)=f''x+\alpha_2; \tag{25}$$

dove α_2 sarà una funzione di h e di x capace di andare a zero per $h=0$; quindi la (22) darà

$$\beta=\frac{h^2}{1.2}f''x+\gamma, \tag{26}$$

e qui pure γ sarà una funzione di h e di x capace di andare a zero per $h=0$; frattanto la (21) si muterà nella seguente;

$$f(x+h)=fx+\frac{h}{1}f'x+\frac{h^2}{1.2}f''x+\gamma; \tag{27}$$

la quale dà

$$\gamma'_h=f'(x+h)-f'x-hf''x,$$
$$\gamma''_h=f''(x+h)-f''x,$$
$$\gamma'''_h=f'''(x+h);$$

quindi si vede che per $h=0$ dee risultare $\gamma_h'=0$, $\gamma_h''=0$. Se adunque fx, $f'x$, $f''x$, $f'''x$ saranno continue per tutti i valori della x compresi fra x_0 ed x_0+h; supponendo $\theta_2<1$, avremo (n. 226)

$$\gamma = \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x + \theta_2 h)\,; \tag{28}$$

e quindi per la (27)

$$f(x+h) = fx + \frac{h}{1} f'x + \frac{h^2}{1.2} f''x + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x + \theta_2 h). \tag{29}$$

In quarto luogo, poichè

$$f'''(x + \theta_2 h) = f'''x + \alpha_3,$$

avremo dalla (29)

$$f(x+h) = fx + \frac{h}{1} f'x + \frac{h^2}{1.2} f''x + \frac{h^3}{1.2.3} f'''x + \delta, \tag{30}$$

dove δ sarà una funzione di h e di x capace di andare a zero per $h = 0$; vedremo poi come di sopra che per $h = 0$ risulta $\delta_h' = 0$, $\delta_h'' = 0$, $\delta_h''' = 0$; oltrechè troveremo $\delta_h^{\text{IV}} = f^{\text{IV}}(x + h)$; se adunque $fx, f'x, f''x, f'''x$, $f^{\text{IV}}x$ saranno continue per tutti i valori della x compresi fra x_0 ed $x_0 + h$, supponendo $\theta_3 < 1$, risulterà (n. 226)

$$\delta = \frac{h^4}{1.2.3.4} f^{\text{IV}}(x + \theta_3 h)\,; \tag{31}$$

e quindi per la (30)

$$f(x+h) = fx + \frac{h}{1} f'x + \frac{h^2}{1.2} f''x + \frac{h^3}{1.2.3} f'''x + \frac{h^4}{1.2.3.4} f^{\text{IV}}(x + \theta_3 h). \tag{32}$$

Frattanto è manifesto che siffatto calcolo potrà continuarsi finchè le derivate non cesseranno di essere continue dentro i limiti x_0 ed $x_0 + h$, e che la legge secondo cui procede il secondo membro delle equazioni (17), (23), (29), (32) si manterrà invariabile. Infatti immaginando che il calcolo sia stato spinto sino alla derivata m$^{\text{ma}}$ della funzione, e che perciò siasi ottenuta l'equazione

$$f(x+h) = fx + \frac{h}{1} f'x + \frac{h^2}{1.2} f''x \; \ldots \ldots + \frac{h^m}{1.2\ldots m} f^{(m)}(x + \omega h),$$

ponendo $\qquad f^{(m)}(x + \omega h) = f^{(m)}x + \alpha_m,$

avremo

$$f(x+h) = fx + \frac{h}{1} f'x + \frac{h^2}{1.2} f''x \; \ldots \ldots + \frac{h^m}{1.2\ldots m} f^{(m)}x + \lambda,$$

dove λ rappresenterà una funzione di x e di h capace di andare

a zero per $h=0$. Vedremo poi agevolmente che per $h=0$ risulterà pure $\lambda_h'=0, \lambda_h''=0, \ldots \lambda_h^{(m)}=0$; inoltre troveremo

$$\lambda_h^{(m+1)}=f^{(m+1)}(x+h);$$

se adunque $fx, f'x, f''x \ldots f^{(m+1)}x$ saranno funzioni continue per tutti i valori della x compresi fra x_0 ed x_0+h, supponendo $\omega_1<\omega$, avremo (n. 226)

$$\lambda=\frac{h^{m+1}}{1.2\ldots(m+1)}f^{(m+1)}(x+\omega_1 h),$$

e quindi

$$f(x+h)=fx+\frac{h}{1}f'x \;\ldots\ldots+\frac{h^m}{1.3..m}f^{(m)}x.$$

$$+\frac{h^{m+1}}{1.2\ldots(m+1)}f^{(m+1)}(x+\omega_1 h);$$

dunque la legge, poichè non muta quando m diventa $m+1$, non muterà quando $m+1$ diverrà $m+2$, e così via discorrendo: dunque indicando con n un numero qualunque intero e positivo, avremo

$$f(x+h)=fx+\frac{h}{1}f'x \;\ldots\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}x$$

$$+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h);$$

la quale equazione sarà vera per qualunque valore della x preso nei limiti dentro i quali fx e le sue successive derivate sino alla n^{ma} inclusive sono continue. Dunque una funzione fx algebrica o trascendente quando soddisfarà a queste condizioni si potrà considerare come composta d'una funzione intera di h espressa da

$$fx+\frac{h}{1}f'x+\frac{h^2}{1.2}f''x \;\ldots\ldots+\frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}x,$$

e di un *termine complementario* ossia *resto* espresso da

$$\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h).$$

228. Corollario IX. Se per qualunque valore x_0 di x preso ne' limiti dentro i quali fx e le sue derivate sono continue, il termine complementario decrescerà indefinitamente a misura che n crescerà, posto n infinitamente grande, il termine complementario

medesimo riuscirà infinitamente piccolo, e sarà infinitamente remoto dal primo termine fx_0, per cui avremo

$$f(x_0+h)=fx_0+\frac{h}{1}f'x_0+\frac{h^2}{1.2}f''x_0+\frac{h^3}{1.2.3}f'''x_0+\ldots.$$

cioè la serie infinita così detta del Taylor; la quale fu già dimostrata per qualunque funzione $f(x+h)$ nell'ipotési che x ed h fossero indeterminate (n. 88).

Se dopo aver presi gli n primi termini di questa serie si volesse stimare l'errore E che si commette trascurando i termini rimanenti, potremmo ricorrere all'espressione del termine complementario. Infatti sieno U e V il minimo ed il massimo dei valori che riceve la funzione $f^{(n)}x$ ne' limiti x_0 ed x_0+h della variabile, avremo

$$f^{(n)}(x_0+\theta h)>U,\quad f^{(n)}(x_0+\theta h)<V;$$

conseguentemente

$$\frac{Uh^n}{1.2.3\ldots n},\qquad \frac{Vh^n}{1.2.3\ldots n},$$

saranno i limiti dentro i quali trovasi compreso l'errore E. In altri termini

$$E=M\left(\frac{Uh^n}{1.2.3..n},\ \frac{Vh^n}{1.2.3..n}\right).$$

229. Scolio. Una funzione fx che per $x=x_0$ non diventa infinita nè immaginaria, si può sempre considerare come continua ne'limiti x_0 ed x_0+h della variabile, ove per altro h si reputi infinitamente piccola; dunque supponendo h infinitamente piccola,

1° L'equazione

$$\frac{f(x_0+h)-fx_0}{F(x_0+h)-Fx_0}=\frac{f'(x+\theta h)}{F'(x+\theta h)}$$

avrà sempre luogo, purchè i valori fx_0 Fx_0 non sieno infiniti nè immaginari.

2° L'equazione

$$\frac{f(x_0+h)-fx_0}{F(x_0+h)-Fx_0}=\frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{F^{(n)}(x_0+\theta h)}$$

avrà luogo anch'essa, semprechè i valori fx_0, Fx_0 non sieno infiniti, nè immaginari, e purchè le derivate di fx e di Fx sino all'ordine $n-1$ inclusive, vadano a zero per $x=x_0$.

3° L' equazione

$$f(x+h)=fx_0+hf'(x_0+\theta h)$$

avrà luogo se il valore fx_0 non sarà infinito nè immaginario.

4° L' equazione

$$fx_0=f0+x_0f'(\theta x_0)$$

che emerge dalla precedente, sussisterà per x infinitamente piccola, purchè il valore $f0$ non sia infinito nè immaginario.

XXIII. *Le funzioni immaginarie* (*).

230. Principio I. Abbiasi l'equazione del secondo grado

$$x^2+ax+b=0; \tag{1}$$

sarà

$$x=-\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2-b)}. \tag{2}$$

Or se avverrà che sia $\frac{1}{4}a^2<b$, per esempio

$$b=\tfrac{1}{4}a^2+e, \tag{3}$$

dove $e>0$, la (1) diverrà

$$x^2+ax+\tfrac{1}{4}a^2+e=0,$$

ovvero

$$(x+\tfrac{1}{2}a)^2+e=0; \tag{4}$$

e la (2)

$$x=-\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{-e};$$

cioè le due radici della equazione proposta saranno immaginarie; in questo caso per altro non esiste alcun valore di x positivo o negativo per il quale la somma delle due quantità $(x+\frac{1}{2}a)^2$ ed e, necessariamente positive, possa riescire identicamente uguale a zero; dunque *le radici immaginarie d'una equazione dimostrano che quel problema di cui l'equazione medesima esprime la traduzione analitica è assurdo.*

(*) Sebbene la teoria delle funzioni immaginarie si trovi esposta in grandissima parte nell'Introduzione al Calcolo, nullameno sull'esempio di vari distinti autori d'Elementi di Calcolo differenziale, il Cauchy, l'Ab. Moigno, il Navier, il Duhamel, mi è sembrato doverla trattare estesamente a questo luogo.

231. Corollario. Abbiasi l'equazione a due indeterminate x, y,

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2; \qquad (5)$$

sarà $$y=b\pm\sqrt{([x-(a-r)][(a+r)-x])}; \qquad (6)$$

affinchè il problema da cui è stata desunta l'equazione (5) non sia assurdo, dovranno le radici espresse dalla formula (6) non essere immaginarie; perlochè dovrà farsi

$$x=M(a+r,a-r);$$

vero è che le due radici possono non riuscire immaginarie anco per $x<a-r$ ed $x>a+r$, ma queste due condizioni facendo luogo all'assurdo $x+a+r<x+a-r$, ovvero $+r<-r$, sono manifestamente incompatibili fra loro, e non ammissibili.

Determinare in quali casi l'espressione analitica della radice d'una equazione divenga immaginaria, vuol dire determinare in quali casi la risoluzione del problema cessi di esser possibile.

232. Principio II. Sostituiscasi nella proposta che è quanto dire nella equazione (4) l'espressione $-\frac{1}{2}a\pm\sqrt{-e}$ in luogo della x; avremo l'equazione simbolica

$$(\pm\sqrt{-e})^2+e=0; \qquad (7)$$

questa equazione per altro si muterà in una effettiva identità quando il quadrato di $\pm\sqrt{-e}$ si reputi uguale a $-e$; infatti risulterà $-e+e=0$. Dunque *le radici immaginarie godranno come le radici reali della proprietà di soddisfare alla equazione, purchè il quadrato di* $\pm\sqrt{-e}$ *si reputi uguale alla quantità* $-e$ *posta sotto il segno radicale.*

233. Corollario I. Sia

$$x=\sqrt{-e},\ y=\sqrt{-i}; \qquad (8)$$

in virtù del precedente principio, avremo

$$x^2=-e,\ y^2=-i;$$

e quindi

$$x^2y^2=ei,\ xy=\pm\sqrt{ei};$$

ma i valori (8) danno

$$xy=\sqrt{-e}.\sqrt{-i},$$

perciò sarà

$$\sqrt{-e}.\sqrt{-i}=\pm\sqrt{ei}.$$

Or sembrerebbe che al prodotto $\sqrt{-e}.\sqrt{-i}$ potessero com-

petere i due valori $+\sqrt{ei}$, $-\sqrt{ei}$; il primo di questi valori deesi peraltro rigettare come contrario al principio stabilito: infatti se fosse

$$\sqrt{-e}\,.\sqrt{-i}=+\sqrt{ei}$$

facendo $e=i$ avremmo

$$\sqrt{-e}\,.\sqrt{-e}=+\sqrt{e^2} \text{ ovvero } (\sqrt{-e})^2=+e,$$

mentrechè ponendo

$$\sqrt{-e}\,.\sqrt{-i}=-\sqrt{ei}$$

si ottiene, per $e=i$, $(\sqrt{-e})^2=-e$, come richiede il summenmentovato principio; dunque

$$\sqrt{-e}\,.\sqrt{-i}=-\sqrt{ei}. \tag{9}$$

234. Corollario II. Sia

$$x=\sqrt{e},\quad y=\sqrt{-1}; \tag{10}$$

sarà $$x^2=e,\quad y^2=-1,$$

e quindi $$x^2y^2=-e,\quad xy=\pm\sqrt{-e};$$

ma i valori (10) danno

$$xy=\sqrt{e}\sqrt{-1},$$

dunque $$\sqrt{e}\sqrt{-1}=\pm\sqrt{-e};$$

non potendosi concedere che sia

$$\sqrt{e}\sqrt{-1}=-\sqrt{-e},$$

(perchè in tal caso facendo $e=1$, risulterebbe $2\sqrt{-1}=0$ e quindi $\sqrt{-1}=0$, $(\sqrt{-1})^2=0$, cioè l'assurdo $-1=0$) sarà

$$\sqrt{-e}=\sqrt{e}\sqrt{-1}. \tag{11}$$

235. Corollario III. Sia

$$x=\sqrt{e},\quad y=\sqrt{-i}; \tag{12}$$

sarà $$x^2=e,\quad y^2=-i;$$

e quindi $$x^2y^2=-ei,\quad xy=\pm\sqrt{-ei};$$

ma dai valori dati (12) si ha

$$xy=\sqrt{e}\sqrt{-i},$$

dunque $$\sqrt{e}\sqrt{-i}=\pm\sqrt{-ei};$$

non potendosi concedere che sia

$$\sqrt{e}\sqrt{-i}=-\sqrt{-ei},$$

(perchè allora facendo $i=1$ risulterebbe $\sqrt{e}\sqrt{-1}=-\sqrt{-e}$, lo che è contrario al Corollario precedente) sarà

$$\sqrt{e}\sqrt{-i}=\sqrt{-ei}. \qquad (13)$$

236. Corollario IV. Sia

$$x=\sqrt{-e},\ y=\sqrt{-i}; \qquad (14)$$

sarà $$x^2=-e,\ y^2=-i;$$

e quindi $$\frac{x^2}{y^2}=\frac{e}{i},\ \frac{x}{y}=\pm\sqrt{\frac{e}{i}};$$

ma pei valori (14) $$\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{-e}}{\sqrt{-i}},$$

dunque $$\frac{\sqrt{-e}}{\sqrt{-i}}=\pm\sqrt{\frac{e}{i}};$$

or non potendo essere

$$\frac{\sqrt{-e}}{\sqrt{-i}}=-\sqrt{\frac{e}{i}},$$

(perchè allora facendo $e=i$ si troverebbe $\frac{\sqrt{-e}}{\sqrt{-e}}=-1$, $\sqrt{-e}=-\sqrt{-e}$, $2\sqrt{-e}=0$, cioè l'assurdo $\sqrt{-e}=0$) sarà

$$\frac{\sqrt{-e}}{\sqrt{-i}}=\sqrt{\frac{e}{i}}. \qquad (15)$$

237. Corollario V. Sia

$$x=\sqrt{e},\ y=\sqrt{-1}; \qquad (16)$$

sarà $$x^2=e,\ y^2=-1,$$

e quindi $$\frac{x^2}{y^2}=-e,\ \frac{x}{y}=\pm\sqrt{-e},$$

ma pei valori (16) $$\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{-1}},$$

dunque $$\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{-1}}=\pm\sqrt{-e};$$

non potendo essere

$$\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{-1}}=+\sqrt{-e},$$

(perchè in questo caso per $e=1$ risulterebbe $\frac{1}{\sqrt{-1}}=\sqrt{-1}$ e quindi $1=\sqrt{-1}.\sqrt{-1}=(\sqrt{-1})^2$; il che è contrario al principio stabilito al n. 232, sarà

$$\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{-1}}=-\sqrt{-e}. \tag{17}$$

238. Corollario VI. Sia

$$x=\sqrt{e}, \qquad y=\sqrt{-i}; \tag{18}$$

sarà
$$x^2=e, \qquad y^2=-i$$

e quindi
$$\frac{x^2}{y^2}=-\frac{e}{i}, \quad \frac{x}{y}=\pm\sqrt{-\frac{e}{i}};$$

ma dai valori (18) si ha

$$\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{-i}},$$

dunque
$$\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{-i}}=\pm\sqrt{-\frac{e}{i}};$$

or non potendo farsi

$$\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{-i}}=+\sqrt{-\frac{e}{i}}$$

(perchè fatto $i=1$ si troverebbe $\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{-1}}=+\sqrt{-e}$, il che è contrario al Corollario precedente), sarà

$$\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{-i}}=-\sqrt{-\frac{e}{i}}. \tag{19}$$

239. Corollario VII. Sia

$$x=\sqrt{-e}, \quad y=\sqrt{i}; \tag{20}$$

sarà
$$\frac{\sqrt{-e}}{\sqrt{i}}=\frac{1}{\sqrt{i}}\sqrt{-e}=\sqrt{\frac{1}{i}}\sqrt{-e};$$

conseguentemente

$$\frac{\sqrt{-e}}{\sqrt{i}}=\sqrt{-\frac{e}{i}}. \tag{21}$$

240. Corollario VIII. Stabilita la regola (n. 233) mediante la quale dee farsi il prodotto delle quantità immaginarie, sarà facile trovare le espressioni delle successive potenze di $\sqrt{-1}$, e sarà

$$(\sqrt{-1})^2 = -1,$$
$$(\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^2\sqrt{-1} = -\sqrt{-1},$$
$$(\sqrt{-1})^4 = (\sqrt{-1})^3\sqrt{-1} = +1,$$
$$(\sqrt{-1})^5 = (\sqrt{-1})^4\sqrt{-1} = +\sqrt{-1};$$

da questo punto in poi le successive potenze di $\sqrt{-1}$ si riproducono periodicamente, talchè indicando con p un numero dispari, avremo

$$(\sqrt{-1})^{2p} = -1,$$
$$(\sqrt{-1})^{4p} = +1,$$
$$(\sqrt{-1})^{2p+1} = -\sqrt{-1},$$
$$(\sqrt{-1})^{4p+1} = +\sqrt{-1}.$$

Nello stesso modo si ottiene

$$(x\sqrt{-1})^2 = -x^2,$$
$$(x\sqrt{-1})^3 = -x^3\sqrt{-1};$$
$$(x\sqrt{-1})^4 = +x^4,$$
$$(x\sqrt{-1})^5 = +x^5\sqrt{-1};$$

e così di seguito.

241. Principio III. Supponiamo che in virtù di calcoli fatti secondo le regole precedentemente stabilite, siasi ottenuta l'equazione immaginaria

$$a + b\sqrt{-1} = c + d\sqrt{-1};$$

avremo $$a - c = -(b-d)\sqrt{-1};$$

e quindi $$(a-c)^2 = (b-d)^2(\sqrt{-1})^2,$$

ovvero $$(a-c)^2 + (b-d)^2 = 0;$$

ma i quadrati $(a-c)^2$, $(b-d)^2$ sono essenzialmente positivi, perciò l'equazione $a + b\sqrt{-1} = c + d\sqrt{-1}$ potrà verificarsi nel solo caso in cui abbiasi

$$a = c, \quad b = d;$$

si può adunque stabilire che *sussistendo come risultato di calcoli legittimi l'equazione immaginaria* $a + b\sqrt{-1} = c + d\sqrt{-1}$, *dovranno sussistere in pari tempo le due equazoni* $a = c$, $b = d$.

242. Corollario I. Posto adunque che l'espressione analitica immaginaria $a + b\sqrt{-1}$ risulti uguale a zero sarà $a = 0$, $b = 0$. Infatti avendosi

$$a + b\sqrt{-1} = 0,$$

sarà $a + b\sqrt{-1} = 0 + 0\sqrt{-1}$; e quindi in virtù del principio precedente $a = 0$, $b = 0$.

In altro modo; essendo

$$a = -b\sqrt{-1},$$

avremo
$$a^2 = b^2(\sqrt{-1})^2,$$
ovvero
$$a^2 + b^2 = 0;$$

la quale equazione, poichè a^2 e b^2 sono essenzialmente positivi, non può sussistere ammenochè sia $a = 0$, $b = 0$.

243. Corollario II. Abbiansi le due equazioni

$$a = c, \quad b = d;$$

esse potranno comprendersi in una sola equazione immaginaria, che sarà la seguente

$$a + b\sqrt{-1} = c + d\sqrt{-1};$$

di questa guisa ambedue le equazioni date saranno sempre in essere, e potranno, quando occorra, separarsi, avendo ricorso al Principio precedente: la qual cosa non potrebbe ottenersi mediante l'equazione reale $a + b = c + d$. Da ciò si raccoglie che *una equazione immaginaria è la rappresentazione simbolica di due equazioni fra quantità reali.*

Non è superfluo il notare che l'equazione simbolica risultante dalle equazioni reali $a = c$, $b = d$, può ben anche scriversi in questa guisa, $a - b\sqrt{-1} = c - d\sqrt{-1}$.

244. Corollario III. Poichè

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots$$

e
$$\operatorname{sen} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots$$

in virtù del Corollario precedente potremo porre

$$\cos x \pm \sqrt{-1} \operatorname{sen} x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots$$
$$\pm \sqrt{-1}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \dots\right)$$

ovvero, stante il Corollario VIII (n. 240)

$$\cos x \pm \sqrt{-1} \operatorname{sen} x = 1 \pm \frac{(x\sqrt{-1})^1}{1} + \frac{(x\sqrt{-1})^2}{1.2} \pm$$
$$\frac{(x\sqrt{-1})^3}{1.2.3} + \frac{(x\sqrt{-1})^4}{1.2.3.4} \pm \dots \quad (22)$$

Ciò posto si osservi che il secondo membro di questa equazione coinciderebbe colla serie

$$1 \pm \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} \pm \frac{x^3}{1.2.3.} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \pm \dots \quad (23)$$

quando ad x si sostituisse $x\sqrt{-1}$; e siccome tal serie, essendo lo sviluppo dell'esponenziale $e^{\pm x}$, ed è rappresentata da questo esponenziale stesso, perciò anche la serie (22) potrà essere rappresentata dall'immaginario $e^{\pm x\sqrt{-1}}$; non vogliamo già dire che le espressioni $e^{+x\sqrt{-1}}, e^{-x\sqrt{-1}}$ si debbano per questo considerare come quantità esponenziali; esse potranno chiamarsi per estensione quantità esponenziali, cioè *esponenziali immaginarie*, ma nullameno dovranno considerarsi come simboli unicamente destinati a rappresentare quelle due serie immaginarie che possono sempre ottenersi sostituendo $x\sqrt{-1}$, $-x\sqrt{-1}$ ad x nello sviluppo di e^x. Avremo frattanto

$$e^{+x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \operatorname{sen} x, \quad (24)$$
$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1} \operatorname{sen} x; \quad (25)$$

le quali saranno per conseguenza due equazioni simboliche risultanti dagli sviluppi di sen x e cos x, stante il Principio enunciato nel Corollario II, n. 243.

Frattanto sarà facile dimostrare che le quantità esponenziali immaginarie debbono trattarsi nei calcoli secondo le medesime regole proprie dei radicali reali. Infatti

$$1^\circ \quad e^{x\sqrt{-1}}.e^{y\sqrt{-1}} = (\cos x + \sqrt{-1} \operatorname{sen} x)(\cos y + \sqrt{-1} \operatorname{sen} y)$$
$$= \cos(x+y) + \sqrt{-1} \operatorname{sen}(x+y) = e^{(x+y)\sqrt{-1}}$$

$$2^\circ\ e^{x\sqrt{-1}} : e^{y\sqrt{-1}} = \frac{\cos x + \sqrt{-1}\,\text{sen}\, x}{\cos y + \sqrt{-1}\,\text{sen}\, y}$$

$$= (\cos x + \sqrt{-1}\,\text{sen}\, x)(\cos y - \sqrt{-1}\,\text{sen}\, y)$$

$$= \cos(x - y) + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,(x - y) = e^{(x-y)\sqrt{-1}}.$$

$$3^\circ\ [e^{x\sqrt{-1}}]^m = [\cos x + \sqrt{-1}\,\text{sen}\, x]^m$$

$$= (\cos x + \sqrt{-1}\,\text{sen}\, x)(\cos x + \sqrt{-1}\,\text{sen}\, x)(\cos x + \sqrt{-1}\,\text{sen}\, x)\ldots$$

$$= \cos mx + \sqrt{-1}\,\text{sen}\, mx = e^{mx\sqrt{-1}};$$

dove m si suppone intero e positivo.

$$4^\circ\ [e^{x\sqrt{-1}}]^{-m} = [\cos x + \sqrt{-1}\,\text{sen}\, x]^{-m}$$

$$= \frac{1}{[\cos x + \sqrt{-1}\,\text{sen}\, x]^m} = \frac{1}{\cos mx + \sqrt{-1}\,\text{sen}\, mx}$$

$$= \cos mx - \sqrt{}\,\text{sen}\, mx = e^{-mx\sqrt{-1}}$$

$$5^\circ\ [e^{x\sqrt{-1}}]^{\frac{1}{m}} = [\cos x + \sqrt{-1}\,\text{sen}\, x]^{\frac{1}{m}}.$$

E poichè, stante il calcolo fatto sopra (3°),

$$[\cos x + \sqrt{-1}\,\text{sen}\, x]^m = \cos mx + \sqrt{-1}\,\text{sen}\, mx,$$

potremo inferirne l'equazione seguente

$$\cos x + \sqrt{-1}\,\text{sen}\, x = [\cos mx + \sqrt{-1}\,\text{sen}\, mx]^{\frac{1}{m}};$$

ovvero, sostituendo $\frac{x}{m}$ ad x,

$$\cos\frac{x}{m} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{x}{m} = [\cos x + \sqrt{-1}\,\text{sen}\, x]^{\frac{1}{m}};$$

dunque $[e^{x\sqrt{-1}}]^{\frac{1}{m}} = \cos\frac{x}{m} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{x}{m} = e^{\frac{x}{m}\sqrt{-1}}.$

Or se date due quantità esponenziali immaginarie, la moltiplicazione si fa sommando gli esponenti, la divisione sottraendo dall' esponente del dividendo quello del divisore, e se la potenza m$^{\text{ma}}$ di un'esponenziale, o la radice m$^{\text{ma}}$ di esso, si ottiene moltiplicando o dividendo per m l'esponente, concluderemo che i calcoli delle quantità esponenziali immaginarie debbono farsi secondo le medesime regole proprie degli esponenziali reali. S'inferisce da ciò che le proprietà degli esponenti sono le stesse e per gli esponenti reali e per gli esponenti immaginarj.

245. Corollario IV. La conclusione precedente ci autorizza a considerare l'esponente d'una quantità esponenziale immaginaria come il logaritmo di questa quantità; infatti le proprietà dei logaritmi riposano sulla proprietà degli esponenti; se adunque le proprietà degli esponenti sono le stesse e per gli esponenti reali e per gli esponenti immaginarj, ciò vuol dire che le proprietà de' logaritmi reali sussistono ancora pei logaritmi immaginari. Per queste considerazioni e per le equazioni (24) e (25) è manifesto che gli esponenti $x\sqrt{-1}$, $-x\sqrt{-1}$ si debbono considerare come i logaritmi naturali delle quantità immaginarie $\cos x + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,x$, $\cos x - \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,x$; adunque

$$\pm x\sqrt{-1} = \mathrm{l}(\cos x \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,x); \tag{26}$$

equazione simbolica che dee riputarsi come una trasformazione delle equazioni (24) e (25) voluta dalle proprietà comuni agli esponenti reali ed agli esponenti immaginarj.

246. Principio IV. Pongasi l'equazione

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = k(\cos t + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,t) \tag{27}$$

nella quale k si vuole che rappresenti una quantità positiva e t un arco reale; è chiaro che l'espressione $k(\cos t + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,t)$ riuscirà tale da potersi sostituire alla espressione $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ quando k e t vengano determinate in modo da soddisfare alle equazioni

$$\alpha = k\cos t, \quad \beta = k\,\mathrm{sen}\,t. \tag{28}$$

Or ciò si otterrà facendo

$$k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \tag{29}$$

e
$$\cos t = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \mathrm{sen}\,t = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \tag{30}$$

ovvero
$$t = \mathrm{ar\,tang}\,\frac{\beta}{\alpha}.$$

247. Scolio I. Sia τ il più piccolo valore assoluto dell'arco che ha per tangente $\frac{\beta}{\alpha}$; τ sarà compreso fra $\frac{1}{2}\pi$ e $-\frac{1}{2}\pi$, ed avremo

$$\mathrm{tang}\,\tau = \frac{\beta}{\alpha},$$

ovvero
$$\frac{\mathrm{sen}\,\tau}{\cos\tau} = \frac{\beta}{\alpha},$$

ovvero
$$\frac{\cos\tau}{\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\tau}{\beta};$$
e quindi
$$\frac{\cos^2\tau}{\alpha^2}=\frac{\operatorname{sen}^2\tau}{\beta^2}=\frac{\operatorname{sen}^2\tau+\cos^2 t}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2};$$
e per conseguenza
$$\frac{\cos\tau}{\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\tau}{\beta}=\pm\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}};\tag{31}$$
ma il coseno dell' arco τ non può essere che una quantità positiva; dunque

1° Se α sarà positiva, avremo
$$\frac{\cos\tau}{\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\tau}{\beta}=\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$
$$\cos\tau=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\quad \operatorname{sen}\tau=\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}};$$
e conseguentemente
$$\cos t=\cos\tau,\qquad \operatorname{sen} t=\operatorname{sen}\tau;$$
dimanierachè il valore generale di t sarà
$$t=\tau\pm 2n\pi,$$
n essendo un numero intero positivo qualunque. Si può pure osservare che in questo caso risalendo alla equazione (27) otterremo
$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=k(\cos\tau+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\tau).\tag{32}$$

2° Se α sarà negativa, avremo
$$\frac{\cos\tau}{\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\tau}{\beta}=-\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$
$$\cos\tau=-\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\quad \operatorname{sen}\tau=-\frac{\varphi}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}};$$
e quindi
$$\cos t=-\cos\tau,\quad \operatorname{sen} t=-\operatorname{sen}\tau;$$
ond' è che il valore generale di t sarà
$$t=\tau\pm(2n+1)\pi;$$

risalendo alla equazione (27) avremo in questo caso

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=-k(\cos\tau+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\tau). \qquad (33)$$

248. Scolio II. Dei due fattori k e $\cos t+\sqrt{-1}\operatorname{sen} t$ del prodotto in cui si trasforma l'espressione immaginaria $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ il primo dicesi *modulo* della espressione medesima, l'altro *espressione ridotta.* Due espressioni immaginarie le quali differiscono fra loro per il segno del coefficiente di $\sqrt{-1}$ si dicono immaginarie *coniugate;* tali sono $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $\alpha-\beta\sqrt{-1}$.

Facciasi $\beta=0$; l'espressione immaginaria $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ si ridurrà alla quantità reale α; questa è la ragione per cui diciamo che le quantità reali sono un caso particolare delle quantità immaginarie.

249. Corollario I. L'equazione (27) combinata colla (24) ci dà

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=k\,e^{t\sqrt{-1}}$$

ovvero
$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,e^{\sqrt{-1}\,\operatorname{ar\,tang}\frac{\beta}{\alpha}} \qquad (34)$$

e poichè in virtù della equazione (26) abbiamo

$$\beta\sqrt{-1}=\mathrm{l}(\cos\beta+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\beta),$$

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=\mathrm{l}\,[e^{\alpha}(\cos\beta+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\beta)] \qquad (35)$$

250. Corollario II. La riduzione dell'immaginario $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ alla forma $k(\cos t+\sqrt{-1}\operatorname{sen} t)$ ci mette in istato di fare sulle espressioni immaginarie qualunque operazione analitica in un modo molto spedito e semplice. Notisi che una operazione che debba farsi con quantità immaginarie s'intende compiuta tosto chè il risultato di essa è ridotto alla forma $m+n\sqrt{-1}$.

1° *Moltiplicazione.*

$$(a+b\sqrt{-1})(a_1+b_1\sqrt{-1})=kk_1(\cos x+\sqrt{-1}\operatorname{sen}x)(\cos x_1+\sqrt{-1}\operatorname{sen}x_1)$$

$$=kk_1[\cos(x+x_1)+\sqrt{-1}\operatorname{sen}(x+x_1)];$$

in generale

$$(a+b\sqrt{-1})(a_1+b_1\sqrt{-1})(a_2+b_2\sqrt{-1})\ldots=$$

$$kk_1k_2\ldots\times(\cos x+\sqrt{-1}\operatorname{sen}x)(\cos x_1+\sqrt{-1}\operatorname{sen}x_1)(\cos x_2+\sqrt{-1}\operatorname{sen}x_2)\ldots$$

$$=kk_1k_2\ldots\times[\cos(x+x_1+x_2+\ldots)+\sqrt{-1}\operatorname{sen}(x+x_1+x_2+\ldots)]$$

2° *Divisione.*

$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{a_1+b_1\sqrt{-1}}=\frac{k\,(\cos x+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,x)}{k_1\,(\cos x_1+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,x_1)}$$

$$=\frac{k\,(\cos x+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,x)\,(\cos x_1-\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,x_1)}{k_1\,(\cos x_1+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,x_1)(\cos x_1-\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,x_1)}$$

$$=\frac{k}{k_1}\,[\cos(x-x_1)+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,(x-x_1)].$$

3° *Potenze.*

$$(a+b\sqrt{-1})^m=(a+b\sqrt{-1})(a+b\sqrt{-1})(a+b\sqrt{-1})\ldots;$$

dunque facendo nella formula della moltiplicazione

$$a=a_1=a_2=\ldots,b=b_1=b_2=\ldots,\;k=k_1=k_2=\ldots,\;x=x_1=x_2=\ldots,$$

avremo

$$(a+b\sqrt{-1})^m=k^m(\cos x+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,x)^m$$
$$=k^m(\cos mx+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,mx).$$

È da notare che per $k=1$ si trova

$$(\cos x+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,x)^m=\cos mx+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,mx.$$

Mediante un calcolo analogo al precedente otterremo ancora

$$(\cos x-\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,x)^m=\cos mx-\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,mx;$$

cosicchè riunendo i due risultati, sarà

$$(\cos x\pm\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,x)^m=\cos mx\pm\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,mx, \qquad (47)$$

la quale equazione è nota sotto il nome di *Teorema del Moivre.*

Si osservi che

$$(\cos x+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,x)^{-m}=\frac{1}{(\cos x+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,x)^m}=\frac{1}{\cos mx+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,mx}$$

moltiplicando i due termini dell' ultima di queste frazioni per $\cos mx-\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,mx$, avremo

$$(\cos x+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,x)^{-m}=\cos(-mx)+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,(-mx);$$

donde si raccoglie che il teorema del Moivre può estendersi anche al caso dell' esponente m negativo.

Dimanierachè sarà

$$(a+b\sqrt{-1})^{-m}=\frac{1}{(a+b\sqrt{-1})^m}$$

$$=\frac{1}{k^m(\cos x+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,x)^m}=k^{-m}(\cos x+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,x)^{-m}$$

$$=k^{-m}[\cos(-mx)+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,(-mx)].$$

251. Corollario III. Pongasi nella formula (47) $2n\pi$ in luogo di mx, sarà

$$\mathrm{sen}\,mx=\mathrm{sen}\,2n\pi=0,\ \cos mx=\cos 2n\pi=1,$$

$$\left(\cos\frac{2n\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{2n\pi}{m}\right)^m=\cos 2n\pi\pm\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,2n\pi=1$$

$$(1)^{\frac{1}{m}}=\cos\frac{2n\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{2n\pi}{m}=\left(\cos\frac{2\pi}{m}+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{m}\right)^{\pm n};\quad (48)$$

$$(1)^{\frac{1}{m}}=e^{\pm\frac{2n\pi}{m}\sqrt{-1}}.$$

Diguisachè facendo $n=0,=1,=2,\ldots.$ otterremo

$$\cos 0\pm\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,0=1$$

$$\cos\frac{2\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{m}=\left(\cos\frac{2\pi}{m}+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{m}\right)^{\pm1}$$

$$\cos\frac{4\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{4\pi}{m}=\left(\cos\frac{2\pi}{m}+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{m}\right)^{\pm2}$$

$$\cos\frac{6\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{6\pi}{m}=\left(\cos\frac{2\pi}{m}+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{m}\right)^{\pm3}$$

. . . . . .

Se avremo m dispari protrarremo questa operazione sino ad $n=\frac{1}{2}(m-1)$, per cui l'ultimo risultato sarà

$$\cos\frac{(m-1)\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{(m-1)\pi}{m}=\left(\cos\frac{2\pi}{m}+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{m}\right)^{\pm\frac{1}{2}(m-1)},$$

Se avremo m pari continueremo l'operazione medesima sino ad $n=\frac{1}{2}m$; allora l'ultimo risultato sarà

$$\cos\pi\pm\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\pi=-1;$$

così nell'uno e nell'altro caso avremo m valori, i quali saranno

tutti diversi fra loro; infatti gli archi

$$0, \frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m}, \ldots \frac{(m-1)\pi}{m}, \frac{m\pi}{m},$$

non superando π avranno coseni diversi. È superfluo che si dieno ad n valori maggiori di $\frac{1}{2}(m-1)$ nel caso di n dispari, e maggiori di $\frac{1}{2}m$ nel caso di n pari, perchè i valori che ne risulterebbero per l'espressione analitica (48) sarebbero identici ai valori già ottenuti. Infatti, supponendo m dispari, si faccia

$$n = \tfrac{1}{2}(m-1) + i = \tfrac{1}{2}m + \tfrac{1}{2}(2i-1);$$

il valore che acquisterà l'espressione (48) sarà

$$\cos\left(\pi + \frac{(2i-1)\pi}{m}\right) \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\left(\pi + \frac{(2i-1)\pi}{m}\right) =$$

$$\cos\left(\pi - \frac{(2i-1)\pi}{m}\right) \mp \sqrt{-1}\,\text{sen}\left(\pi - \frac{(2i-1)\pi}{m}\right),$$

il quale è appunto il valore che acquista l'espressione (48) per

$$n = \tfrac{1}{2}(m-1) - (i-1) = \tfrac{1}{2}m - \tfrac{1}{2}(2i-1).$$

Supponendo poi m pari, si faccia $n = \frac{1}{2}m + i$; il valore che acquisterà l'espressione (48) sarà

$$\cos\left(\pi + \frac{2i\pi}{m}\right) \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\left(\pi + \frac{2i\pi}{m}\right) =$$

$$\cos\left(\pi - \frac{2i\pi}{m}\right) \mp \sqrt{-1}\,\text{sen}\left(\pi - \frac{2i\pi}{m}\right);$$

il quale è identico al valore dell'espressione (48) per $n = \frac{1}{2}m - i$.

Emergono da ciò le proposizioni seguenti.

1° Ponendo

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\text{sen}\frac{2\pi}{m},$$

ad ottenere tutte le radici del grado m dell'unità, basterà prendere m termini consecutivi della progressione geometrica

$$\ldots\ldots \alpha^{-3}, \alpha^{-2}, \alpha^{-1}, 1, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \ldots$$

la quale si suppone indefinitamente prolungata a destra ed a sinistra; prendendo i termini $1, \alpha^1, \alpha^2, \ldots \alpha^{m-1}$, avremo

$$(1)^{\frac{1}{m}} = 1, = \alpha^1, = \alpha^2, \ldots = \alpha^{m-1}$$

2° La somma delle r^{me} potenze delle m radici sarà nulla o

uguale ad m secondochè m sarà multiplo o non multiplo di r. Infatti

$$1+\alpha^r+\alpha^{2r}+\alpha^{3r}+\ldots\alpha^{(m-1)r}=\frac{\alpha^{rm}-1}{\alpha^r-1};$$

or poichè $\alpha^{rm}=(\alpha^m)^r=1$, sarà $\alpha^{rm}-1=0$, e perciò

$$1+\alpha^r+\alpha^{2r}+\alpha^{3r}\ldots+\alpha^{(m-1)r}=0,$$

ove per altro non sia $r=am$, cioè non sia zero il denominatore α^r-1; quando poi sarà $r=am$, allora avremo

$$1+\alpha^r+\alpha^{2r}+\alpha^{3r}\ldots+\alpha^{(m-1)r}=$$

$$1+(\alpha^r)^1+(\alpha^r)^2+(\alpha^r)^3\ldots+(\alpha^r)^{m-1}=m.$$

Non è necessario che r sia positiva; se fosse negativa avremmo $\alpha^{-r}=\frac{1}{\alpha^r}$, ed indicando con am il multiplo di m più prossimo ad r,

sarà $$\alpha^{am}=1,\ \alpha^{-r}=\frac{1}{\alpha^r}=\frac{\alpha^{am}}{\alpha^r}=\alpha^{am-r};$$

cosicchè potremmo sostituire alla potenza negativa α^{-r} la positiva α^{am-r}.

3° Se r ed s saranno due numeri interi positivi o negativi, e sarà $r-s<m$, dovranno α^r, α^s essere due radici m^{me} disuguali dell'unità; infatti

$$\alpha^r-\alpha^s=\alpha^r(1-\alpha^{s-r})$$

ed essendo $r-s<m$ non potrà essere α^{r-s} uguale all'unità, cioè non potrà la differenza $1-\alpha^{s-r}$ essere zero, e perciò α^r non sarà eguale ad α^s.

4° Poichè, n essendo un intero qualunque,

$$(1)^{\frac{p}{m}}=[(1)^{\frac{1}{m}}]^p$$

$$=\left(\cos\frac{2n\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{2n\pi}{m}\right)^p=\cos\frac{p.2n\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\,\text{sen}\frac{p.2n\pi}{m},$$

$$\text{e}\left(\cos\frac{p.2n\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\,\text{sen}\frac{p.2n\pi}{m}\right)^m=\cos p.2n\pi\pm\sqrt{-1}\,\text{sen}\,p.2n\pi$$

$$=(\cos 2n\pi\pm\sqrt{-1}\,\text{sen}\,2n\pi)^p=(1)^p=1,$$

sarà $\left[(1)^{\frac{p}{m}}\right]^m = 1$, e quindi $(1)^{\frac{p}{m}} = (1)^{\frac{1}{m}}$;

dunque i valori di $(1)^{\frac{p}{m}}$ coincidono co'valori già trovati di $(1)^{\frac{1}{m}}$.

Dalla equazione

$$(1)^{\frac{p}{m}} = (1)^{\frac{1}{m}}$$

risulta $$\left[(1^{\frac{1}{m}})\right]^p = \left[(1)^p\right]^{\frac{1}{m}}.$$

5° Poichè $(1)^{-\frac{p}{m}} = \dfrac{1}{\cos\dfrac{p.\,2n\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\dfrac{p.\,2n\pi}{m}}$

$$= \cos\frac{p.\,2n\pi}{m} \mp \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\frac{p.\,2n\pi}{m} = (1)^{\frac{p}{m}},$$

segue che $$(1)^{-\frac{p}{m}} = (1)^{\frac{1}{m}};$$

dunque anco i valori di $(1)^{-\frac{p}{m}}$ coincidono co'valori di $(1)^{\frac{1}{m}}$.

Dalla equazione $(1)^{-\frac{p}{m}} = (1)^{\frac{1}{m}}$,
facendo $p = 1$, risulta

$$(1)^{-\frac{1}{m}} = (1)^{\frac{1}{m}}.$$

252. Corollario IV. Pongasi nella formula (47) (n. 250) $(2n+1)\pi$ in luogo di mx, sarà

$$\mathrm{sen}\,(2n+1)\pi = 0,\ \cos(2n+1)\pi = -1;$$

$$\left(\cos\frac{(2n+1)\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\frac{(2n+1)\pi}{m}\right)^m$$

$$= \cos(2n+1)\pi \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,(2n+1)\pi = -1;$$

$$(-1)^{\frac{1}{m}} = \cos\frac{(2n+1)\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\frac{(2n+1)\pi}{m}$$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{m}\right)^{\pm(2n+1)} \qquad (49)$$

Perlochè facendo $n = 0, = 1, = 2, \ldots$ avremo

$$\cos\frac{\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{m}=\left(\cos\frac{\pi}{m}+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{m}\right)^{\pm 1}$$

$$\cos\frac{3\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{m}=\left(\cos\frac{\pi}{m}+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{m}\right)^{\pm 3}$$

$$\cos\frac{5\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{m}=\left(\cos\frac{\pi}{m}+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{m}\right)^{\pm 5}$$

. . . . .

Or se m sarà dispari continueremo siffatta operazione sino ad $n=\frac{1}{2}(m-1)$; l'ultimo risultato sarà

$$\cos\pi\pm\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\pi=-1.$$

Se poi m sarà pari spingeremo l'operazione medesima sino ad $n=\frac{1}{2}m-1=\frac{1}{2}(m-2)$, ed allora l'ultimo risultato sarà

$$\cos\frac{(m-1)\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{(m-1)\pi}{m}=\left(\cos\frac{\pi}{m}+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{m}\right)^{\pm(m-1)}$$

così in ambedue i casi avremo m valori i quali saranno tutti diversi fra loro, perchè gli archi $\frac{\pi}{m}$, $\frac{3\pi}{m}$, $\frac{5\pi}{m}$, ... $\frac{(m-1)\pi}{m}$, $\frac{m\pi}{m}$, non superando π, avranno i loro coseni diversi. Potrebbe poi dimostrarsi come abbiamo fatto di sopra che per $n>\frac{1}{2}(m-1)$ nel caso di m dispari, e per $n>\frac{1}{2}(m-2)$ nel caso di m pari si ritrovano i valori stessi ottenuti per $n<\frac{1}{2}(m-1)$ ed $n<\frac{1}{2}(m-2)$.

Da ciò emergono frattanto le seguenti proposizioni.

1° Ponendo

$$\theta=\cos\frac{\pi}{m}+\sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{\pi}{m},$$

ad ottenere tutte le radici del grado m dell'unità basterà prendere m termini consecutivi della progressione geometrica

$$\ldots\ \theta^{-5},\ \theta^{-3},\ \theta^{-1},\ 1,\ \theta^{1},\ \theta^{3},\ \theta^{5},\ \ldots$$

la quale si suppone indefinitamente prolungata a destra ed a sinistra; prendendo i termini 1, θ^1, θ^3, θ^5, ... θ^{2m-1}, avremo

$$(-1)^{\frac{1}{m}}=1,=\theta^1,=\theta^3,\ \ldots=\theta^{2m-1}.$$

2° Nella serie

$$\theta^1,\ \theta^2,\ \theta^3,\ \theta^4,\ \ldots\ \theta^{2m},$$

i termini di posto pari sono le radici della equazione $x^m - 1 = 0$, cioè le radici della unità positiva, mentre i termini di posto dispari sono le radici della equazione $x^m + 1 = 0$, che è quanto dire le radici dell'unità negativa: infatti

$$\alpha^1 = \theta^2, \alpha^2 = \theta^4, \ldots \alpha^{m-1} = \theta^{2m-2}.$$

3° Quando m è dispari le radici della equazione $x^m + 1 = 0$ sono uguali alle radici della equazione $x^m - 1 = 0$ e di segno contrario; infatti l'equazionè $x^m + 1 = 0$ sostituendo $-x$ ad x si muta nella equazione $x^m - 1 = 0$.

4° Poichè $$(-1)^{\frac{p}{m}} = \left((-1)^{\frac{1}{m}}\right)^p$$

$$= \left(\cos\frac{(2n+1)\pi}{m} \pm \sqrt{-1} \operatorname{sen}\frac{(2n+1)\pi}{m}\right)^p$$

$$= \cos\frac{p.(2n+1)\pi}{m} \pm \sqrt{-1} \operatorname{sen}\frac{p.(2n+1)\pi}{m},$$

e siccome

$$\left(\cos\frac{p.(2n+1)\pi}{m} \pm \sqrt{-1} \operatorname{sen}\frac{p.(2n+1)\pi}{m}\right)^m$$

$$= \cos[p.(2n+1)\pi] \pm \sqrt{-1} \operatorname{sen}[p.(2n+1)\pi] =$$

$$[\cos(2n+1)\pi \pm \sqrt{-1} \operatorname{sen}(2n+1)\pi]^p = (-1)^p = \pm 1,$$

sarà $\left((-1)^{\frac{p}{m}}\right)^m = \pm 1$, e quindi $(-1)^{\frac{p}{m}} = (\pm 1)^{\frac{1}{m}}$;

dunque i valori di $(-1)^{\frac{p}{m}}$ coincidono coi valori già trovati di $(1)^{\frac{1}{m}}$ nel caso di p pari, e coi valori di $(-1)^{\frac{1}{m}}$ nel caso di p dispari; dunque se p sarà pari, avremo

$$(-1)^{\frac{p}{m}} = 1, = \alpha^1, = \alpha^2, \ldots = \alpha^{m-1};$$

se p sarà dispari, avremo

$$(-1)^{\frac{p}{m}} = 1, = \theta^3, = \theta^5, \ldots = \theta^{2m-1}.$$

Dalla equazione $$(-1)^{\frac{p}{m}} = (\pm 1)^{\frac{1}{m}},$$

nella quale ha luogo il + o il — secondochè p è pari o dispari, risulta che

$$\left((-1)^{\frac{1}{m}}\right)^p = \left((-1)^p\right)^{\frac{1}{m}}$$

5° Poichè

$$(-1)^{-\frac{p}{m}} = \frac{1}{\cos\frac{p.(2n+1)\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\frac{p.(2n+1)\pi}{m}} =$$

$$\cos\frac{p.(2n+1)\pi}{m} \mp \sqrt{-1}\,\text{sen}\frac{p.(2n+1)\pi}{m} = (-1)^{\frac{p}{m}};$$

e perciò

$$(-1)^{-\frac{p}{m}} = (-1)^{\frac{p}{m}} = (\pm 1)^{\frac{1}{m}},$$

nella quale equazione avrà luogo il + se p sarà pari, il — se p sarà dispari; avremo adunque, ove p sia pari,

$$(-1)^{-\frac{p}{m}} = 1, = \alpha^1, = \alpha^2, \ldots = \alpha^{m-1},$$

ed ove p sia dispari

$$(-1)^{-\frac{p}{m}} = 1, = \theta^1, = \theta^2, \ldots = \theta^{2m-1}.$$

L'equazione $\qquad (-1)^{-\frac{p}{m}} = (\pm 1)^{\frac{1}{m}},$

dà $\qquad (-1)^{-\frac{p}{m}} = ((-1)^p)^{-\frac{1}{m}}.$

Facendo $p = 1$, avremo

$$(-1)^{-\frac{1}{m}} = (-1)^{\frac{1}{m}}.$$

6° Riunendo le formule mediante le quali si determinano i valori delle espressioni

$$(1)^{\frac{1}{m}},\ (1)^{\frac{p}{m}},\ (1)^{-\frac{p}{m}}, (-1)^{\frac{1}{m}}, (-1)^{\frac{p}{m}}, (-1)^{-\frac{p}{m}},$$

si può stabilire che indicando con a una quantità positiva o negativa, intera o fratta, sarà

$$(1)^a = \cos 2na\pi \pm \sqrt{-1} \operatorname{sen} 2na\pi,$$

$$(-1)^a = \cos(2n+1)a\pi \pm \sqrt{-1} \operatorname{sen}(2n+1)a\pi.$$

253. Corollario V. Frattanto sarà facile esprimere la radice del grado $\pm m$ d'una quantità immaginaria $a+b\sqrt{-1}$; poniamo

$$(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}} = [k(\cos x+\sqrt{-1}\operatorname{sen} x)]^{\frac{1}{m}} = h(\cos y+\sqrt{-1}\operatorname{sen} y),$$

e prendiamo a determinare h ed y. A tale uopo si osservi che

$$k(\cos x+\sqrt{-1}\operatorname{sen} x) = h^m(\cos y+\sqrt{-1}\operatorname{sen} y)^m = h^m(\cos my+\sqrt{-1}\operatorname{sen} my),$$

ragione per cui sarà

$$k = h^m, \quad \cos x = \cos my, \quad \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} my;$$

alle quali equazioni potremo soddisfare facendo

$$h = k^{\frac{1}{m}}, \quad my = x \pm 2n\pi, \quad y = \frac{x \pm 2n\pi}{m},$$

dove n rappresenta un numero intero qualunque; avremo perciò

$$(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}} = [k(\cos x+\sqrt{-1}\operatorname{sen} x)]^{\frac{1}{m}}$$

$$= k^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{x\pm 2n\pi}{m}+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{x\pm 2n\pi}{m}\right)$$

$$= k^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{x}{m}+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{x}{m}\right)\left(\cos\frac{2n\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{2n\pi}{m}\right);$$

$$(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}} = k^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{x}{m}+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{x}{m}\right)(1)^{\frac{1}{m}}.$$

Di qui si deducono le seguenti formule.

1° $$(a+b\sqrt{-1})^{-\frac{1}{m}} = \frac{1}{(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}}}$$

$$= \frac{1}{[k(\cos x+\sqrt{-1}\operatorname{sen} x)]^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{k^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{x}{m}+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{x}{m}\right)(1)^{\frac{1}{m}}};$$

$$(a+b\sqrt{-1})^{-\frac{1}{m}} = k^{-\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{x}{m}-\sqrt{-1}\operatorname{sen}\frac{x}{m}\right)(1)^{-\frac{1}{m}};$$

2° $$(a+b\sqrt{-1})^{\frac{p}{m}}=[(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}}]^p$$
$$=k^{\frac{p}{m}}\left(\cos\frac{px}{m}+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{px}{m}\right)(1)^{\frac{p}{m}};$$

e poichè (n. 251. 4°) $(1)^{\frac{p}{m}}=\cos\frac{p.2n\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{p.2n\pi}{m}$,

per conseguenza avremo la formula seguente;
$$(a+b\sqrt{-1})^{\frac{p}{m}}=k^{\frac{p}{m}}\left(\cos\frac{p(x\pm2n\pi)}{m}+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{p(x\pm2n\pi)}{m}\right).$$

3° $$(a+b\sqrt{-1})^{-\frac{p}{m}}=\frac{1}{k^{\frac{p}{m}}\left(\cos\frac{p(x\pm2n\pi)}{m}+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{p(x\pm2n\pi)}{m}\right)};$$

ovvero
$$(a+b\sqrt{-1})^{-\frac{p}{m}}=k^{-\frac{p}{m}}\left(\cos\frac{p(x\pm2n\pi)}{m}-\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{p(x\pm2n\pi)}{m}\right).$$

Ora $$\frac{\cos p(x\pm2n\pi)}{m}-\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{p(x\pm2n\pi)}{m}$$
$$=\left(\cos\frac{px}{m}-\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{px}{m}\right)\left(\cos\frac{p.2n\pi}{m}\mp\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{p.2n\pi}{m}\right);$$

e poichè (n. 251. 5°) $(1)^{-\frac{p}{m}}=\cos\frac{p.2n\pi}{m}\mp\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{p.2n\pi}{m}$,

avremo pure
$$(a+b\sqrt{-1})^{-\frac{p}{m}}=\left(\cos\frac{px}{m}-\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\frac{px}{m}\right)(1)^{-\frac{p}{m}}.$$

254. Principio V. Poichè
$$\mathrm{l}(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots, \qquad (50)$$

sarà $$\tfrac{1}{2}\mathrm{l}(1+x^2)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}-\ldots;$$

oltracciò abbiamo
$$\mathrm{ar\,tang}\,x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots; \qquad (51)$$

dunque in virtù del Principio III (n. 241), avremo

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}(1+x^2)+\sqrt{-1}\,\mathrm{ar\,tang}\,x=\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}-\ldots,$$
$$+\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots\right)\sqrt{-1}.$$

Ciò posto si osservi che il secondo membro di questa equazione, il quale può trasformarsi nella espressione seguente

$$\frac{x\sqrt{-1}}{1}-\frac{(x\sqrt{-1})^2}{2}+\frac{(x\sqrt{-1})^3}{3}-\frac{(x\sqrt{-1})^4}{4}+\ldots,\tag{52}$$

coinciderebbe colla serie

$$\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\tag{53}$$

quando la x si cambiasse in $x\sqrt{-1}$; e siccome tal serie, essendo lo sviluppo del logaritmo naturale di $1+x$, è rappresentata da $\mathrm{l}(1+x)$, perciò anche la serie (52) potrà rappresentarsi col simbolo $\mathrm{l}(1+x\sqrt{-1})$; diciamo *simbolo*, perchè questa espressione designando una operazione impossibile, non può stimarsi altra cosa: essa è una espressione compendiosa destinata a rappresentare la serie immaginaria che risulta dallo sviluppo del logaritmo iperbolico della quantità reale $1+x$ sostituendo $x\sqrt{-1}$ ad x.

Avremo frattanto

$$\mathrm{l}(1+x\sqrt{-1})=\tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}(1+x^2)+\sqrt{-1}\,\mathrm{ar\,tang}\,x.\tag{54}$$

Nello stesso modo otterremo

$$\mathrm{l}(1-x\sqrt{-1})=\tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}(1+x^2)-\sqrt{-1}\,\mathrm{ar\,tang}\,x.\tag{55}$$

255. Corollario I. Di qui ponendo $\frac{b}{a}$ in luogo di x ricaveremo $\mathrm{l}(a\pm b\sqrt{-1})=\mathrm{l}\sqrt{(a^2+b^2)}\pm\sqrt{-1}\,\mathrm{ar\,tang}\,\frac{b}{a}$, (56)

equazione simbolica la quale sussiste in virtù delle equazioni (50) e (51), e del Principio III (n. 241).

Facendo $$\sqrt{(a^2+b^2)}=k,\quad \mathrm{ar\,tang}\,\frac{b}{a}=u,\tag{57}$$

l'equazione (56) si cambia nella seguente

$$\mathrm{l}(a\pm b\sqrt{-1})=\mathrm{l}k\pm u\sqrt{-1}.\tag{58}$$

256. Corollario II. Poichè

$$\begin{aligned}(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} &= e^{(m+n\sqrt{-1})\,l(a+b\sqrt{-1})}\\ &= e^{(m+n\sqrt{-1})\,(lk+u\sqrt{-1})}\\ &= e^{mlk-nu+(nlk+mu)\sqrt{-1}}\\ &= e^{mlk-nu}\times e^{(nlk+mu)\sqrt{-1}}\end{aligned}$$

avremo [n. 250 eq. (47)]

$$(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}=e^{mlk-nu}[\cos(nlk+mu)+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}(nlk+mu)]. \tag{59}$$

257. Corollario III. Facendo $b=0$ risulterà $k=a$, $u=0$; quindi la (59) si muterà nella seguente

$$a^{m+n\sqrt{-1}}=e^{mla}(\cos nla+\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,nla). \tag{60}$$

258. Principio VI. Poichè

$$e^{\pm x}=1\pm\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}\pm\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}\pm\ldots, \tag{61}$$

sarà

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\ldots, \tag{62}$$

$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{x}{1}+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\ldots, \tag{63}$$

or si osservi che il secondo membro della equazione (62) ed il secondo della (40), i quali si trasformano nelle due serie seguenti

$$1-\frac{(x\sqrt{-1})^2}{1.2}+\frac{(x\sqrt{-1})^4}{1.2.3.4}-\ldots \tag{64}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{x\sqrt{-1}}{1}-\frac{(x\sqrt{-1})^3}{1.2.3}+\frac{(x\sqrt{-1})^5}{1.2.3.4.5}-\ldots\right), \tag{65}$$

coinciderebbero colle due serie qui appresso

$$1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\ldots, \tag{66}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\ldots\right), \tag{67}$$

ove si sostituisse $x\sqrt{-1}$ ad x; e siccome le due serie (66) e (67) sono respettivamente rappresentate da

$$\cos x \qquad \text{e} \qquad \frac{\mathrm{sen}\,x}{\sqrt{-1}}$$

perciò anco le serie (64) e (65) potranno essere respettivamente rappresentate dai simboli

$$\cos x\sqrt{-1} \quad \text{e} \quad \frac{\operatorname{sen} x\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}};$$

tali espressioni designando operazioni impossibili non altro sono che simboli, i quali giovano a rappresentare in modo compendioso le due serie immaginarie che si ottengono sostituendo $x\sqrt{-1}$ ad x nello sviluppo del coseno e del seno dell'arco reale x. Avremo adunque

$$\cos x\sqrt{-1} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \ (68), \quad \operatorname{sen} x\sqrt{-1} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\sqrt{-1}. \ (69)$$

259. Corollario. Pongasi per brevità

$$\cos b\sqrt{-1} = M, \qquad \operatorname{sen} b\sqrt{-1} = N;$$

avremo

$$\operatorname{sen} a \cos b\sqrt{-1} = M \operatorname{sen} a, \qquad \cos a \operatorname{sen} b\sqrt{-1} = N\cos a,$$

$$\cos a \cos b\sqrt{-1} = M\cos a, \qquad \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b\sqrt{-1} = N \operatorname{sen} a;$$

e quindi

$$\operatorname{sen} a \cos b\sqrt{-1} + \cos a \operatorname{sen} b\sqrt{-1} = M \operatorname{sen} a + N\cos a, \ (70)$$

$$\cos a \cos b\sqrt{-1} - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b\sqrt{-1} = M\cos a - N \operatorname{sen} a. \ (71)$$

Ora il primo membro della equazione (70) ed il primo della (71) coinciderebbero respettivamente colle espressioni

$$\operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b,$$

$$\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b,$$

ove si ponesse $b\sqrt{-1}$ in luogo dell'arco reale b; ma queste espressioni sono respettivamente rappresentate da sen $(a+b)$, cos $(a+b)$, dunque anco il primo membro della equazione (70), ed il primo della (71) potranno anch'esse respettivamente rappresentarsi coi simboli sen $(a+b\sqrt{-1})$ e cos $(a+b\sqrt{-1})$; avremo adunque le due equazioni simboliche seguenti

$$\operatorname{sen}(a+b\sqrt{-1}) = \frac{e^b + e^{-b}}{2}\operatorname{sen} a + \frac{e^b - e^{-b}}{2}\sqrt{-1}\cos a, \ (72)$$

$$\cos(a+b\sqrt{-1}) = \frac{e^b + e^{-b}}{2}\cos a - \frac{e^b - e^{-b}}{2}\sqrt{-1}\operatorname{sen} a. \ (73)$$

260. Scolio. Dalle equazioni (24) e (25) (n. 244) abbiamo

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, (74) \quad \operatorname{sen} x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, (75)$$

dalle quali si ricaverebbero le formule (68) e (69) sol che la x si cambiasse in $x\sqrt{-1}$; dunque le formule (68) e (69) son vere e per l'arco reale x, e per l'arco immaginario $x\sqrt{-1}$.

261. Principio VII. Abbiasi la funzione immaginaria

$$u = \varphi x + \xi x \sqrt{-1}; \tag{76}$$

supponendo che la x si accresca della quantità Δx, e che il corrispondente accrescimento della u sia Δu, avremo

$$u + \Delta u = \varphi(x + \Delta x) + \xi(x + \Delta x)\sqrt{-1};$$

e quindi

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi x}{\Delta x} + \frac{\xi(x + \Delta x) - \xi x}{\Delta x}\sqrt{-1};$$

or passando ai limiti risulterà

$$u' = \varphi' x + \xi' x \sqrt{-1}; \tag{77}$$

moltiplicando per dx

$$u'\,dx = \varphi' x\,dx + \xi' x\,dx\sqrt{-1},$$

ovvero

$$du = d\varphi x + d\xi x \sqrt{-1}; \tag{78}$$

le equazioni (77) e (78) ove si confrontino colla proposta (76) dimostrano che *la derivata ed il differenziale d'una funzione immaginaria si ottengono in quella guisa medesima che si otterrebbero se questa funzione fosse reale, e considerando* $\sqrt{-1}$ *come un coefficiente costante.*

262. Corollario I. Da ciò risulta ancora che le derivate degli ordini superiori della funzione immaginaria $\varphi x + \xi x \sqrt{-1}$ sono le seguenti;

$$u'' = \varphi'' x + \xi'' x \sqrt{-1},$$
$$u''' = \varphi''' x + \xi''' x \sqrt{-1},$$
$$u^{\text{IV}} = \varphi^{\text{IV}} x + \xi^{\text{IV}} x \sqrt{-1},$$
$$\cdots\cdots$$
$$u^{(n)} = \varphi^{(n)} x + \xi^{(n)} x \sqrt{-1};$$

e i differenziali saranno

$$d^2u = d^2\varphi x + d^2\xi x\sqrt{-1}$$
$$d^3u = d^3\varphi x + d^3\xi x\sqrt{-1}$$
$$d^4u = d^4\varphi x + d^4\xi x\sqrt{-1}$$
$$\cdots\cdots$$
$$d^nu = d^n\varphi x + d^n\xi x\sqrt{-1}.$$

263. Corollario II. Poichè

$$\varphi(x+h) = \varphi x + \frac{h}{1}\varphi' x + \frac{h^2}{1.2}\varphi'' x \ldots \quad + \frac{h^n}{1.2\ldots n}\varphi^{(n)}(x+\theta h),$$

$$\xi(x+h) = \xi x + \frac{h}{1}\xi' x + \frac{h^2}{1.2}\xi'' x \ldots \quad + \frac{h^n}{1.2\ldots n}\xi^{(n)}(x+\theta h),$$

in virtù del Principio III (n. 241), avremo

$$\varphi(x+h) + \xi(x+h)\sqrt{-1} =$$
$$\varphi x + \frac{h}{1}\varphi' x + \frac{h^2}{1.2}\varphi'' x \ldots \quad + \frac{h^n}{1.2\ldots n}\varphi^{(n)}(x+\theta h),$$
$$+\left(\xi x + \frac{h}{1}\xi' x + \frac{h^2}{1.2}\xi'' x \ldots \quad + \frac{k^n}{1.2\ldots n}\xi^{(n)}(x+\theta h)\right)\sqrt{-1};$$

ovvero

$$\varphi(x+h) + \xi(x+h)\sqrt{-1} =$$
$$\varphi x + \xi x\sqrt{-1}$$
$$+\frac{h}{1}(\varphi' x + \xi' x\sqrt{-1})$$
$$+\frac{h^2}{1.2}(\varphi'' x + \xi'' x\sqrt{-1})$$
$$\cdots\cdots$$
$$+\frac{h^n}{1.2\ldots n}(\varphi^{(n)}(x+\theta h) + \xi^{(n)}(x+\theta h)\sqrt{-1});$$

da ciò si raccoglie che il Principio III ci autorizza a sviluppare qualunque funzione immaginaria $\varphi(x+h)+\xi(x+h)\sqrt{-1}$ alla maniera di una funzione reale, valendoci della formula stabilita al n. 227.

264. Scolio. Prescindendo dal termine complementario, può

il secondo membro della precedente equazione esprimersi in questa guisa

$$u + \frac{h}{1} u' + \frac{h^2}{1.2} u'' + \ldots;$$

siffatta espressione indefinita non è altro che la serie in cui si sviluppa lo stato variato della funzione u, quale ci vien data dal Teorema del Taylor; il Teorema del Taylor può adunque usarsi anco per lo sviluppo in serie delle funzioni immaginarie.

LIBRO SECONDO

GLI USI ANALITICI E GEOMETRICI

DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

I. *Dei valori veri delle quantità che si presentano sotto certe forme indeterminate.*

265. Teorema I. ***Il valor vero del rapporto di due funzioni*** $\mathbf{f}\mathrm{x}$, Fx, ***che per*** $\mathrm{x}=\mathrm{x}_0$ ***prende la forma indeterminata*** $\frac{0}{0}$, ***coincide col valore del rapporto di*** $\mathrm{f}^{(n)}\mathrm{x}$ ***ad*** $\mathrm{F}^{(n)}\mathrm{x}$; ***supposto che*** $\mathrm{f}^{(n)}\mathrm{x}$, $\mathrm{F}^{(n)}\mathrm{x}$ ***sieno le prime due derivate di*** fx ***ed*** Fx ***che non diventano nulle ad un tempo per*** $\mathrm{x}=\mathrm{x}_0$.

Qualunque sia la natura delle funzioni fx, Fx avremo

$$\frac{f(x_0+h)}{F(x_0+h)}=\frac{f^{(n)}(x_0+\theta h)}{F^{(n)}(x_0+\theta h)};$$

infatti questa equazione ha sempre luogo per h infinitamente piccola, quando le funzioni fx, Fx e le loro successive derivate sino all' ordine $n-1$ inclusive vanno a zero per $x=x_0$, (n. 229. 2°): supponendo adunque che h converga verso lo zero, l' equazione dei limiti sarà

$$\frac{fx_0}{Fx_0}=\frac{f^{(n)}x_0}{F^{(n)}x_0},$$

che è quanto dire

$$\int\limits_{x=x_0} \frac{fx}{Fx} = \int\limits_{x=x_0} \frac{f^{(n)}x}{F^{(n)}x}; \qquad (1)$$

come dovevasi dimostrare.

266. Corollario I. Se delle due quantità $f^{(n)}x_0$, $F^{(n)}x_0$, solo la prima fosse nulla, il valor vero del rapporto di fx_0 ad Fx_0 sarebbe zero; se fosse nulla la seconda, il valor vero del rapporto stesso sarebbe infinito.

267. Corollario II. Se le due derivate che non vanno a zero nello stesso tempo fossero appunto le due derivate prime, avremmo $n = 1$, cioè

$$\int\limits_{x=x_0} \frac{fx}{Fx} = \int\limits_{x=x_0} \frac{f'x}{F'x}. \qquad (2)$$

268. Scolio. Le derivate di fx, Fx non potrebbero tutte per $x = x_0$ risultare uguali a zero, perchè in tal caso avremmo $f(x_0 + h) = 0$, $F(x_0 + h) = 0$, h essendo qualunque, cioè fx ed Fx non varierebbero al variare della x (n. 89); in altri termini non sarebbero funzioni della x (n. 4), assurdo evidente.

269. Teorema II. *Il valor vero del rapporto di due funzioni* fx, Fx, *che per* $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0$ *prende la forma indeterminata* $\frac{\infty}{\infty}$, *coincide col valore del rapporto di* $\mathrm{f}^{(n)}\mathrm{x}$ *ad* $\mathrm{F}^{(n)}\mathrm{x}$; *supposto che* $\mathrm{f}^{(n)}\mathrm{x}$, $\mathrm{F}^{(n)}\mathrm{x}$ *sieno le prime due derivate di* fx *ed* Fx *che non diventano nulle nè infinite ad un tempo per* $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0$.

Si osservi che

$$\frac{fx}{Fx} = \frac{\dfrac{1}{Fx}}{\dfrac{1}{fx}};$$

or se per $x = x_0$ le funzioni fx, Fx diventano infinite, le funzioni $\frac{1}{Fx}$, $\frac{1}{fx}$ per il medesimo valore della variabile, diventeranno nulle; dunque (n. 265)

$$\left\lfloor \frac{fx}{Fx} \right._{x=x_0} = \left\lfloor \frac{D\dfrac{1}{Fx}}{D\dfrac{1}{fx}} \right._{x=x_0} = \left\lfloor \frac{F'x\,(fx)^2}{f'x\,(Fx)^2} \right._{x=x_0};$$

ovvero (n. 32)

$$\left\lfloor \frac{fx}{Fx} \right._{x=x_0} = \left\lfloor \frac{fx}{Fx} \right._{x=x_0} \left\lfloor \frac{fx}{Fx} \right._{x=x_0} \left\lfloor \frac{F'x}{f'x} \right._{x=x_0};$$

conseguentemente

$$\left\lfloor \frac{fx}{Fx} \right._{x=x_0} = \left\lfloor \frac{f'x}{F'x} \right._{x=x_0}; \tag{3}$$

donde si raccoglie che il rapporto di due funzioni fx, Fx che per $x = x_0$ prende la forma $\frac{\infty}{\infty}$ coincide col valore che per $x = x_0$ riceve il rapporto di $f'x$ ad $F'x$.

Or se le derivate $f'x$, $F'x$ per $x = x_0$ diventeranno anch'esse infinite, e lo stesso avverrà per tutte le derivate susseguenti di queste funzioni sino all' ordine $n - 1$ inclusivamente, avremo

$$\left\lfloor \frac{f'x}{F'x} \right._{x=x_0} = \left\lfloor \frac{f''x}{F''x} \right._{x=x_0} = \ldots \left\lfloor \frac{f^{(n)}x}{F^{(n)}x} \right._{x=x_0},$$

e quindi

$$\left\lfloor \frac{fx}{Fx} \right._{x=x_0} = \left\lfloor \frac{f^{(n)}x}{F^{(n)}x} \right._{x=x_0}; \tag{4}$$

come dovevasi dimostrare.

270. Scolio I. Se le derivate delle funzioni fx, Fx per $x = x_0$ diventassero tutte infinite, per trovare il valor vero del rapporto di fx_0 ad Fx_0, non potremmo valerci della regola precedente; in tal caso sostituiremo $x_0 + h$ ad x, faremo le occorrenti trasformazioni, quindi passeremo al limite ponendo $h = 0$.

271. Scolio II. Poichè il valore x_0 di x abbiamo supposto essere un valore particolare qualunque della x è manifesto che quel valore potrà esser grande quanto vuolsi; per conseguenza le regole precedenti si applicano anche al caso in cui sia $x = \infty$: ma ciò può anche dimostrarsi nel seguente modo.

Supponiamo che per $x=\infty$ le funzioni fx, Fx diventino ambedue nulle o infinite; facendo $x=\frac{1}{z}$ avremo le funzioni $f\left(\frac{1}{z}\right)$, $F\left(\frac{1}{z}\right)$, le quali diverranno anch' esse ambedue nulle o infinite per $z=0$; talchè sarà (n. 265 e 269)

$$\left\lceil \frac{fx}{Fx} \right._{x=\infty} = \left\lceil \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{F\left(\frac{1}{z}\right)} \right._{z=0} = \left\lceil \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}}{F'\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}} \right._{z=0},$$

ovvero

$$\left\lceil \frac{fx}{Fx} \right._{x=\infty} = \left\lceil \frac{f'x}{F'x} \right._{x=\infty};$$

come dovevasi dimostrare.

272. Scolio III. Abbiasi il prodotto

$$fx\,.\,Fx\,;$$

e supponiamo che per $x=x_0$ risulti

$$fx_0=\pm\infty\ ,Fx_0=0,$$

oppure $$fx_0=0,\qquad Fx_0=\pm\infty\ ;$$

il prodotto proposto prenderà la forma indeterminata $0\times\infty$; si tratta di trovarne il valore vero. Pongasi a tale uopo l'identità

$$fx.Fx = \frac{Fx}{\frac{1}{fx}};$$

è manifesto che per $x=x_0$ il secondo membro di essa prenderà la forma $\frac{0}{0}$ oppure $\pm\frac{\infty}{\infty}$; in ambedue i casi in virtù dei Teoremi I e II dimostrati precedentemente (n. 265 e 269), sarà

$$\left\lceil fx.Fx \right._{x=x_0} = -\left\lceil \frac{F'x(fx)^2}{f'x} \right._{x=x_0}. \qquad (5)$$

273. Scolio IV. Abbiasi la funzione esponenziale

$$Fx^{fx};$$

sarà $$\mathrm{l}\,Fx^{fx}=fx\,\mathrm{l}\,Fx.$$

Ora se facendo $x = x_0$ risulterà

$$fx_0 = \infty\,,\quad Fx_0 = 1,\quad \mathrm{l}\,Fx_0 = 0,$$

oppure $\quad fx_0 = 0\,,\quad Fx_0 = \infty\,,\quad \mathrm{l}\,Fx_0 = \infty\,,$

o finalmente $\quad fx_0 = 0\,,\quad Fx_0 = 0\,,\quad \mathrm{l}\,Fx_0 = -\infty\,,$

la funzione proposta prenderà successivamente le forme indeterminate $1^\infty, 0^\infty$, 0^0; in ciascuno di questi tre casi il valor vero del prodotto $fx\,\mathrm{l}\,Fx$ sarà dato dalla formula (5) n. 272, ed avremo

$$\int_{x=x_0} \mathrm{l}\,Fx^{fx} = -\int_{x=x_0} \frac{F'x\,(fx)^2}{f'x.\,Fx}\,; \tag{6}$$

trovato in tal guisa il vero valore del prodotto $fx\mathrm{l}Fx_0$ si troverà immediatamente il valor vero della funzione Fx^{fx}.

274. Scolio V. Abbiasi finalmente la differenza

$$fx - Fx\,,$$

e supponiamo che per $x = x_0$ risulti

$$fx_0 = \infty\ ,\quad Fx_0 = \infty\ ;$$

la differenza proposta prenderà la forma indeterminata $\infty - \infty$. Per trovare in tal caso il valor vero della differenza medesima si trasformino le funzioni $fx\,, Fx$ in modo che abbiasi

$$fx = \frac{1}{\varphi x}\,,\ Fx = \frac{1}{\psi x}\,,$$

φx, ψx essendo due funzioni capaci di diventar nulle per $x = x_0$; risulterà

$$fx - Fx = \frac{1}{\varphi x} - \frac{1}{\psi x} = \frac{\psi x - \varphi x}{\psi x\,\varphi x}\,;$$

e quindi stante il Teorema I (n. 265)

$$\int_{x=x_0} (fx - Fx) = \int_{x=x_0} \frac{D(\psi x - \varphi x)}{D(\psi x\,\chi x)}\,. \tag{7}$$

Esempio I. Abbiasi la frazione

$$u = \frac{x - x^{n+1}}{1 - x}\,, \tag{8}$$

che prende la forma $\frac{0}{0}$ per $x = 1$. Sarà

$$\int_{x=1} u = \int_{x=1} \frac{1-(n+1)x^n}{-1} = n.$$

Infatti la frazione proposta rappresenta la somma dei termini della progressione

$$x + x^2 + x^3 \ldots + x^n, \tag{9}$$

il cui valore per $x = 1$ è n.

Esempio II. Sia data la funzione

$$u = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}, \tag{10}$$

la quale si riduce a $\frac{0}{0}$ per $x = 1$. Sarà

$$\int_{x=1} u = \int_{x=1} \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$= \int_{x=1} \frac{-n(n+1)x^{n-1} + n(n+1)x^n}{-2(1-x)}$$

$$= \int_{x=1} \frac{-(n-1)n(n+1)x^{n-2} + n^2(n+1)x^{n-1}}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Infatti la frazione proposta è la derivata della funzione (8), e rappresenta perciò la derivata della progressione (9), cioè la somma

$$1 + 2x + 3x^2 \ldots + nx^{n-1},$$

la quale quando sia $x = 1$, si cangia nella seguente;

$$1 + 2 + 3 \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Esempio III. Abbiasi la funzione

$$u = \frac{l(1+x)}{x^n}$$

dove n si suppone positivo; essa per $x = 0$ prende la forma $\frac{0}{0}$. Avremo adunque

$$\int_{x=0} u = \int_{x=0} \frac{\frac{1}{1+x}}{nx^{n-1}};$$

dunque il valore di u corrispondente ad $x=0$ sarà ∞, o 1, e 0 secondochè n sarà >1, oppure $=1$, oppure <1.

Esempio IV. La funzione

$$u=\frac{l\left(\frac{1}{x}\right)}{\cot x},$$

per $x=0$ diventa $\frac{\infty}{\infty}$. Dunque sarà

$$\int\limits_{x=0} u=\int\limits_{x=0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}=\int\limits_{x=0}\frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{1}=0.$$

Esempio V. Abbiasi la frazione

$$u=\frac{\sqrt[3]{x-a}}{\sqrt[4]{x^2-a^2}};$$

i due termini di essa per $x=a$ diventano nulli e tutte le loro derivate diventano infinite: facciasi adunque $x=a+h$; avremo

$$\int\limits_{x=a} u=\int\limits_{h=0}\frac{\sqrt[3]{h}}{\sqrt[4]{h[(2a+h)]}}=\int\limits_{h=0}\frac{h^{\frac{1}{12}}}{(2a+h)^{\frac{1}{4}}}=0.$$

Esempio VI. Sia data la frazione

$$u=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{(x^2-a^2)}};$$

i due termini di essa per $x=a$ diventano nulli e le loro derivate infinite: perciò ponendo $a+h$ in luogo di x e sviluppando gl' irrazionali mediante la formula newtoniana del binomio; sarà

$$\int\limits_{x=a} u=\int\limits_{h=0}\frac{\sqrt{(a+h)}+\sqrt{a}+\sqrt{h}}{\sqrt{(2a+h)}\sqrt{h}}=\int\limits_{h=0}\frac{1+\frac{\sqrt{h}}{2\sqrt{h}}\cdots}{\sqrt{2a}+\frac{h}{2\sqrt{2a}}-\cdots}=\frac{1}{\sqrt{2a}}$$

Esempio VII. Sia data la funzione

$$u=\frac{a^x}{x};$$

essa prende la forma $\frac{\infty}{\infty}$ per $x=\infty$. Avremo adunque

$$\int_{x=\infty} u = \int_{x=\infty} \frac{a^x la}{1} = \infty .$$

Esempio VIII. Sia data la funzione

$$u=(1-x)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\pi x;$$

per $x=1$ essa prende la forma $0\times\infty$. Mediante la formula (5) n. 272, facendo $Fx=1-x$, $fx=\operatorname{tang}\frac{1}{2}\pi x$, avremo

$$\int_{x=1} u = \int_{x=1} \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\pi x \cos^2 \frac{1}{2}\pi x}{\frac{1}{2}\pi} = \int_{x=1} \frac{2}{\pi}\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\pi x = \frac{2}{\pi};$$

oppure facendo $Fx=\operatorname{tang}\frac{1}{2}\pi x$, $-fx=1-x$,

$$\int_{x=1} u = \int_{x=1} \frac{\frac{1}{2}\pi(1-x)^2}{\cos^2 \frac{1}{2}\pi x} = \int_{x=1} \frac{-2(1-x)}{-\operatorname{sen}\pi x} = \int_{x=1} \frac{-2}{\pi\cos\pi x} = \frac{2}{\pi}.$$

Questo esempio giova a mostrare l' uso che può farsi della formula (5); ma per ottenere il valore di u corrispondente ad $x=1$ senza ricorrere ad essa basterà osservare che

$$(1-x)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\pi x = \frac{1-x}{\cos\frac{1}{2}\pi x},$$

e giovarsi immediatamente del Teorema I, n. 265.

Esempio IX. Sia data la funzione

$$u=x^m lx,$$

la quale per $x=0$ prende la forma $0\times-\infty$. Ponendo $Fx=lx$, $fx=x^m$, avremo mediante la formula (5), n. 272,

$$\int_{x=0} u = -\int_{x=0} \frac{x^{2m-1}}{mx^{m-1}} = -\int_{x=0} \frac{x^m}{m}$$

dunque il valor vero di u sarà 0, oppure ∞, secondochè m sarà positivo o negativo.

Esempio X. Sia data la funzione

$$u=x^{\frac{1}{x}},$$

la quale per $x=\infty$ prende la forma ∞^0. Avendo ricorso alla formula (6), n. 273, e facendo $fx=\frac{1}{x}$, $Fx=x$, otterremo

$$\int\limits_{x=\infty} lu=-\int\limits_{x=\infty}\frac{1}{x}=0\,; \qquad \int\limits_{x=\infty} u=e^0=1.$$

Esempio XI. Abbiasi la funzione

$$u=x^x,$$

la quale per $x=0$ prende la forma 0^0. Mediante la formula (6), n. 273, avremo

$$\int\limits_{x=0} lu=\int\limits_{x=0} x=0\,; \qquad \int\limits_{x=0} u=e^0=1.$$

Da ciò risulta che

$$\int\limits_{x=\infty} x^{\frac{1}{x}}=\int\limits_{x=0} x^x.$$

Esempio XII. Abbiasi la funzione

$$u=(1+x)^{\frac{1}{x}},$$

che per $x=0$ prende la forma 1^∞. Per la formula (6), n. 273, otterremo

$$\int\limits_{x=0} lu=\int\limits_{x=0}\frac{1}{1+x}=1\,; \qquad \int\limits_{x=0} u=e.$$

Esempio XIII. Abbiasi la funzione

$$u=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x,$$

che per $x=\infty$ prende la stessa forma 1^∞ della precedente. La formula (6), n. 273, darà

$$\int\limits_{x=\infty} lu=\int\limits_{x=\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1\,; \qquad \int\limits_{x=\infty} u=e.$$

Da ciò si raccoglie che

$$\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]_{x=0}=\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]_{x=\infty}.$$

Esempio XIV. Sia data la funzione

$$u=x^{\frac{1}{1-x}};$$

la quale per $x=1$ prende la forma 1^{∞}. Sarà

$$\left[\mathrm{l}u\right]_{x=1}=-\left[\frac{1}{x}\right]_{x=1}=-1; \qquad \left[u\right]_{x=1}=\frac{1}{e}.$$

II. *Della risoluzione delle funzioni fratte.*

275. **Definizione.** *Risolvere* una funzione fratta vuol dire scomporla in frazioni più semplici delle quali essa sia la somma.

276. **Scolio.** La risoluzione d' una funzione fratta si reputa compiuta e spinta al suo estremo termine, allorquando le frazioni componenti non si possono sottoporre ad ulteriore risoluzione.

277. **Lemma I.** Sia $\dfrac{\xi x}{fx}$ una funzione fratta. Supponiamo il numeratore di grado maggiore del denominatore; dividendo ξx per fx avremo un quoziente Q ed un resto Fx il cui grado sarà minore del grado di fx; talchè avremo

$$\frac{\xi x}{fx}=Q+\frac{Fx}{fx}; \tag{1}$$

dunque allorquando il grado del numeratore avanzerà quello del denominatore la funzione potrà scomporsi in due parti una delle quali sarà una funzione intera, l'altra una funzione fratta il cui numeratore avrà minor dimensione del denominatore.

278. **Lemma II.** Sia $\dfrac{Fx}{fx}$ una funzione fratta, nella quale la dimensione del denominatore avanzi quella del numeratore; supponiamo che fx si componga di due fattori primi fra loro, l'uno del grado m l'altro del grado n; talchè sia

$$fx=(ax^{m}+bx^{m-1}+\ldots)(hx^{n}+kx^{n-1}+\ldots);$$

dico che potremo sempre risolvere la funzione proposta nelle due frazioni seguenti;

$$\frac{Fx}{fx}=\frac{Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots}{ax^m+bx^{m-1}+\ldots}+\frac{Hx^{n-1}+Kx^{n-2}+\ldots}{hx^n+kx^{n-1}+\ldots}=\frac{P}{M}+\frac{Q}{N}.\quad(2)$$

Infatti essendo fx del grado $m+n$; il grado di Fx dovrà essere non maggiore di $m+n-1$; diguisachè Fx avrà $m+n$ termini al più. Ora riducendo al medesimo denominatore le due frazioni e sommandole, il numeratore della frazione risultante, perchè M ed N si suppongono primi fra loro, dovrà essere appunto un polinomio del grado $m+n-1$, il quale conterrà $m+n$ coefficenti incogniti; tal polinomio uguagliato ad Fx darà adunque, per il paragone dei termini, $m+n$ equazioni che potranno bastare a determinare i coefficenti medesimi. Se avverrà che il grado di Fx sia $< m+n-1$ allora alcuni dei coefficenti $A, B, \ldots H, K, \ldots$ dovranno esser nulli, ma ciò verrà mostrato dal calcolo.

279. Corollario I. Risolvendo i denominatori M, N in fattori primi le frazioni $\frac{P}{M}$, $\frac{Q}{N}$, in virtù del Lemma precedente, potranno anch'esse risolversi in parti, nè sarà necessario per procedere a questa suddivisione delle frazioni determinare $A, B, \ldots$ H, $K, \ldots$ In generale le frazioni parziali potranno esser tante di numero quanti saranno i fattori primi di fx; a ciascun fattore corrisponderà una frazione, e il grado del suo numeratore sarà minore di una unità del grado del fattore medesimo.

280. Corollario II. Siano $a, b, c, \ldots u$ le radici dell'equazione $fx=0$; avremo $fx=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-u)$; in tal caso i numeratori delle frazioni parziali corrispondenti ai denominatori del primo grado $x-a, x-b, x-c, \ldots x-u$, saranno del grado 0 cioè costanti. Talchè potremo porre

$$\frac{Fx}{fx}=\frac{A}{x-a}+\frac{A_1}{x-b}+\frac{A_2}{x-c}\ldots+\frac{A_{m-1}}{x-u};\qquad(3)$$

infatti per la riduzione al medesimo denominatore e pel paragone de'termini si avranno tante equazioni quanti sono i numeratori A, A_1, ec. da determinarsi.

281. Corollario III. Se due o più radici della equazione $fx=0$ fossero uguali fra loro, la risoluzione della frazione non potrebbe farsi a seconda della equazione (3), n. 280; perocchè se

fosse $a=b$ le due prime frazioni ne formerebbero una sola $\frac{A+A_1}{x-a}$, sicchè fatta la riduzione al medesimo denominatore non avremmo come nel caso precedente m equazioni, ma solo ne avremmo $m-1$; le quali non potrebbero bastare a determinare gli m coefficenti A, A_1, ec. Sieno n le radici uguali ad a; fx conterrà il fattore $(x-a)^n$; e la frazione corrispondente a questo fattore medesimo (n. 279), sarà

$$\frac{Px^{n-1}+P_1x^{n-2}\ldots+P_{n-1}}{(x-a)^n}; \tag{4}$$

oppure, ponendo $x-a=y$ che è quanto dire $x=a+y$,

$$\frac{P(a+y)^{n-1}+P_1(a+y)^{n-2}\ldots+P_{n-1}}{y^n}=$$
$$\frac{A+A_1y+A_2y^2\ldots\ldots+A_{n-1}y^{n-1}}{y^n}=$$
$$\frac{A}{y^n}+\frac{A_1}{y^{n-1}}+\frac{A_2}{y^{n-2}}\ldots+\frac{A_{n-1}}{y};$$

il che mostra che alla frazione (4) corrispondente al fattore$(x-a)^n$, si potranno sostituire le n frazioni seguenti

$$\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{A_1}{(x-a)^{n-1}}\ldots+\frac{A_{n-1}}{x-a} \tag{5}$$

i cui numeratori sono costanti.

282. Corollario IV. Se l'equazione $fx=0$ avesse una o più coppie di radici immaginarie $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$, la risoluzione della frazione potrebbe sempre farsi o a seconda della equazione (3), n. 280, o della (4), n. 281; ma in questo caso si preferisce sostituire a ciascuna coppia di fattori immaginarj un solo fattore reale del secondo grado, cui corrisponderà una frazione della forma

$$\frac{Ax\pm B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}; \tag{6}$$

ed ove quel fattore avesse un' esponente n la frazione corrispondente sarebbe

$$\frac{Px^{2n-1}+P_1x^{2n-2}\ldots\ldots+P_{2n-1}}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}; \tag{7}$$

ad essa potremmo per altro sostituire le n frazioni seguenti

$$\frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}+\frac{A_1x+B_1}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}}\ldots\ldots+\frac{A_{n-1}x+B_{n-1}}{(x-\alpha)^2+\beta^2}; \tag{8}$$

infatti $2n$ sono i coefficenti P, $P_1, P_2, \ldots$ ed altrettanti sono i coefficenti $A, B, A_1, B_1, \ldots$; talchè supponendo cognite le quantità $P, P_1, P_2 \ldots$, mediante la riduzione allo stesso denominatore, e col paragone dei termini potremo sempre trovare i valori di $A, B, A_1, B_1, \ldots$

283. Scolio. Le cose precedenti bastano a mostrare come il metodo de'coefficenti indeterminati sia sufficiente a risolvere le funzioni fratte in parti; nullameno dee preferirsi l'uso delle formule che passiamo a stabilire, e che ci vengono date dal calcolo differenziale. Abbiasi come sopra $\frac{Fx}{fx}$ una funzione fratta nella quale il numeratore sia di minor dimensione del denominatore; distingueremo quattro casi.

284. Caso 1° *L'equazione $fx = 0$ abbia tutte le radici reali e disuguali fra loro.* Supponendo che le m radici della equazione $fx = 0$ sieno $a, b, c, \ldots t, u$, avremo

$$fx = (x - a)(x - b)(x - c) \ldots (x - u); \tag{9}$$

poniamo adunque

$$\frac{Fx}{fx} = \frac{A}{x-a} + \frac{A_1}{x-b} + \frac{A_2}{x-c} \ldots + \frac{A_{m-1}}{x-u}; \tag{10}$$

moltiplicando per fx otterremo l'identità

$$\begin{aligned} Fx \geqq\; & A(x-b)(x-c) \ldots\ldots (x-u) \\ & + A_1(x-a)(x-c) \ldots\ldots (x-u) \\ & + A_2(x-a)(x-b) \ldots\ldots (x-u) \\ & \ldots\ldots \\ & + A_{m-1}(x-a)(x-b) \ldots\ldots (x-t); \end{aligned} \tag{11}$$

la quale dovrà verificarsi per qualunque valore della x; per conseguenza facendo successivamente $x = a, = b, = c, \ldots$ sarà

$$\begin{aligned} Fa &\geqq A(a-b)(a-c) \ldots\ldots (a-u) \\ Fb &\geqq A_1(b-a)(b-c) \ldots\ldots (b-u) \\ Fc &\geqq A_2(c-a)(c-b) \ldots\ldots (c-u) \\ & \ldots\ldots \\ Fu &\geqq A_{m-1}(u-a)(u-b) \ldots\ldots (u-t); \end{aligned} \tag{12}$$

oltre a ciò differenziando l'identità (9) si trova

$$\begin{aligned}f'x \gtrless\ &(x-b)(x-c)\ .\ .\ .\ .\ .\ (x-u)\\ &+(x-a)(x-c)\ .\ .\ .\ .\ .\ (x-u)\\ &+(x-a)(x-b)\ .\ .\ .\ .\ .\ (x-u)\\ &.\ .\ .\ .\ .\\ &+(x-a)(x-b)\ .\ .\ .\ .\ .\ (x-t);\end{aligned}$$

e quindi facendo come sopra $x=a, =b, =c, \ldots$ avremo

$$\begin{aligned}f'a &\gtrless (a-b)(a-c)\ .\ .\ .\ .\ .\ (a-u)\\ f'b &\gtrless (b-a)(b-c)\ .\ .\ .\ .\ .\ (b-u)\\ f'c &\gtrless (c-a)(c-b)\ .\ .\ .\ .\ .\ (c-u)\\ &.\ .\ .\ .\ .\\ f'u &\gtrless (u-a)(u-b)\ .\ .\ .\ .\ .\ (u-t);\end{aligned}$$

perlochè le equazioni (12) si cangeranno nelle seguenti;

$$A=\frac{Fa}{f'a},\quad A_1=\frac{Fb}{f'b},\quad A_2=\frac{Fc}{f'c}\ldots\ldots A_{m-1}=\frac{Fu}{f'u} \tag{13}$$

ed in virtù di questi valori l'equazione (10) diverrà

$$\frac{Fx}{fx}=\frac{Fa}{f'a(x-a)}+\frac{Fb}{f'b(x-b)}=\frac{Fc}{f'c(x-c)}\ldots\ldots+\frac{Fu}{f'u(x-u)} \tag{14}$$

285. Scolio I. In altro modo. Poniamo

$$\frac{Fx}{fx}=\frac{A}{x-a}+\frac{\psi x}{\varphi x};$$

avremo l'identità

$$Fx \gtrless A\frac{x-a}{fx}+fx\frac{\psi x}{\varphi x},$$

la quale dovrà verificarsi per qualunque valore della x: or per $x=a$ il secondo termine anderà a zero, e la frazione $\dfrac{fx}{x-a}$ si ridurrà a $\frac{0}{0}$, ragione per cui il suo valor vero sarà $f'a$; avremo adunque l'equazione

$$Fa=Af'a;$$

e per conseguenza anche le seguenti

$$Fb=A_1f'b,\quad Fc=A_2f'c,\ \ldots.$$

dalle quali si hanno gli stessi valori di A, A_1, A_2, ... trovati sopra.

286. Scolio II. La formula (14), moltiplicando i due membri per fx, si cambia nella seguente

$$Fx = \frac{(x-b)(x-c)\ldots(x-u)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-u)}Fa + \frac{(x-a)(x-c)\ldots(x-u)}{(b-a)(b-c)\ldots(b-u)}Fb$$

$$+\frac{(x-a)(x-b)\ldots(x-u)}{(c-a)(c-b)\ldots(c-u)}Fc\ldots\ldots+\frac{(x-a)(x-b)\ldots(x-t)}{(u-a)(u-b)\ldots(u-t)}Fu;$$

mediante tal formula, la quale si deve al La Grange, potremo trovare una funzione intera Fx del grado $n-1$ quando si conosceranno di essa n valori particolari.

287. Caso 2°. *L'equazione $fx=0$ abbia n radici uguali ad a.* Sarà in tal caso

$$fx = (x-a)^n \varphi x, \tag{15}$$

indicando con φx il prodotto dei fattori dipendenti dalle altre radici della equazione stessa. Pongasi

$$\frac{Fx}{fx} = \frac{Fx}{(x-a)^n\varphi x} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{n-2}}$$

$$\ldots + \frac{A_{n-1}}{(x-a)} + \frac{\psi x}{\varphi x}; \tag{16}$$

quindi si faccia per brevità

$$\mathfrak{f}x = \frac{Fx}{\varphi x}; \tag{17}$$

$$\psi x = A + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 \ldots\ldots + A_{n-1}(x-a)^{n-1} \tag{18}$$

$$\xi x = (x-a)^n \frac{\psi x}{\varphi x}; \tag{19}$$

avremo l'identità $\quad \mathfrak{f}x \geqq \psi x + \xi x;$

e da essa le seguenti

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}'x &\geqq \psi' x + \xi' x, \\ \mathfrak{f}''x &\geqq \psi'' x + \xi'' x, \\ &\ldots\ldots \\ \mathfrak{f}^{(n-1)}x &\geqq \psi^{(n-1)}x + \xi^{(n-1)}x; \end{aligned} \tag{20}$$

le quali dovranno verificarsi per qualunque valore della x.

Ora facendo $x=a$, ξx e le sue successive derivate sino a

quella dell'ordine $n-1$ inclusive anderanno a zero; infatti ξx e le sue derivate sino a quella dell'ordine $n-1$ inclusivo contengono il fattore $x-a$, i denominatori delle derivate medesime sono potenze di φx, le quali non possono andare a zero per $x=a$ stantechè $x-a$ non è fattore di φx; inoltre φx e ψx e le loro derivate essendo funzioni intere, non possono per $x=a$ riuscire infinite: dunque per $x=a$ le funzioni $\mathrm{f}x$, $\mathrm{f}'x$, ...$\mathrm{f}^{(n-1)}x$ risulteranno ordinatamente uguali a $\psi x, \psi' x, \ldots \psi^{(n-1)}x$. Ma

$$\psi' x = 1.A_1 + 2A_2(x-a) + 3A_3(x-a)^2 + \ldots.$$
$$\psi'' x = 1.2\,A_2 + 2.3\,A_3(x-a) + \ldots..$$
$$\psi''' x = 1.2.3\,A_3 + \ldots..$$

dunque

$$\mathrm{f}a = A$$
$$\mathrm{f}'a = 1.\,A_1$$
$$\mathrm{f}''a = 1.2\,A_2$$
$$\mathrm{f}'''a = 1.2.3\,A_3$$
$$\ldots.$$
$$\mathrm{f}^{(n-1)}a = 1.2.3\ldots(n-1)\,A_{n-1};$$

ricavando di qui i valori di A, $A_1 \ldots A_{n-1}$ e sostituendoli nella equazione (16) avremo

$$\frac{Fx}{\mathrm{f}x} = \frac{Fx}{(x-a)^n \varphi x} = \frac{\mathrm{f}a}{(x-a)^n} + \frac{\mathrm{f}'a}{1.(x-a)^{n-1}} + \frac{\mathrm{f}''a}{1.2(x-a)^{n-2}}$$
$$+ \frac{\mathrm{f}'''a}{1.2.3(x-a)^{n-3}} \;\ldots.. + \frac{\mathrm{f}^{(n-1)}}{1.2.3\ldots\ldots n(x-a)} + \frac{\psi x}{\varphi x}, \quad (22)$$

dove $\mathrm{f}a = \dfrac{Fa}{\varphi a}$ ed $\mathrm{f}'a, \mathrm{f}''a, \mathrm{f}'''a \ldots \mathrm{f}^{n-1}a$ sono le successive derivate di $\dfrac{Fx}{\varphi x}$ colla x mutata in a.

Se fosse $\varphi x = 1$ sarebbe $\mathrm{f}a = Fa$, $\mathrm{f}'a = F'a$, $\mathrm{f}''a = F''a$.... e quindi

$$\frac{Fx}{\mathrm{f}x} = \frac{Fx}{(x-a)^n} = \frac{Fa}{(x-a)^n} + \frac{F'a}{(x-a)^{n-1}} + \frac{F''a}{1.2(x-a)^{n-2}}$$
$$+ \frac{F'''a}{1.2.3(x-a)^{n-3}} \;\ldots.. + \frac{F^{(n-1)}a}{1.2.3\ldots n(x-a)}. \quad (23)$$

288. Scolio. Osservando che

$$\mathrm{f}'x = \frac{1}{dx}\, d\frac{Fx}{\varphi x}, \; \mathrm{f}''x = \frac{1}{dx^2}\, d^2\frac{Fx}{\varphi x}, \ldots..$$

si vedrà che le derivate di fx si possono esprimere per le derivate di Fx e φx. Or sebbene la funzione φx, come quella che rappresenta il quoziente della divisione di fx per $(x-a)^n$, si debba riputar cognita, nullameno gioverà mostrare come i valori delle derivate di φx corrispondenti ad $x=a$, si possano ben anche ricavare dalla funzione fx senza ricorrere a siffatta divisione.

L'equazione (15) mostra che le formule stabilite al n. 145 possono servire a quest' oggetto; infatti sostituendo $x-a$ ad x, φx a v, n ad a esse daranno le espressioni delle derivate $f^{(n)}x, f^{(n+1)}x, f^{(n+2)}x, \ldots$ quindi i valori che queste derivate acquistano per $x=a$; il che equivale a porre $x'=0$ nelle stesse formule del n. 145; di questa guisa avremo

$$
\begin{gathered}
f^{(n)}a = 1.2.\ldots.n\,\varphi a, \\
f^{(n+1)}a = 2.3\ldots(n+1)\,\varphi' a, \\
f^{(n+2)}a = 3.4\ldots(n+2)\,\varphi'' a, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{gathered}
$$

e conseguentemente

$$
\begin{aligned}
\varphi a &= \frac{f^{(n)}a}{1.2\ldots n}, \\
\varphi' a &= \frac{f^{(n+1)}a}{2.3\ldots(n+1)}, \\
\varphi'' a &= \frac{f^{(n+2)}a}{3.4\ldots(n+2)}, \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{aligned}
\tag{24}
$$

sicchè nel caso in cui l'equazione $fx=0$ abbia n radici uguali ad a, per trovare le componenti di $\frac{Fx}{fx}$ che dipendono dal fattore $(x-a)^n$ non sarà necessario determinare il fattore φx.

289. Caso 3°. *L'equazione* $fx=0$ *abbia una coppia di radici immaginarie, oppure ne abbia più coppie disuguali fra loro.* Sarà

$$fx = [(x-\alpha)^2+\beta^2]\,\varphi x; \tag{25}$$

poniamo adunque

$$\frac{Fx}{fx} = \frac{A+Bx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{\psi x}{\varphi x}; \tag{26}$$

avremo l'identità

$$Fx = (A + Bx)\frac{fx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + fx\frac{\psi x}{\varphi x};$$

la quale dovrà sussistere per qualunque valore della x. Facendo $x = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, la frazione $\frac{fx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$ si ridurrà a $\frac{0}{0}$, ed il suo valor vero sarà $\frac{f'x}{2(x-\alpha)}$; fx si ridurrà a zero; nè potrà ridursi a zero φx, perchè si suppone che fx contenga un sol fattore uguale a $(x-\alpha)^2+\beta^2$; avremo adunque

$$F(\alpha \pm \beta\sqrt{-1}) = [A + B(\alpha \pm \beta\sqrt{-1})]\frac{f'(\alpha \pm \beta\sqrt{-1})}{\pm 2\beta\sqrt{-1}} \tag{27}$$

ovvero

$$\frac{F(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})}{f'(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})} = \frac{A+B(\alpha\pm\beta\sqrt{-1})}{\pm 2\beta\sqrt{-1}} = \frac{1}{2}B \mp \frac{A+B\alpha}{2\beta}\sqrt{-1}; \tag{28}$$

e supponendo che $\frac{Fx}{f'x}$, allorchè si sostituisce $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ ad x prenda la forma $M + N\sqrt{-1}$, la medesima funzione $\frac{Fx}{f'x}$ sostituendo $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ ad x diverrà $M - N\sqrt{-1}$; ragione per cui l'equazione (28) si cangerà nella seguente;

$$M \pm N\sqrt{-1} = \frac{1}{2}B \mp \frac{A+B\alpha}{2\beta}\sqrt{-1}; \tag{29}$$

dalla quale avremo

$$M = \frac{1}{2}B, \quad N = -\frac{A+B\alpha}{2\beta};$$

$$B = 2M, \quad A = -2\alpha M - 2\beta N; \tag{30}$$

e questi sono i valori di A e B che era d'uopo determinare.

290. Caso 4°. *L'equazione* $fx = 0$ *abbia* n *coppie di radici uguali ad* $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$. In questo caso sarà

$$fx = [(x-\alpha)^2+\beta^2]^n \varphi x;$$

e perciò porremo

$$\frac{Fx}{fx}=\frac{Fx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n\varphi x}=\frac{A+Bx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}+\frac{A_1+B_1x}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}}+\ldots$$

$$\ldots\ldots+\frac{A_{n-1}+B_{n-1}x}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{\psi x}{\varphi x};$$

e facendo per brevità

$$\mathfrak{f}x=\frac{Fx}{\varphi x}, \tag{31}$$

$$\psi x=A+Bx+(A_1+B_1x)[(x-\alpha)^2+\beta^2]\ \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+(A_{n-1}+B_{n-1}x)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}, \tag{32}$$

$$\xi x=[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n\frac{\psi x}{\varphi x}, \tag{33}$$

avremo le identità

$$\mathfrak{f}x \gtreqless \psi x+\xi x,$$
$$\mathfrak{f}'x \gtreqless \psi' x+\xi' x,$$
$$\mathfrak{f}''x \gtreqless \psi'' x+\xi'' x,$$
$$\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{f}^{(n-1)}x \gtreqless \psi^{(n-1)}x+\xi^{(n-1)}x;$$

le quali dovranno verificarsi per qualunque valore della x. Ora per le osservazioni fatte di sopra è manifesto che ponendo $x=\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$, la funzione ξx, e le sue derivate sino a quella dell'ordine $n-1$ inclusive anderanno a zero, ed $\mathfrak{f}x$, $\mathfrak{f}'x$, $\mathfrak{f}''x$, ...$\mathfrak{f}^{(n-1)}x$ riusciranno ordinatamente uguali a ψx, $\psi' x$, $\psi'' x$, ... $\psi^{(n-1)}x$. Ma

$$\psi x=A+Bx+(A_1+B_1x)[(x-\alpha)^2+\beta^2]$$
$$+(A_2+B_2x)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^2+\text{ec.}$$
$$\psi' x=B+2(A_1+B_1x)(x-\alpha)+B_1[(x-\alpha)^2+\beta^2]$$
$$+2.2(A_2+B_2x)[(x-\alpha)^2+\beta^2](x-\alpha)+B_2[(x-\alpha)^2+\beta^2]^2+\text{ec.}$$
$$\psi'' x=2B_1(x-\alpha)+2(A_1+B_1x)+2B_1(x-\alpha)$$
$$+2.2B_2[(x-\alpha)^2+\beta^2](x-\alpha)+2.2.2(A_2+B_2x)(x-\alpha)^2$$
$$+2.2(A_2+B_2x)[(x-\alpha)^2+\beta^2)]+\ \text{ec.}$$
$$\ldots\ldots$$

dunque

$$\mathfrak{f}x=A+Bx+\text{ ec.}$$
$$\mathfrak{f}'x=B+2(A_1+B_1x)(x-\alpha)+\text{ ec.}$$
$$\mathfrak{f}''x=2B_1(x-\alpha)+2(A_1+B_1x)+2B_1(x-\alpha)+\text{ ec.}$$
$$\ldots\ldots$$

ben inteso che si faccia $x = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$. Queste equazioni le quali sono $2n$ di numero, basteranno a determinare i $2n$ coefficienti $A, B, A_1, B_1, \ldots A_{n-1}, B_{n-1}$, sia che si sostituisca alla x l'immaginario $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, sia che si sostituisca l'altro immaginario $\alpha - \beta\sqrt{-1}$.

III. I valori particolari delle funzioni che si ottengono per mezzo della serie.

291. Teorema I. *Ogniqualvolta la funzione* f(i + h) *potrà essere espressa da una serie ordinata secondo le potenze ascendenti intere o positive della* h, *questa serie coinciderà colla serie del Taylor.*

Supponiamo che abbiasi l'identità

$$f(x+h) = A + Bh^a + Ch^b + Dh^c + \ldots; \quad (1)$$

dove $a, b, c, \ldots$, si suppone che sieno numeri interi e positivi disposti secondo l'ordine di grandezze crescenti, ed $A, B, C\ldots$ funzioni della x; prendendo le derivate parziali, prima rapporto alla x, quindi rapporto alla h, avremo

$$\frac{df(x+h)}{dx} = \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dx}h^a + \frac{dC}{dx}h^b + \frac{dD}{dx}h^c + \ldots; \quad (2)$$

$$\frac{df(x+h)}{dh} = Bah^{a-1} + Cbh^{b-1} + Dch^{c-1} + \ldots; \quad (3)$$

e siccome facendo $x + h = u$; si trova

$$\frac{df(x+h)}{dx} = \frac{dfu}{du}\frac{du}{dx} = \frac{dfu}{du} \times 1,$$

$$\frac{df(x+h)}{dh} = \frac{dfu}{du}\frac{du}{dh} = \frac{dfu}{du} \times 1,$$

perciò le due derivate parziali $\frac{df(x+h)}{dx}$, $\frac{df(x+h)}{dh}$ sono identiche e debbono necessariamente contenere le medesime potenze di h; dimanierachè osservando che gli esponenti $a, b, c\ldots$ si suppongono disposti secondo l'ordine di grandezze crescenti, avremo

$$a-1=0,\quad a=1,\qquad Ba=\frac{dA}{dx},$$

$$b-1=a,\quad b=a+1,\quad Cb=\frac{dB}{dx},$$

$$c-1=b,\quad c=b+1,\quad Dc=\frac{dC}{dx},$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

Oltracciò facendo nella equazione (1) $h=0$ troveremo $fx=A$; dunque

$$a=1,\ b=2,\ c=3,\ \ldots$$

$$A=fx,\quad B=f'x,\quad C=\frac{1}{2}f''x,\quad D=\frac{1}{2.3}f'''x,\ \ldots$$

e per conseguenza

$$f(x+h)=fx+\frac{h}{1}f'x+\frac{h^2}{1.2}f''x+\frac{h^3}{1.2.3}f'''x+\ \ldots \tag{4}$$

la qual serie coincide con quella del Taylor che dimostrammo ai n. 89 e 227.

292. Scolio I. Finchè la x e la h saranno indeterminate lo sviluppo (4) dovrà considerarsi come una trasformazione analitica della funzione $f(x+h)$ di cui ci potremo valere in molte occorrenze senza por mente alla natura delle funzioni fx, $f'x$, $f''x$, $f'''x$, ...; e come trasformazione analitica lo essere tale sviluppo formato d'un numero indefinito di termini non potrà far luogo ad alcuna difficoltà. Ma quando vorremo attribuire alla x un valore particolare x_0, ed h sarà un'accrescimento determinato del valore medesimo, allora siffatto sviluppo non corrisponderà al valore particolare che acquisterà la funzione $f(x+h)$ se non quando saranno soddisfatte le condizioni della convergenza; oltracciò la funzione fx e le sue successive derivate dovranno esser continue per tutti i valori della variabile compresi fra il valore iniziale x_0 e il valore x_0+h (n. 227); in tal caso ad avere un valore particolare approssimativo della funzione, potremo tener conto d'un certo numero più o meno grande di termini, e determinare l'espressione del *resto*, o almeno trovare i limiti dell'errore che si commette trascurando questo resto medesimo, che è quanto dire tutti i termini rimanenti della serie (n. 228).

293. Scolio II. La serie del Taylor ci fa conoscere lo sviluppo della funzione $f(x+h)$ ordinato per le potenze ascendenti intere e positive della h, il che ha luogo sempre quando x ed h sono indeterminate. È manifesto adunque che nel caso in cui vogliasi attribuire ad x un valore particolare x_0 non potremo ottenere lo sviluppo della funzione $f(x+h)$ quando saremo certi che quello sviluppo medesimo deve necessariamente contenere delle potenze fratte o negative di h. Ora per istabilire un criterio che giovi a far conoscere in quali casi ciò avrà luogo gioverà por mente ai due Teoremi seguenti.

294. Teorema I. *Se la funzione* $\mathrm{f x}$ *per* $\mathrm{x}=\mathrm{x}_0$ *diverrà infinita, lo sviluppo della funzione* $\mathrm{f}(\mathrm{x}_0+\mathrm{h})$ *dovrà contenere un termine della forma* $\mathrm{H h}^{-m}$.

Infatti il valore particolare fx_0 della funzione fx è identico a quello che acquista la funzione $f(x+h)$ per $x=x_0$ ed $h=0$; supponendo adunque che il valore fx_0 sia infinito, anche $f(x_0+h)$ per $h=0$ sarà infinito; dunque $f(x_0+h)$ conterrà alcuna potenza negativa di h.

295. Teorema II. *Se per* $\mathrm{x}=\mathrm{x}_0$ *le derivate di* $\mathrm{f x}$ *dalla prima sino a quella dell' ordine* $\mathrm{n}-1$ *inclusive avranno un valore finito e la derivata susseguente* $\mathrm{f}^{(n)}\mathrm{x}$ *per* $\mathrm{x}=\mathrm{x}_0$ *sarà infinita, lo sviluppo della funzione* $\mathrm{f}(\mathrm{x}_0+\mathrm{h})$ *avrà una potenza fratta di* h *il cui esponente si troverà compreso fra* $\mathrm{n}-1$ *ed* n.

Infatti il valore particolare $f^{(n)}x_0$ della funzione derivata $f^{(n)}x$ è identico a quello che acquista la funzione $f^{(n)}(x_0+h)$ per $x=x_0$ ed $h=0$; ora il valore di $f^{(n)}(x_0+h)$ non può per $h=0$ diventare infinito, ammenochè $f^{(n)}(x_0+h)$ non contenga alcuna potenza negativa di h; dunque $f^{(n)}(x_0+h)$ conterrà un termine Th^{-i}; conseguentemente $f^{(n-1)}(x_0+h)$ conterrà un termine Lh^{1-i}, dove sarà $1-i>0$ cioè $i<1$, perocchè si suppone che la derivata $f^{(n-1)}x$ per $x=x_0$ abbia un valore finito: inoltre $f(x_0+h)$ dovrà contenere un termine Mh^{n-i}; e sarà $n-1<n-i<n$; il che è quanto dovevasi dimostrare.

296. Scolio. L'osservazione fatta allo Scolio II (n. 293) ci giova a mostrare altresì che la serie del Taylor non potrà servire a determinare lo sviluppo di $f(x+h)$ allorquando per $x=a$ sparirà dalla funzione $y=fx$ un radicale, per esempio $Q\sqrt[n]{(x-a)^m}$, (dove Q si suppone che sia una funzione razionale della x), annullandosi la quantità posta sotto il radicale mede-

simo; infatti lo sviluppo della funzione $f(x_0+h)$ la quale acquista in questo caso il radicale $Q_1\sqrt[n]{h^m}$, dovrà di necessità contenere le potenze fratte

$$h^{\frac{m}{n}},\ h^{\frac{m}{n}+1},\ h^{\frac{m}{n}+2},\ldots.$$

Può avvenire per altro che un radicale della funzione $y=fx$ sparisca facendo $x=a$, perchè si annulli un coefficiente del radicale medesimo; il che avverebbe appunto quando la funzione fx contenesse un termine della forma $(x-a)\sqrt[n]{x}$; in questo caso lo sviluppo di $f(x_0+h)$ sarebbe dato dalla serie del Taylor; infatti lo sviluppo medesimo non dovrebbe contenere alcuna potenza fratta di h, sibbene conterrebbe le potenze fratte di a, giacchè il termine $(x-a)\sqrt[n]{x}$ si cambia in $h\sqrt[n]{(a+h)}$ il cui sviluppo può ordinarsi secondo le potenze ascendenti intere e positive di h. E qui giova il notare che per $x=a$ si elimina il radicale dalla funzione fx, non già dalle sue derivate; ed ove si avesse $y=(x-a)^m\sqrt[n]{x}$ il radicale per $x=a$ sparirebbe da y e da tutte le derivate di y sino alla m^{ma} inclusive; ricomparirebbe per altro nelle derivate susseguenti; la qual cosa si rende manifesta osservando che $f(x+h)$ $=(x+h-a)^m\sqrt[n]{(x+h)}$, ed $f(a+h)=h^m\sqrt[n]{(a+h)}$; cosicchè i radicali, cioè le potenze fratte di a, non potrebbero comparire nello sviluppo di $f(a+h)$ prima del termine contenente h^m che appunto è quello moltiplicato per la derivata m^{ma} di fx.

Ma se la y in luogo di essere funzione esplicita (qual'è appunto $y=(x-a)^m\sqrt{x}$) sarà data per mezzo di una equazione $F(x,y)=0$ da cui sia stato soppresso il radicale mediante l'opportuno inalzamento a potenza, la determinazione delle derivate di y potrà andar soggetta ad alcune difficoltà che qui giova esporre.

Sia $y=fx$, ed $y'=f'x$, $y''=f''x$,... Supponiamo che per un valore dato di x, $x=a$, sparisca da fx un radicale, e che questo radicale medesimo non sparisca da $f'x$, cioè supponiamo che quel radicale si trovi nella funzione fx accompagnato dal fattore $x-a$. È chiaro che per $x=a$ la funzione $f'x$ avrà un maggior numero di valori della fx a cagione del radicale scomparso da fx, ma che si trova in $f'x$; donde segue che il valore di y' non potrà esser dato da una semplice funzione di x e y che non contenga esplicitamente questo radicale. Ora se dall'equazione $y=fx$ si eli-

mina il radicale medesimo coll'inalzamento a potenza, l'equazione risultante $z = F(x,y)$

darà
$$y' = -\frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dz}{dy}};$$

la qual formula perchè non contiene alcun radicale non potrà indicarci tutti i valori di y'. Per vedere come si possano in tal caso determinare questi valori medesimi supponiamo in primo luogo che essi debbano essere in numero di due, cioè α e β; dalla precedente equazione avremo

$$\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dy}\, y' = 0 \tag{5}$$

sostituendo a ad x e ad y' il valore unico che ne risulta, i coefficenti $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ si cambieranno ne' due numeri A, B; talchè sarà

$$A + By' = 0;$$

equazione che dovendo essere soddisfatta da $y' = \alpha$, ed $y' = \beta$, darà

$$A + B\alpha = 0, \quad A + B\beta = 0;$$

e quindi

$$B(\alpha - \beta) = 0;$$

e poichè α si suppone diverso da β avremo, $B = 0$, $A = 0$; dunque l'equazione (5) è una identità indipendente da qualunque valore di y'; cioè per $x = a$ sarà

$$\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dz}{dy} = 0, \quad y' = \frac{0}{0}.$$

Passiamo all'equazione derivata del second'ordine;

$$\frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{d^2z}{dxdy}\, y' + \frac{d^2z}{dy^2}\, y'^2 + \frac{dz}{dy}\, y'' = 0;$$

questa equazione generalmente parlando gioverà a far conoscere il valore di y''; ma siccome nel caso proposto la quantità $\frac{dz}{dx}$ si annulla, il termine contenente y'' sparirà e ne risulterà l'equazione

$$\frac{d^2z}{dx^2}+2\frac{d^2z}{dxdy}y'+\frac{d^2z}{dy^2}y'^2=0$$

del secondo grado; essa, quando per $x=a$ ed $y=b$ le derivate $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ si cangino nei numeri L, N, M diversi da zero, farà conoscere i due valori di y'.

Sia $$y=x+(x-a)\sqrt{(x-b)},$$

$$y'=1+\sqrt{(x-b)}+\frac{x-a}{2\sqrt{(x-b)}};$$

per $x=a$ abbiamo $y=a, y'=1\pm\sqrt{a-b}$.

Ma se la proposta si trasformerà nella seguente

$$(y-x)^2=(x-a)^2(x-b),$$

avremo

$$2(y-x)(y'-1)=2(x-a)(x-b)+(x-a)^2;$$

$$y'=1+\frac{2(x-a)(x-b)+(x-a)^2}{2(y-x)};$$

facendo $x=a$, e conseguentemente $y=x$, risulterà $y'=\frac{0}{0}$.

Passeremo adunque alla derivata del secondo ordine, che troveremo essere

$$2(y-x)y''+2(y'-1)^2=4(x-a)+2(x-b);$$

di qui facendo $x=a, y=x$, avremo

$$(y'-1)^2=a-b,$$

e quindi $$y'=1\pm\sqrt{a-b};$$

come trovammo di sopra.

Supponiamo che i valori di y' debbano esser tre α, β, γ; allora L, N, M sarebbero nulli ad un tempo e l'equazione (2) del second'ordine sarebbe soddisfatta da qualunque valore di y. Infatti dovendo l'equazione $L+2Ny'+My'^2=0$, esser soddisfatta dai valori α, β, γ di y' avremo

$$L+2N\alpha+M\alpha^2=0, L+2N\beta+M\beta^2=0, L+2N\gamma+M\gamma^2=0;$$

e quindi $$2N(\alpha-\beta)+M(\alpha^2-\beta^2)=0,$$

ovvero $$2N+M(\alpha+\beta)=0;$$

la quale non potrà verificarsi, ammenochè non sia $M=0, N=0$; il che fa concludere che debba ancora L essere zero. Poichè adunque l'equazione del second'ordine si cambia in una manifesta identità $0 \gtrless 0$ ricorreremo alla equazione del terz' ordine, cioè

$$\frac{d^3z}{dx^3}+3\frac{d^3z}{dx^2dy}y'+3\frac{d^3z}{dxdy^2}y'^2+\frac{d^3z}{dy^3}y'^3$$
$$+3\frac{d^2z}{dxdy}y''+3\frac{d^2z}{dy^2}y'y''+\frac{dz}{dy}y'''=0;$$

la quale, perchè le derivate parziali $\frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ sono identicamente uguali a zero, si riduce a

$$\frac{d^3z}{dx^3}+3\frac{d^3z}{dx^2dy}y'+3\frac{d^3z}{dxdy^2}y'^2+\frac{d^3z}{dy^3}y'^3=0;$$

equazione del terzo grado che darà i tre valori di y'.

Sia $$y=(x-a)\sqrt[3]{(x-b)};$$

avremo $$y'=\sqrt[3]{(x-b)}+\tfrac{1}{3}(x-a)(x-b)^{-\frac{2}{3}};$$

per $x=a$, si ha $y=0, y'=\sqrt[3]{(a-b)}$.

Or se la proposta fosse data sotto la forma

$$y^3=(x-a)^3(x-b)$$

priva di radicali, avremmo

$$3y^2y'=(x-a)^3+3(x-a)^2(x-b),$$

equazione che per $x=a, y=0$ diventa $0 \gtrless 0$; per la qual cosa passando alla derivata seconda, sarà

$$3y^2y''+6yy'^2=3(x-a)^2+3(x-a)^2+6(x-a)(x-b)$$

la quale si muta come la precedente in $0 \gtrless 0$; venendo alla derivata del terz'ordine otterremo

$$3y^2y'''+6yy'y''+6y'^3+12yy'y''=12(x-a)+6(x-a)+6(x-b);$$

essa per $x=a, y=0$ ci dà

$$y'^3 = a - b;$$

equazione del terzo grado da cui avremo $y' = \sqrt[3]{(a-b)}$, cioè i tre valori di y'.

297. Scolio II. Acciocchè sussista l'equazione

$$f(x_0 + h) = fx_0 + \frac{h}{1}f'x_0 + \frac{h^2}{1.2}f''x_0 + \ldots.$$

$$\ldots. + \frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x_0 + \theta h), \tag{6}$$

non è necessario che le derivate di fx superiori alla n^{ma} soddisfacciano a veruna condizione speciale. Queste derivate potranno se vuolsi essere discontinue per alcuno dei valori della variabile estesi da x_0 ad $x_0 + h$, e non cesserà per questo la formula di essere esatta: dunque lo sviluppo del valore particolare $f(x_0 + h)$ potrà essere esatto quando si arresti ad un certo termine, e riuscire inesatto ove si voglia protrarre più oltre.

Esempio. Sia

$$fx = P + Q(x-a)^{m+\frac{p}{q}}$$

P e Q essendo funzioni della x, $\frac{p}{q}$ una frazione compresa fra 0 ed 1. Attribuendo alla x il valore particolare a le derivate saranno finite fino a quella dell'ordine m inclusive, ove per altro le derivate di P e Q siano per $x = a$ finite anch'esse; ma le derivate degli ordini superiori all'm^{mo} saranno infinite. Lo sviluppo non dovrà adunque essere protratto al di là del termine

$$\frac{h^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}f^{(m-1)}x_0;$$

e potrà essere completato mediante il termine complementario, la cui forma si dedurrà dalla derivata susseguente.

298. Scolio III. Se nella formula (6) si fa $x_0 = 0$, e si cangia h in x_0 si ottiene

$$fx_0 = f0 + \frac{x_0}{1}f'0 + \frac{x_0^2}{1.2}f''0 + \ldots + \frac{x_0^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(\theta x_0); \tag{7}$$

e siccome la formula (6) non può usarsi per determinare il valore particolare della funzione $f(x+h)$ corrispondente ad $x = x_0$, se non quando fx e le sue successive derivate sino alla n^{ma} inclu-

sive sieno continue per tutti i valori della x estesi da x_0 ad x_0+h, così la formula (7) non potrà usarsi per determinare il valore della funzione fx corrispondente ad $x=x_0$, se non quando fx e le sue successive derivate sino alla n^{ma} inclusive saranno continue per tutti i valori della x estesi da 0 ad x_0. Oltracciò dovranno verificarsi le condizioni volute per la convergenza della serie.

Se per qualunque valore x_0 di x preso ne'limiti dentro i quali fx e le sue derivate sono continue, il termine complementario decrescerà indefinitamente a misura che n crescerà, posto n infinitamente grande, il termine complementario

$$\frac{x^n}{1.2...n} f^{n)}(\theta x)$$

riuscirà infinitamente piccolo, e infinitamente remoto dal primo termine $f0$; per cui avremo

$$fx_0 = f0 + \frac{x_0}{1} f'0 + \frac{x_0^2}{1.2} f''0 + \frac{x_0^3}{1.2.3} f'''0 + ...,$$

cioè la serie infinita conosciuta sotto il nome di *Serie del Maclaurin*, rispetto alla quale gioverà dimostrare il teorema seguente.

299. Teorema III. *Ogniqualvolta la funzione* f x *potrà essere espressa da una serie ordinata secondo le potenze ascendenti intere e positive della* x, *questa serie coinciderà colla serie del Maclaurin.*

Supponiamo che abbiasi l'identità

$$fx \equiv A + Bx^a + Cx^b + Dx^c + \ldots .$$

$a, b, c, \ldots$ essendo numeri interi positivi e disposti secondo l'ordine di grandezze crescenti; prendendo le derivate successive d'ambedue i membri avremo (n. 85)

$$\begin{aligned} f'x &\equiv Bax^{a-1} + Cbx^{b-1} + Dcx^{c-1} + \ldots, \\ f''x &\equiv Ba(a-1)x^{a-2} + Cb(b-1)x^{b-2} \\ &\quad + Dc(c-1)x^{c-2} + \ldots, \\ f'''x &\equiv Ba(a-1)(a-2)x^{a-3} + Cb(b-1)(b-2)x^{b-3} \\ &\quad + Dc(c-1)(c-2)x^{c-3} + \ldots; \end{aligned}$$

e poichè siffatte identità debbono sussistere per qualunque valore della x, facendo $x=0$ e supponendo che per $x=0$ i valori delle derivate $f'x, f''x, f'''x, \ldots$ non riescano infiniti, avremo

$$A=f0,\quad B=\frac{f'0}{1},\quad C=\frac{f''0}{1.2},\quad D=\frac{f'''0}{1.2.3},\ldots$$

e per conseguenza

$$fx=f0+\frac{x}{1}f'0+\frac{x^2}{1.2}f''0+\frac{x^3}{1.2.3}f'''0+\ldots$$

la qual serie coincide con quella del Maclaurin.

300. Scolio I. La funzione fx si potrebbe sviluppare anche per mezzo del teorema del Taylor; sarebbe d'uopo a questo proposito sostituire x_0 ad x, ed $x-x_0$ ad h; e si troverebbe

$$fx=fx_0+\frac{x-x_0}{1}f'x_0+\frac{(x-x_0)^2}{1.2}f''x_0+\frac{(x-x_0)^3}{1.2.3}f'''x_0+\ldots;$$

qui si suppone che il valore x_0 della x sia determinato per modo che nessuno dei valori $fx_0, f'x_0, f''x_0, \ldots$, riesca infinito; oltracciò sarà d'uopo che il termine complementario di cui ci è nota la forma, abbia lo zero per limite.

301. Scolio II. Ma qui cade in acconcio il mostrare come dalla serie stessa del Maclaurin si deduca quella del Taylor; pongasi

$$Fh=f(x+h),$$

e si reputi x costante, h variabile; sarà

$$F'h=f'(x+h), F''h=f''(x+h), F'''h=f'''(x+h),\ldots,$$

e quindi

$$F'0=f'x, F''0=f''x, F'''0=f'''x,\ldots;$$

or poichè

$$Fh=F0+\frac{h}{1}F'0+\frac{h^2}{1.2}F''0+\frac{h^3}{1.2.3}F'''0+\ldots,$$

risulterà

$$f(x+h)=fx+\frac{h}{1}f'x+\frac{h^2}{1.2}f''x+\frac{h^3}{1.2.3}f'''x+\ldots$$

Anche il termine complementario si deduce agevolmente da quello della serie del Maclaurin; perocchè essendo

$$F^{(n)}h=f^{(n)}(x+h),$$

sarà
$$\frac{h^n}{1.2\ldots n}F^{(n)}(\theta h)=\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h).$$

302. Scolio III. La serie del Maclaurin, ove anche sia convergente non può sempre usarsi per determinare un valore particolare della funzione; perchè avviene talvolta che essa converga verso un limite diverso dalla funzione che essa dovrebbe rappresentare. Infatti se si avesse

$$fx = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

si troverebbe

$$f0 \gtreqless 0,\quad f'0 \gtreqless 0,\quad f''0 \gtreqless 0, \ldots ;$$

perciò in virtù della serie del Maclaurin la funzione fx risulterebbe identicamente nulla anch'essa, il che è assurdo.

Se si avesse

$$fx = \varphi x + e^{-\frac{1}{x^2}},$$

troveremmo

$$f0 \gtreqless \varphi 0,\quad f'0 \gtreqless \varphi' 0,\quad f''0 \gtreqless \varphi'' 0, \ldots$$

e quindi

$$fx = \varphi 0 + \frac{x}{1}\varphi' 0 + \frac{x^2}{1.2}\varphi'' 0 + \ldots ;$$

talmentechè se la serie $\varphi 0 + \frac{x}{1}\varphi' 0 + \frac{x^2}{1.2}\varphi'' 0 + \ldots$ fosse convergente e rappresentasse veramente lo sviluppo di φx, caderemmo nell'identità assurda

$$fx \gtreqless \varphi x;$$

ciò mostra che non sarà dato giammai sostituire al valore particolare d'una funzione il suo sviluppo senza prendere in considerazione il termine complementario di essa, cioè la quantità da aggiungersi ad un numero qualunque di termini per ottenere il valor vero della funzione.

IV. Lo sviluppo in serie delle funzioni di più variabili.

303. Problema. *Abbiasi la funzione* $u = f(x, y, z, \ldots)$ *nella quale* $x, y, z, \ldots$ *sono* n *variabili indipendenti; supponendo che queste variabili si accrescano ordinatamente delle quantità* $h, k, i, \ldots$ *si propone di sviluppare la funzione* $U = f(x + h, y + k, z + i, \ldots)$

secondo le potenze, ed i prodotti binarj, ternarj, ec. degli accrescimenti h, k, i, . . . *attribuiti alle variabili.*

Cangiamo $h, k, i, \ldots$ in $ht, kt, it, \ldots$ e consideriamo la funzione

$$V = f(x + ht, y + kt, z + it, \ldots),$$

la quale quando si faccia

$$V = ft, x + ht = X, y + kt = Y, z + it = Z, \ldots$$

potrà scriversi così

$$ft = V = f(X, Y, Z, \ldots);$$

qui $X, Y, Z, \ldots$ saranno funzioni di $x, y, z, \ldots$; avremo frattanto

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dX}\frac{dX}{dx}, \quad \frac{dV}{dy} = \frac{dV}{dY}\frac{dY}{dy}, \ldots;$$

ma
$$\frac{dX}{dx} = 1, \quad \frac{dY}{dy} = 1, \ldots.$$

dunque
$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dX}, \quad \frac{dV}{dy} = \frac{dV}{dY}, \ldots.$$

inoltre avremo

$$f't = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dX}\frac{dX}{dt} + \frac{dV}{dY}\frac{dY}{dt} + \ldots.$$

$$f''t = \frac{d^2V}{dt^2} = \frac{d^2V}{dX^2}\frac{dX^2}{dt^2} + \frac{d^2V}{dY^2}\frac{dY^2}{dt^2} + \ldots.$$

$$+ 2\frac{d^2V}{dXdY}\frac{dX}{dt}\frac{dY}{dt} + 2\frac{d^2V}{dXdZ}\frac{dV}{dt}\frac{dZ}{dt} + \ldots.$$

e siccome $\frac{dX}{dt} = h, \quad \frac{dY}{dt} = k, \quad \frac{dZ}{dt} = i, \ldots.$

perciò sarà

$$f't = \frac{dV}{dt}h + \frac{dV}{dy}k + \frac{dV}{dz}i + \ldots.$$

$$f''t = \frac{d^2V}{dt^2} = \frac{d^2V}{dx^2}h^2 + \frac{d^2V}{dy^2}k^2 + \ldots + 2\frac{d^2V}{dxdy}hk + 2\frac{d^2V}{dxdz}hi + \ldots$$

Risulta da ciò che se dalla equazione $u = f(x, y, z, \ldots)$ si avesse $\frac{du}{dx} = \varphi(x, y, z, \ldots)$, dalla equazione simile $V = f(X, Y, X, \ldots)$

dovremo avere $\frac{dV}{dX}=\varphi(X, Y, Z, ..)$, e quindi, perchè $\frac{dV}{dX}=\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dx}=\varphi(X, Y, Z, ...)$, ovvero $\frac{dV}{dx}=\varphi(x+ht, y+kt, z+it, ...)$; talmentechè per $t=0$, $\frac{dV}{dx}$ si muterebbe in $\frac{du}{dx}$, parimente $\frac{dV}{dy}, \frac{dV}{dz}, ...$ si muterebbero in $\frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, ...$ dunque facendo $t=0$, avremo

$$f0=f(x, y, z, ...)=u$$

$$f'0=\frac{du}{dx}h+\frac{du}{dy}k+\frac{du}{dz}i+\ldots.$$

$$f''0=\frac{d^2u}{dx^2}h^2+\frac{d^2u}{dy^2}k^2+\ldots+2\frac{d^2u}{dxdy}hk+2\frac{d^2u}{dxdz}hi+\ldots$$

$$\ldots\ldots$$

Ciò posto si osservi che per la serie del Maclaurin abbiamo

$$ft=V=f0+\frac{t}{1}f'0+\frac{t^2}{1.2}f''0+\frac{t^3}{1.2.3}f'''0+\ldots+\frac{t^n}{1.2...n}f^{(n)}(\theta t)$$

dunque, sostituendo i suddetti valori di $f0, f'0, f''0, ...$ avremo

$$\begin{aligned} ft=V=u&+\frac{t}{1}\left(\frac{du}{dx}h+\frac{du}{dy}k+\frac{du}{dz}i+\ldots\right)\\ &+\frac{t^2}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}h^2+\frac{d^2u}{dy^2}k^2+\ldots+2\frac{d^2u}{dxdy}hk+\ldots\right)\\ &+\frac{t^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3u}{dx^3}h^3+\frac{d^3u}{dy^3}k^3+.+3\frac{d^3u}{dxdydz}hki+\ldots\right)\\ &+\ldots. \end{aligned}$$

qualunque sia t; facendo $t=1$, la funzione $V=ft$ si cangerà in U, ed avremo

$$\begin{aligned} U=u&+\frac{du}{dx}h+\frac{du}{dy}k+\frac{du}{dz}i+\ldots\\ &+\frac{d^2u}{dx^2}h^2+\frac{d^2u}{dy^2}k^2+\ldots+2\frac{d^2u}{dxdy}hk+\ldots\\ &+\frac{d^3u}{dx^3}h^3+\frac{d^3u}{dy^3}k^3+\ldots+3\frac{d^3u}{dxdydz}hki+\ldots\\ &+\ldots. \end{aligned}$$

che è quanto si doveva trovare.

304. Corollario I. Si osservi che gli accrescimenti $h, k, i, \ldots$ stante l'indipendenza delle variabili possono esprimersi mediante le caratteristiche differenziali $dx, dy, dz, \ldots$ (n. 96); perciò fatta questa sostituzione vedremo che le suindicate espressioni di $f'0, f''0, f'''0, \ldots$ si cangiano ne'differenziali successivi completi di u; il che può enunciarsi in questa guisa

$$f0 = u, f'0 = du, f''0 = d^2u, f'''0 = d^3u, \ldots$$

da ciò si raccoglie che lo sviluppo richiesto potrà più brevemente scriversi nel seguente modo

$$U = u + \frac{du}{1} + \frac{d^2u}{1.2} + \frac{d^3u}{1.2.3} \ldots + \frac{d^{n-1}u}{1.2\ldots(n-1)} + \frac{R}{1.2.3\ldots n}$$

305. Corollario II. Affinchè la serie $u + \frac{du}{1} + \frac{d^2u}{1.2} + \frac{d^3u}{1.2.3} + \ldots$ protratta all'infinito rappresenti la U bisogna che il resto $\frac{R}{1.2\ldots n}$ di essa, possa al crescere di n convergere indefinitamente verso lo zero; ora siccome $f^{(n)}t$ diventa d^nu per $t = 0$, come abbiamo dimostrato, viceversa mutando $x, y, z, \ldots$ in $x + ht, y + kt, z + it, \ldots d^nu$ diventerà $f^{(n)}t$, mutando $x, y, z, \ldots$ in $x + \theta ht$, $y + \theta kt, z + \theta it, \ldots . d^nu$ diventerà $f^{(n)}(\theta t)$, mutando $x, y, z, \ldots .$ in $x + \theta h, y + \theta k, z + \theta i \ldots . d^nu$ diventerà R. Dimanierachè data $u = f(x, y, z, \ldots .)$ ricaveremo d^nu; quindi ad $x, y, z, \ldots$ sostituiremo respettivamente $x + \theta h, y + \theta k, z + \theta i, \ldots .$; fatto ciò se l'espressione risultante, la quale sarà R, per qualunque valore di θ compreso fra 0 e 1 convergerà verso lo zero a misura che n crescerà, potremo concludere che il resto R della serie decresce indefinitamente, quanto più è grande il numero dei termini che si prendono della serie medesima; solo in questo caso la serie indefinita rappresenterà la funzione U; in altri termini solo in questo caso la U sarà la *somma* della serie di cui si tratta.

Sieno M ed N il minimo ed il massimo dei valori che riceve la funzione d^nu (nella quale $dx = h, dy = k, dz = i, \ldots .$) quando la x, la y, la $z, \ldots$ acquistano i valori respettivamente compresi fra x ed $x + h$, fra y ed $y + k$, fra z e $z + i$, ec.; M ed N saranno nel tempo stesso il massimo ed il minimo dei valori che riceve R; sicchè avremo

$$R > M, R < N, \frac{R}{1.2\ldots n} > \frac{M}{1.2\ldots n}, \frac{R}{1.2\ldots n} < \frac{N}{1.2\ldots n};$$

dunque $\frac{M}{1.2...n}$, $\frac{N}{1.2...n}$ saranno i limiti dentro i quali è compreso l'errore che si commette prendendo della serie U gli n primi termini, e trascurando i termini rimanenti.

V. *Lo sviluppo delle funzioni implicite.*

306. Problema. *Data una funzione implicita* y *della* x *per mezzo della equazione* $y = t + x\varphi y$, *nella quale* x *e* t *sono due variabili indipendenti, sviluppare una funzione qualunque* fy *di* y *secondo le potenze ascendenti della* x.

Se dalla equazione

$$y = t + x\varphi y, \tag{1}$$

potesse ricavarsi l'espressione analitica di y, la funzione fy potrebbe cangiarsi in una funzione di x e t, cioè risulterebbe

$$fy = F(x, t); \tag{2}$$

ed allora per il teorema del Maclaurin avremmo

$$fy = F(0, t) + \frac{x}{1} F'(0, t) + \frac{x^2}{1.2} F''(0, t) + \frac{x^3}{1.2.3} F'''(0, t) + ..; \tag{3}$$

non potendosi tenere questa via ci atterremo al calcolo seguente.

Pongasi $\qquad fy = u \;$ e $\; \varphi y = z;$

sarà $\qquad y = t + xz;$

da questa equazione si vede che y è funzione di x e t; perciò anche z, ovvero φy, sarà funzione di x e t. Or dalla stessa equazione $y = t + xz$, si ha

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{dy}{dt} = 1 + x\frac{dz}{dx}\frac{dy}{dt};$$

eliminando x si trova

$$\frac{dy}{dx} = z\,\frac{dy}{dt};$$

dalla quale equazione moltiplicando per $\frac{du}{dy}$, avremo

$$\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = z\,\frac{du}{dy}\frac{dy}{dt};$$

ovvero

$$F'_x(x,\,t) = \frac{du}{dx} = z\,\frac{du}{dt}. \qquad (4)$$

Qui giova osservare che se u, cioè fy, fosse una potenza di φy, che è quanto dire di z, ponendo

$$u = z^n,$$

risulterebbe

$$\frac{dz^n}{dx} = z\,\frac{dz^n}{dt}; \qquad (5)$$

or poichè

$$\frac{d.z^n\frac{du}{dt}}{dx} = \frac{du}{dt}\,\frac{dz^n}{dx} + z^n\,\frac{d^2u}{dt\,dx};$$

perciò mutando nel primo termine u in z^n, e z^n in u avremo

$$\frac{d.z^n\frac{du}{dt}}{dx} = \frac{dz^n}{dt}\,\frac{du}{dx} + z^n\,\frac{d^2u}{dt\,dx} = \frac{d.z^n\frac{du}{dx}}{dt};$$

e quindi, stante la (4),

$$\frac{d.z^n\frac{du}{dt}}{dx} = \frac{d.z^{n+1}\frac{du}{dt}}{dt}. \qquad (6)$$

Facendo $n = 1, = 2, = 3, \ldots$ risulterà

$$\frac{d.z\frac{du}{dt}}{dx} = \frac{d.z^2\frac{du}{dt}}{dt}, \qquad (7)$$

$$\frac{d.z^2\frac{du}{dt}}{dx} = \frac{d.z^3\frac{du}{dt}}{dt}, \qquad (8)$$

$$\frac{d.z^3\frac{du}{dt}}{dx} = \frac{d.z^4\frac{du}{dt}}{dt}, \qquad (9)$$

. . . . .

Ciò posto siccome per l'equazione (4) abbiamo

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d.z\frac{du}{dt}}{dx},$$

sarà stante la (7) $F''_x(x,t) = \dfrac{d^2u}{dx^2} = \dfrac{d.z^2\frac{du}{dt}}{dt}.$ (10)

Di qui abbiamo $\dfrac{d^3u}{dx^3} = \dfrac{d.^2z^2\frac{du}{dt}}{dt\,dx};$

ma dalla (8) si ha $\dfrac{d.^2z^2\frac{du}{dt}}{dx\,dt} = \dfrac{d.^2z^3\frac{du}{dt}}{dt^2},$

dunque $F'''_x(x,t) = \dfrac{d^3u}{dx^3} = \dfrac{d^2.z^3\frac{du}{dt}}{dt^2}.$ (11)

Troveremo pure $F^{\text{IV}}_x(x,t) = \dfrac{d^4u}{dx^4} = \dfrac{d^3.z^4\frac{du}{dt}}{dt^3};$ (12)

ed in generale $F^{(n)}_x(x,t) = \dfrac{d^nu}{dx^n} = \dfrac{d^{n-1}.z^n\frac{du}{dt}}{dt^{n-1}};$

tale si è l'espressione della derivata n^{ma} di $u = fy = F(x,t)$ presa rispetto ad x.

Or siccome ponendo $x = 0$ si trova $y = t$, conseguentemente per lo stesso valore della x la funzione fy ovvero la u diverrà ft, e la funzione φy ovvero z si cangerà in φt; inoltre $\frac{du}{dt} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{du}{dy}\left(1 + x\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dt}\right)$ diverrà $\frac{du}{dy}$, che è quanto dire $\frac{dfy}{dy}$ cioè $f'y$ ovvero $f't$ quando sia $x = 0$; dunque per il valore $x = 0$ sarà

$$F(0,t) = ft$$
$$F'(0,t) = \varphi t.f't$$
$$F''(0,t) = \frac{d(\varphi t^2.f't)}{dt}$$
$$F'''(0,t) = \frac{d^2(\varphi t^3.f't)}{dt^2}$$
$$F^{\text{IV}}(0,t) = \frac{d^3(\varphi t^4.f't)}{dt^3}$$

. . . .

per le quali espressioni potrà la (3) mutarsi nella serie seguente

$$fy = ft + \frac{x}{1}(\varphi t . f't) + \frac{x^2}{1.2}\frac{d(\varphi t.^2 f't)}{dt} + \frac{x^3}{1.2.3}\frac{d^2(\varphi t.^3 f't)}{dt^2} + ..; \quad (13)$$

il termine che ne ha n avanti di se sarà

$$\frac{x^n}{1.2.3..n}\frac{d^{n-1}(\varphi t^n . f't)}{dt^{n-1}}.$$

307. Scolio. Tale si è la formula che dal nome del suo illustre inventore dicesi *Teorema del Lagrange.* Essa suppone che la y sia una funzione implicita di x e t data dalla equazione $y = t + x\varphi y$. Può questa formula scriversi più brevemente nel seguente modo

$$fy = ft + \frac{x}{1}(\varphi t . f't) + \frac{x^2}{1.2}D(\varphi t^2 . f't) + \frac{x^3}{1.2.3}D^2(\varphi t^3 . f't) + ...$$

308. Corollario I. Se la y fosse una funzione della sola t data dalla equazione $y = t + \varphi y$, avremmo

$$fy = ft + \varphi t . f't + \frac{d(\varphi t^2 . f't)}{1.2.dt} + \frac{d^2(\varphi t^3 . f't)}{1.2.3.dt^2} + ... \quad (14)$$

309. Corollario II. Se si volesse il valore di y tratto dalla equazione

$$y = t + x\varphi y,$$

facendo nella (13) $fy = y$, e perciò $ft = t$, $f't = 1$, risulterebbe

$$y = t + x\varphi t + \frac{x^2}{1.2}\frac{d.\varphi t^2}{dt} + \frac{x^3}{1.2.3}\frac{d^2.\varphi t^3}{dt^2} + ... \quad (15)$$

310. Corollario III. Ad avere il valore di y tratto dalla equazione

$$y = t + \varphi y, \quad (16)$$

nel qual caso y sarebbe funzione della sola t, faremo nella (15) $x = 1$, ed otterremo

$$y = t + \varphi t + \frac{d.\varphi t^2}{1.2.dt} + \frac{d.^2\varphi t^3}{1.2.3.dt^2} + ... \quad (17)$$

311. Corollario IV. Ad avere il valore di y tratto dalla equazione

$$A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4+\ldots=0 \qquad (18)$$

ridurremo in prima l'equazione alla forma (16) dividendo pel coefficiente B della prima potenza di y; così avremo

$$y=-\frac{A}{B}-\frac{Cy^2+Dy^3+Ey^4+\ldots}{B}$$

e sarà $t=-\dfrac{A}{B}$, $\quad \varphi y=-\dfrac{Cy^2+Dy^3+Ey^4+\ldots}{B}$;

conseguentemente otterremo

$$\varphi t=-\frac{Ct^2+Dt^3+Et^4+\ldots}{B}$$

$$\varphi t^2=\frac{C^2t^4+2CDt^5+\ldots}{B^2}$$

$$\varphi t^3=-\frac{C^3t^6+\ldots.}{B^3}$$

$$\ldots.$$

$$D\varphi t^2=\frac{4C^2t^3+10CDt^4+\ldots}{B^2}$$

$$D\varphi t^3=-\frac{6C^3t^5+\ldots.}{B^3}$$

$$D^2\varphi t^3=-\frac{5.6C^3t^4+\ldots.}{B^3}$$

e quindi, ordinando rapporto a t,

$$y=t-\frac{C}{B}t^2-\frac{D}{B}t^3-\frac{E}{B}t^4-\ldots$$
$$+\frac{2C^2}{B^2}t^3+\frac{5CD}{B^2}t^4+\ldots$$
$$-\frac{5C^3t^4\ldots+\ldots}{B^3}$$

in fine sostituendo il valore di t, avremo

$$y=-\frac{A}{B}-\frac{A^2C}{B^3}+\frac{A^3D}{B^4}-\frac{A^4E}{B^5}+\frac{2A^3C^2}{B^5}+\frac{5A^4CD}{B^6}+$$
$$\ldots-\frac{6.5A^4C^3}{B^7}+\text{ec.}$$

questa operazione è nota sotto il nome di *ritorno delle serie;* essa consiste nel ricavare il valore d'una quantità y da una equazione $\xi y = 0$ nella quale ξy sia una serie ordinata per le potenze di y.

312. Corollario V. Ora abbiasi l'equazione

$$Fx = 0$$

e supponiamo che a sia il valore prossimo d'una sua radice; rappresentiamo con $a + y$ il valor vero di essa, avremo

$$F(a + y) = 0,$$

ovvero

$$Fa + yF'a + \tfrac{1}{2} y^2 F''a + \tfrac{1}{6} y^3 F'''a + \ldots = 0;$$

paragonando questa serie colla (18) avremo

$$Fa = A, \ F'a = B, \ \tfrac{1}{2} F''a = C, \ \tfrac{1}{6} F'''a = D \ldots;$$

e quindi

$$y = -\frac{Fa}{F'a} - \frac{(Fa)^2 F''a}{2(F'a)^3} + \frac{(Fa)^3 F'''a}{2.3(F'a)^4} - \frac{(Fa)^3 (F''a)^2}{2(F'a)^5} + \ldots$$

VI. I massimi e minimi valori delle funzioni d'una sola variabile.

313. Definizione. Una funzione fx d'una sola variabile x dicesi acquistare per $x = a$ un valore *massimo*, quando decrescendo o crescendo a d'una quantità piccola quanto vuolsi, i valori corrispondenti della funzione riescono minori di fa: dicesi poi acquistare un valore *minimo* quando decrescendo o crescendo a d'una quantità piccola quanto vuolsi, i valori corrispondenti della funzione riescono maggiori di fa.

314. Teorema I. *I massimi e i minimi valori d'una funzione* fx *corrispondono a quei valori di* x *che sono radici delle equazioni* $f'0 = 0$, $f'x = \infty$.

Rappresenti M un massimo ed m un minimo valore della funzione fx, e sia i una quantità piccolissima; avremo

1° $fa = M$ quando sia $f(a - i) < fa$, $f(a + i) < fa$,

2° $fa = m$ quando sia $f(a - i) > fa$, $f(a + i) > fa$;

in altri termini avremo

1° $fa = M$ quando fx decrescerà al decrescere di x da a ad $a - i$, e al crescere di x da a ad $a + i$, (n. 216), cioè quando sia

$$f'(a - i) > 0, \quad f'(a + i) < 0.$$

2° $fa = m$ quando fx crescerà al decrescere di x da a ad $a - i$ ed al crescere di x da a ad $a + i$, cioè quando sia

$$f'(a - i) < 0, \quad f'(a + i) > 0.$$

In ambedue i casi sarà adunque necessario che $f'x$ sostituendo successivamente $a - i$ ed $a + i$ ad x muti segno, e che per conseguenza esista un valore di x compreso fra $a - i$ ed $a + i$ tale da rendere $f'x$ nulla o infinita: questo valore è a, perchè $a - i$ ed $a + i$ sono due numeri variabili, fra i quali a è compresa, che possono supporsi prossimi ad a quanto si vuole: dunque le radici delle due equazioni

$$f'x = 0, \quad f'x = \infty,$$

ovvero $$f'x = 0, \quad \frac{1}{f'x} = 0,$$

saranno altrettanti valori della variabile pei quali la funzione fx diverrà massima o minima.

315. Corollario. Nel supposto che a sia una radice reale di queste equazioni e che i sia un numero piccolissimo, se avremo $f'(a - i) > 0$, $f'(a + i) < 0$, fa sarà un massimo; se avremo $f'(a - i) < 0$, $f'(a + i) > 0$, fa sarà un minimo.

Esempio. Abbiasi

$$fx = x^2 - Ax + B, \quad f'x = 2x - A;$$

ponendo $$2x - A = 0,$$

si trova $$x = \tfrac{1}{2} A;$$

non v' ha alcun valore di x per il quale $2x - A$ possa diventare infinita, cioè non v' ha alcun valore di x capace di verificare l' equazione $f'x = \infty$; dunque $\frac{1}{2} A$ è il solo valore possibile di a. Ora è da vedersi se esso corrisponda ad un valore massimo, oppur minimo della funzione. Per $x < \frac{1}{2} A$, $f'x$ diventa > 0; per $x > \frac{1}{2} A$, $f'x$ diventa > 0; dunque il valore di fx corrispondente ad $x = \frac{1}{2} A$, cioè $B - \frac{1}{4} A^2$ sarà un minimo.

316. Teorema II. *Allorquando il valore* a *della variabile* x *manderà a zero un numero dispari di derivate della* fx *dalla prima in poi, secondochè la derivata susseguente sarà negativa o positiva,* fa *sarà un massimo o un minimo della funzione* fx.

Se le derivate della funzione fx che per $x=a$ vanno a zero, si estenderanno dalla prima sino a quella dell'ordine $n-1$ inclusive, avremo [n. 223. eq. (8)]

$$f(a+h)-fa=\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(a+\theta h),$$

ove però la h suppongasi infinitamente piccola; perocchè 1° le derivate di fx fino all' ordine $n-1$ inclusive vanno per ipotesi a zero, 2° le funzioni $fx, f'x, \ldots f^{(n)}x$ non diventando per $x=a$ infinite nè immaginarie si possono sempre riputare continue ne' limiti a ed $a+h$ della variabile, che è quanto dire continue pe' valori vicinissimi ad a. E siccome per $h=0$ la funzione $f^{(n)}(a+\theta h)$ si riduce ad $f^{(n)}a$, perciò indicando con α una quantità convergente verso lo zero in pari tempo di h, potremo trasformare la precedente equazione nella seguente

$$f(a+h)-fa=\frac{h^n}{1.2\ldots n}(f^{(n)}a+\alpha);$$

dalla quale si raccoglie che in virtù dei decrescimenti di h, perchè α giungerà ad essere più piccola di qualunque quantità data, la quantità $f^{(n)}a+\alpha$ giungerà sempre ad avere il segno di $f^{(n)}a$.

Ciò posto 1° sia h dispari, sarà

$$f(a-h)-fa=-\frac{h^n}{1.2\ldots n}(f^{(n)}a+\alpha);$$

le due differenze $f(a+h)-fa$, $f(a-h)-fa$ avranno segni contrarj; dunque il valore della funzione corrispondente ad $x=a$ non sarà un massimo, nè un minimo.

2°. Sia n pari, sarà

$$f(a-h)-fa=\frac{h^n}{1.2\ldots n}(f^{(n)}a+\alpha);$$

cosicchè le due differenze $f(a+h)-fa, f(a-h)-fa$ avranno il medesimo segno; il quale sarà negativo o positivo secondochè sarà negativo o positivo il segno di $f^{(n)}a$. Per conseguenza secon-

dochè il segno di $f^{(n)}a$ sarà negativo o positivo, fa sarà un massimo o un minimo della funzione fx.

317. Scolio. È da notare che essendo $d^ny = f^{(n)}x dx^n$, quando n sarà pari d^ny avrà il medesimo segno di $f^{(n)}x$ qualunque sia il segno di dx; dunque negli usi del principio precedente potremo sostituire i differenziali $dfx, d^2fx, d^3fx, \ldots$ alle derivate $f'x, f''x, f'''x, \ldots$

Esempio I. Abbiasi la funzione trascendente

$$fx = e^x + 2\cos x + e^{-x};$$

sarà

$$f'x = e^x - 2\,\text{sen}\,x - e^{-x},$$

$$f''x = e^x - 2\cos x + e^{-x},$$

$$f'''x = e^x + 2\,\text{sen}\,x - e^{-x},$$

$$f^{\text{IV}}x = e^x + 2\cos x + e^{-x};$$

le derivate susseguenti sarebbero identiche alle già ottenute, e si riprodurrebbero nello stesso ordine. Per $x = 0$ si ha $f'0 = 0$, $f''0 = 0$, $f'''0 = 0$; la prima derivata che non vada a zero è appunto quella del quarto ordine; dunque per $x = 0$ la funzione fx acquista un valore massimo o minimo. Ma possiamo asserire che tal valore sia un minimo perocchè per $x = 0$, la derivata quarta acquista un valor positivo; $f^{\text{IV}}0 = 4$. Questo minimo sarà anch'esso $= 4$.

Esempio II. Dividere un numero a in due parti per modo che il prodotto della potenza m$^{\text{ma}}$ dell'una per la potenza n$^{\text{ma}}$ dell'altra, riesca il più grande possibile.

Sia x una della due parti; sarà d'uopo cercare per x un valor tale che renda massimo il valore della funzione

$$fx = x^m (a - x)^n;$$

di qui

$$f'x = x^{m-1}(a - x)^{n-1}[ma - x(m+n)];$$

$$f''x = x^{m-2}(a - x)^{n-2}[(m+n-1)(m+n)x^2 - \text{ec.}],$$

ponendo

$$f'x = 0,$$

si trova

$$x = 0, \quad x = a, \quad x = \frac{ma}{m+n};$$

l' ultima radice corrisponde ad un massimo, perchè il valore di $f''x$ risulta negativo; il qual massimo è

$$m^m n^n \left(\frac{a}{m+n}\right)^{m+n};$$

le altre due radici corrispondono a due minimi, quando m ed n son pari.

Il prodotto massimo che può farsi colle due parti in cui sia divisa la quantità a è il quadrato della metà di essa. Perocchè facendo $m=n=1$ si trova $x=\frac{1}{2}a$.

Esempio III. Trovare un numero x la cui radice del grado x sia un massimo.

Sarà $$fx=\sqrt[x]{x};$$

e quindi $$f'x=\sqrt[x]{x}.\frac{1-lx}{x^2};$$

ponendo $f'x=0$ si trova $lx=1$; dunque il numero richiesto è la base dei logaritmi neperiani; $x=e=2{,}71828\ldots$

Esempio IV. Trovare il massimo di tutti i triangoli isoperimetri costrutti sopra una base data.

Sia a la base comune de' triangoli, $2p$ ne sia il perimetro; indicando con x il secondo lato, $2p-a-x$ sarà il terzo; ond'è che dovremo cercare per x un valor tale che renda massimo il valore della funzione

$$fx=\sqrt{[p(p-a)(p-x)(a+x-p)]};$$

a render più semplice il calcolo prenderemo i logaritmi d'ambe le parti, quindi le loro derivate; sicchè sarà

$$\frac{-1}{p-x}+\frac{1}{a+x-p}=0,$$

$$x=p-\tfrac{1}{2}a,\quad 2p-a-x=p-\tfrac{1}{2}a;$$

da ciò si vede che il triangolo risulterà massimo quando sia costrutto sulla base a coi lati uguali ciascuno a $p-\frac{1}{2}a$.

Esempio V. Determinare il massimo dei cilindri che si possono iscrivere in un cono retto.

Sia a l'altezza del cono, b il raggio della sua base, x sia la distanza del vertice dalla base superiore del cilindro iscritto; $\frac{bx}{a}$ sarà il raggio di questa base, e $\frac{\pi b^2x^2}{a^2}$ ne sarà l'area; $a-x$ sarà l'altezza del cilindro stesso, e $\frac{\pi b^2x^2}{a^2}(a-x)$ sarà l'espres-

sione del suo volume. Dunque la funzione della quale deesi determinare il massimo sarà

$$fx = \frac{\pi b^2 x^2}{a^2}(a - x) = \frac{\pi b^2}{a^2}(ax^2 - x^3);$$

da essa abbiamo $f'x = \frac{\pi b^2}{a^2}(2ax - 3x^2)$, $f''x = \frac{\pi b^2}{a^2}(2a - bx)$.

Or pongasi l'equazione $2ax - 3x^2 = 0$,

le radici reali di essa sono $x = 0$, $x = \frac{2}{3}a$. Il valore $x = 0$ corrisponde ad un minimo, perchè facendo $x = 0$ la derivata $f''x$ acquista in questa ipotesi il valore positivo a $\frac{2\pi b^2}{a}$; infatti quando $x = 0$ il cilindro si riduce all'asse del cono. Il valore $x = \frac{2}{3}a$ corrisponde ad un massimo, perocchè siffatto valore della x rende $f''x$ negativa; dunque l' altezza del cilindro massimo che possa iscriversi in un cono retto è il terzo di quella del cono stesso; la base di siffatto cilindro sarà $\frac{4}{9}\pi b^2$, il volume $\frac{4}{27}\pi b^2 a$.

Esempio VI. Determinare il minimo dei quadrati che si possono iscrivere in un quadrato dato.

Sia a il lato del quadrato dato, x la distanza d'uno dei vertici del quadrato iscritto dal vertice più prossimo del quadrato dato; la superficie del quadrato richiesto sarà espressa da

$$fx = 2x^2 - 2ax + a^2;$$

questa adunque è la funzione di cui si tratta di cercare il valor minimo. Posta l'equazione

$$2x^2 - 2ax + a^2 = 0,$$

si vedrà che il minimo ha luogo quando sia $x = \frac{1}{2}a$; dunque il minimo quadrato che si possa iscrivere in un quadrato dato è quello formato dalle rette che congiungono i punti di mezzo dei lati del quadrato medesimo.

VI. *I massimi e minimi valori delle funzioni di più variabili indipendenti.*

318. Definizione. Una funzione $u = f(x, y, z, \dots)$ di più variabili indipendenti $x, y, z, \dots$ dicesi acquistare per $x = a, y = a_1, z = a_2, \dots$ un valore *massimo*, quando decrescendo o crescendo $a, a_1, a_2, \dots$ di quantità piccole quanto vuolsi, i valori corrispondenti della funzione riescono minori di $f(x, y, z, \dots)$; dicesi poi acquistare per $x = a, y = a_1, z = a_2, \dots$ un valore *minimo*, quando decrescendo o crescendo $a, a_1, a_2, \dots$ di quantità piccole quanto vuolsi i valori corrispondenti della funzione riescono maggiori di $f(x, y, z, \dots)$.

319. Corollario. Rappresenti M un massimo, ed m un minimo della funzione $f(x, y, z, \dots)$.

1° Sarà $$f(x, y, z, \dots) = M,$$

quando abbiasi

$$f(a + h, a_1 + k, a_2 + i, \dots) < f(a, a_1, a_2, \dots)$$
$$f(a - h, a_1 - k, a_2 - i, \dots) < f(a, a_1, a_2, \dots).$$

2° Sarà $$f(x, y, z, \dots) = m,$$

quando abbiasi

$$f(a + h, a_1 + k, a_2 + i, \dots) > f(a, a_1, a_2, \dots)$$
$$f(a - h, a_1 - k, a_2 - i, \dots) > f(a, a_1, a_2, \dots).$$

Sostituendo $ht, kt, it, \dots$ ad $h, k, i, \dots$ e ponendo

$$f(x + ht, y + kt, z + it, \dots) = ft, \quad f(x, y, z, \dots) = 0,$$

è manifesto che $f(a, a_1, a_2, \dots)$ sarà un massimo o un minimo di $f(x, y, z, \dots)$, secondochè $f0$ sarà un massimo o un minimo della funzione ft.

Ora affinchè la funzione ft diventi per $t = 0$ un massimo o un minimo, si vuole che per $t = 0$ la derivata prima $f't$ diventi infinita o nulla, e che $t = 0$ mandi a zero un numero $n - 1$ dispari di derivate della funzione stessa dalla seconda in poi: allora se la derivata dell'ordine n, $f^{(n)}t$, sarà negativa, ft sarà un massimo,

se tal derivata sarà positiva, ft sarà un minimo (n. 316.). Ma abbiamo dimostrato al n. 304, che

$$f'0 = du, \quad f''0 = d^2u, \quad f'''0 = d^3u, \ldots f^{(n)}0 = d^nu,$$

dunque $f0$ ovvero $f(a, a_1, a_2, \ldots)$ sarà un massimo o un minimo quando sia 1° $du = 0$; 2° $d^2u = 0, d^3u = 0, \ldots d^{n-1}u = 0$ (n essendo pari); che se avremo $d^nu < 0$ avrà luogo il massimo, se sarà $d^nu > 0$ avrà luogo il minimo.

Segue da ciò che per trovare i valori di $x, y, z, \ldots$ pei quali la funzione $u = f(x, y, z, \ldots)$ diventa un massimo o un minimo dovremo procedere nel seguente modo.

1°. Porremo l'equazione

$$du = 0,$$

ovvero
$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz + \ldots = 0;$$

cioè porremo le equazioni

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dz} = 0, \ldots$$

giacchè la prima stante le indeterminate dx, $dy, dz, \ldots$ non può sussistere che in virtù di queste; le quali saranno tante di numero quante son le variabili.

2°. Cercheremo mediante l'eliminazione tutti que'sistemi di valori delle variabili stesse da cui siffatte equazioni possono essere soddisfatte.

3°. Per conoscere di poi se uno di tali sistemi, per esempio $x = a$, $y = b$, $z = c$, ec., corrisponde ad un massimo o ad un minimo, cercheremo il differenziale d^2u. Se per $x = a$, $y = b$, $z = c$, ec. e per tutti i valori che si possono attribuire agli accrescimenti indeterminati dx, dy, dz, ec., risulterà $d^2u < 0$, il valore $f(a, b, c, \ldots)$ sarà un massimo; se risulterà $d^2u > 0$, il valore $f(a, b, c, \ldots)$ sarà un minimo; se poi risulterà $d^2u = 0$, allora il valore $f(a, b, c, \ldots)$ non sarà nè un massimo, nè un minimo, ammenochè non sia anco $d^3u = 0$; e se otterremo $d^3u = 0$, secondochè avremo $d^4u < 0$, oppure $d^4u > 0$, il valore $f(a, b, c, \ldots)$ sarà un massimo o un minimo. In generale se quel sistema $x = a$, $y = b$, $z = c$, ec., qualunque sieno i valori di dx, dy, dz, ec., manderà a zero un numero pari di differenziali della u, cioè d^2u, d^3u, d^4u, ec. il valore particolare della funzione cioè

$f(a, b, c, \ldots)$ non sarà nè un massimo, nè un minimo; se ne manderà a zero un numero $n-1$ dispari, $f(a, b, c, \ldots)$ sarà un massimo quando per lo stesso sistema qualunque sieno i valori di dx, dy, dz, ec. risulterà $d^n u < 0$, un minimo quando risulterà $d^n u > 0$.

320. Corollario. Consideriamo una funzione di due sole variabili, e sia essa

$$u = f(x, y);$$

avremo

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy$$

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy}dxdy + \frac{d^2u}{dy^2}dy$$

$$d^3u = \frac{d^3u}{dx^3}dx^3 + 3\frac{d^3u}{dx^2dy}dx^2dy + 3\frac{d^3u}{dxdy^2}dxdy^2 + \frac{d^3u}{dy^3}dy^3$$

$$d^4u = \frac{d^4u}{dx^4}dx^4 + 4\frac{d^4u}{dx^3dy}dx^3dy + 6\frac{d^4u}{dx^2dy^2}dx^2dy^2$$
$$+ 4\frac{d^4u}{dxdy^3}dxdy^3 + \frac{d^4u}{dy^4}dy^4$$

. . . . .

Poste le equazioni

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0,$$

supponiamo che esse possano essere soddisfatte da un sistema di valori reali $x = a$, $y = b$; supponiamo altresì che per $x = a$, $y = b$, le derivate parziali del 2° ordine prendano i valori A, B, C; quelle del 3° i valori D, E, F, G; quelle del 4° i valori H, I, K, L, M; ec.; e denotiamo le espressioni in cui si cangiano i differenziali d^2u, d^3u, d^4u, ec. con u_2, u_3, u_4, ec.; avremo

$$u_2 = Adx^2 + 2Bdxdy + Cdy^2,$$
$$u_3 = Ddx^3 + 3Edx^2dy + 3Fdxdy^2 + Gdy^3,$$
$$u_4 = Hdx^4 + 4Idx^3dy + 6Kdx^2dy^2 + 4Ldxdy^3 + Mdy^4,$$

. . . . .

ovvero

$$u_2 = A\left(dx + \frac{A}{B}dy\right)^2 + dy^2\left(C - \frac{B^2}{A}\right),$$

$$u_4 = H\left(dx^2 + \frac{2I}{H}dxdy\right)^2 + M\left(dy^2 + \frac{2L}{M}dxdy\right)^2 + \ldots$$

$$\ldots 2dx^2dy^2\left(3K - \frac{2I^2}{H} - \frac{2L^2}{M}\right),$$

. . . . .

Queste espressioni giovano a mostrare che qualunque sieno i valori di dx e dy, la u_2 sarà negativa quando abbiasi $A < 0$ e $C - \frac{B^2}{A} < 0$, e positiva quando abbiasi $A > 0$ e $C - \frac{B^2}{A} > 0$. Ma se $A < 0$ non potrà essere $C - \frac{B^2}{A} < 0$ ammenochè non sia $C < 0$, e se $A > 0$ non potrà essere $C - \frac{B^2}{A} > 0$ se non è $C > 0$, dunque

1° Il valore $f(a, b)$ sarà un massimo quando abbiasi $A < 0$, $C < 0$ ed $AC > B^2$.

2° Il valore $f(a, b)$ sarà un minimo quando abbiasi $A > 0$, $C > 0$ ed $AC > B^2$.

Quando si avesse la sola condizione $AC < B^2$ potrebbe la u_2 per certi valori di dx e dy risultare positiva, e per altri risultare negativa; dunque

3° Il valore $f(a, b)$ non sarà nè un minimo se risulterà $AC < B^2$.

Se $B = 0$ avremo $u_2 = Adx^2 + Cdy^2$; allora qualunque sieno i valori di dx e dy, la u_2 sarà negativa quando abbiasi $A < 0$, $C < 0$, oppure $A < 0$, $C = 0$, oppure $A = 0$, $C < 0$; sarà positiva quando abbiasi $A > 0$, $C > 0$, oppure $A > 0$, $C = 0$, oppure $A = 0$, $C > 0$; dunque

4° Il valore $f(a, b)$ sarà un massimo quando abbiasi $A < 0$, $C < 0$, $B = 0$, oppure $A < 0$, $C = 0$, $B = 0$, oppure $A = 0$, $C < 0$, $B = 0$.

5° Il valore $f(a, b)$ sarà un minimo quando abbiasi $A > 0$, $C > 0$, $B = 0$, oppure $A > 0$, $C = 0$, $B = 0$, oppure $A = 0$, $C > 0$, $B = 0$.

Se poi fosse $AC = B^2$, facendo $dy = -\frac{A}{B}dx$, risulterebbe $u_2 = 0$, e per ogn'altro valore di dy la quantità u_2 conserverebbe il segno di A, ovvero quello di C (giacchè A e C, in virtù della equazione $AC = B^2$, è forza che abbiano il medesimo segno). Or può avvenire che facendo $x = a$, $y = b$, $dy = -\frac{A}{B}dx$, vadano a zero anco i differenziali della u susseguenti al secondo; perciò

6° Se il primo dei differenziali d^3u, d^4u, ec., che non anderà a zero per $x = a$, $y = b$, sarà d'ordine dispari, il valore $f(a, b)$ non sarà nè un massimo, nè un minimo.

7° Se il primo dei differenziali d^3u, d^4u, ec. che non anderà a zero per $x = a$, $y = b$, sarà d'ordine pari, e sarà tale altresì che per un valore di dy diverso da $-\frac{A}{B}dx$ acquisti sempre il medesimo segno di A, il valore $f(a, b)$ sarà un massimo o un minimo secondochè avremo $A < 0$ oppure $A > 0$.

Se pei valori $x = a$, $y = b$ risulterà $A = 0$, $B = 0$ avremo $u_2 = 0$; sicchè quando non abbiasi ancora $u_3 = 0$, il valore $f(a, b)$ non sarà nè un massimo, nè un minimo. Ma se avremo $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, allora secondochè avremo $u_4 < 0$ oppure $u_4 > 0$, il valore $f(a, b)$ sarà un massimo o un minimo; dunque

8° Il valore $f(a, b)$ sarà un massimo, se avremo

$$u_2 = 0,\ u_3 = 0,\ H < 0,\ M < 0,\ 3K - \frac{2I^2}{H} - \frac{2L^2}{M} < 0.$$

9° Il valore $f(a, b)$ sarà un minimo, se avremo

$$u_2 = 0,\ u_3 = 0,\ H > 0,\ M > 0,\ 3K - \frac{2I^2}{H} - \frac{2L^2}{M} > 0.$$

321. Scolio I. I criteri 1°, 2°, 3°, 6°, che abbiamo stabiliti di sopra possono ancora determinarsi in altro modo. Si osservi che

$$u_2 = Ady^2\left(\frac{dx^2}{dy^2} + \frac{2B}{A}\frac{dx}{dy} + \frac{C}{A}\right);$$

e pongasi l'equazione

$$\frac{dx^2}{dy^2} + \frac{2B}{A}\frac{dx}{dy} + \frac{C}{A} = 0.$$

Se i due valori di $\frac{dx}{dy}$, radici di questa equazione, saranno immaginarj, avremo

$$B^2 - AC < 0;$$

allora la u_2 non potendo per nessun valore reale di $\frac{dx}{dy}$ divenir nulla, nè cambiar segno, conserverà costantemente il segno di A; laonde $f(a, b)$ sarà un massimo quando abbiasi $A < 0$ e $B^2 - AC < 0$, un minimo quando abbiasi $A > 0$ e $B^2 - AC < 0$, le quali condizioni esigono che A e C abbiano il medesimo segno.

Se le due radici della equazione suddetta saranno reali ed uguali, avremo

$$B^2 - AC = 0,$$

$$\frac{dx}{y} = -\frac{B}{A},$$

e la u_2 diventerà $\qquad u_2 = Ady^2\left(\frac{dx}{dy} + \frac{B}{A}\right)^2;$

così la u_2 per il valore $-\frac{B}{A}$ della indeterminata $\frac{dx}{dy}$ sarà nulla, e per tutt' altro valore di $\frac{dx}{dy}$ conserverà il segno di A; laonde $f(a, b)$ sarà un massimo o un minimo, se facendo $\frac{dx}{dy} = -\frac{B}{A}$, risulterà $u_3 = 0$, ed u_4 dello stesso segno di A; il massimo corrisponderà ad $A < 0$, il minimo ad $A > 0$.

Se le due radici della equazione predetta saranno reali e disuguali, avremo

$$B^2 - AC > 0;$$

allora la u_2, secondo i valori della indeterminata $\frac{dx}{dy}$, risulterà positiva o negativa indipendentemente dal segno di A; per conseguenza $f(a, b)$ non sarà nè un massimo, nè un minimo.

322. Scolio II. Facciamoci ad applicare l'esposta dottrina alla funzione

$$f(x, y) = u = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F; \qquad (1)$$

$$du = (2Ax + By + D)dx + (Bx + 2Cy + E)\,dy, \qquad (2)$$

$$d^2u = 2(Adx^2 + Bdxdy + Cdy^2), \qquad (3)$$

$$d^3u = 0,\ d^4u = 0, \ldots$$

Or si pongano le equazioni

$$2Ax + By + D = 0, \quad Bx + 2Cy + E = 0, \qquad (4)$$

da esse avremo

$$x = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}, \quad y = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}; \qquad (5)$$

questi saranno i valori di x ed y pei quali la funzione u diverrà un massimo o un minimo. È da notare che la d^2u può prender la forma

$$2Ady^2\left(\frac{dx^2}{dy^2} + \frac{Bdx}{Ady} + \frac{C}{A}\right). \qquad (6)$$

Ciò posto, 1° supponiamo che l'equazione

$$\frac{dx^2}{dy^2} + \frac{Bdx}{Ady} + \frac{C}{A} = 0, \qquad (7)$$

risoluta rapporto alla indeterminata $\frac{dx}{dy}$, abbia le due radici immaginarie, e sia perciò $B^2 - 4AC < 0$; allora il trinomio

$$\frac{dx^2}{dy^2} + \frac{Bdx}{Ady} + \frac{C}{A}, \qquad (8)$$

non potrà ridursi giammai a zero, e per qualunque valore di $\frac{dx}{dy}$ conserverà sempre lo stesso segno; ciò vuol dire che la d^2u conserverà costantemente il segno di $2Ady^2$, cioè quello di A; laonde si può conchiudere che la funzione u ammetterà un massimo se sarà $B^2 - 4AC < 0$ ed $A < 0$, ed un minimo se sarà $B^2 - 4AC < 0$ ed $A > 0$.

2° Supponiamo che l'equazione (7) risoluta rapporto alla indeterminata $\frac{dx}{dy}$ abbia le due radici reali e disuguali, e sia perciò $B^2 - 4AC > 0$; il trinomio (8) al variare dei valori di

$\frac{dx}{dy}$ riuscirà talora positivo, talora negativo, cioè per certi valori delle indeterminate dx, dy, la d^2u potrà, indipendentemente dal segno della A, cambiar segno; conseguentemente la u non ammetterà ne massimo nè minimo.

3° Supponiamo che l'equazione (7) risoluta rapporto a $\frac{dx}{dy}$ abbia le due radici reali ed uguali, e sia perciò $B^2-4AC=0$, i valori di x e y riusciranno infiniti, sicchè la u non ammetterà nè massimo nè minimo.

Se poi oltre ad essere nullo il denominatore delle due frazioni (5) sarà nullo il numeratore di una di esse, anco il numeratore dell' altra sarà nullo, ed avremo ad un tempo le tre equazioni

$$B^2-4AC=0,\ 2CD-BE=0,\ 2AE-BD=0; \tag{9}$$

avremo ancora

$$2Ax+By+D=Bx+2Cy+E; \tag{10}$$

talmentechè le due equazioni (4) si ridurranno ad una soltanto ed i valori di x ed y riusciranno indeterminati. Ora, perchè $A=\frac{B^2}{4C}$, l' equazione (7) darà

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{B}{2A}=-\frac{2C}{B},$$

mentre l'espressione (6) si cangerà nella seguente

$$2Adx^2\left(1+\frac{2Cdy}{Bdx}\right)^2;$$

donde si vede che ponendo $\frac{dy}{dx}=-\frac{B}{2C}$, d^2u sarà nulla, e che per tutt' altro valore di $\frac{dy}{dx}$, d^2u sarà positiva. E siccome $d^3u=0$, $d^4u=0$, ec., la differenza $f(x+h,\ y+k)-f(x,\ y)$ ovvero $f(x+dx,\ y+dy)-f(x,\ y)$, ovvero $U-u$ (la quale è espressa in generale dalla serie $du+\frac{1}{2}d^2u+\frac{1}{6}d^3u\ldots$), posto $\frac{dy}{dx}=-\frac{B}{2C}$, $y=-\frac{2Ax+D}{B}$, sarà nulla anch' essa, mentre

per tutt'altro valore di $\frac{dy}{dx}$, per $y=-\frac{2Ax+D}{B}$, e per x qualunque, il differenziale d^2u, e la differenza $U-u$ avranno il medesimo segno della A; perciò secondochè sarà $A<0$ oppure $A>0$, la funzione $Ax^2+Bxy+Cx^2+Dx+Ey+F$ diverrà un massimo, o un minimo.

Se fosse $B=0$ le equazioni (9) diverrebbero

$$-4AC=0,\ 2CD=0,\ 2AE=0,$$

e dovrebbe aversi

$$A=0,\ C=0,\ u=Dx+Ey+F,$$

oppure $$A=0,\ D=0,\ u=Cy^2+Ey+F,$$

oppure $$C=0,\ E=0,\ u=Ax^2+Dx+F.$$

Nel 1° caso la funzione $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$ non ammetterà valori massimi nè minimi.

Nel 2° caso, perchè $du=2Cy+E$, $d^2u=2C$, $y=-\frac{E}{2C}$, ed x qualunque, se C sarà positivo la funzione stessa ammetterà una infinità di valori minimi tutti uguali a $\frac{4CF-E^2}{4C}$, e se C sarà negativo, cioè se la funzione proposta sarà $Ax^2+Bxy-Cy^2+Dx+Ey+F$, essa per $y=\frac{E}{2C}$; ed x qualunque, ammetterà una infinità di valori massimi tutti uguali a $\frac{4CF+E^2}{4C}$.

Nel 3° caso infine, perchè $du=2Ax+D$, $d^2u=2A$, $x=-\frac{D}{2A}$, ed y qualunque, se A sarà positiva la funzione $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$ ammetterà una infinità di valori minimi tutti uguali a $\frac{4AF-D^2}{4A}$, e se A sarà negativa, cioè se la funzione sarà $-Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F$, essa per $x=\frac{D}{2A}$, ed y qualunque, ammetterà una infinità di valori massimi tutti uguali a $\frac{4AF+D^2}{4A}$.

Esempio I. Abbiasi la funzione

$$u = x^n + y^n + (1 - x^m - y^m)^{\frac{n}{m}};$$

sarà
$$\frac{du}{dx} = nx^{n-1} - nx^{m-1}(1 - x^m - y^m)^{\frac{n-m}{m}},$$

$$\frac{du}{dy} = ny^{n-1} - ny^{m-1}(1 - x^m - y^m)^{\frac{n-m}{m}};$$

ponendo
$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0,$$

troveremo
$$x = y = 3^{-\frac{1}{m}}.$$

Ora
$$\frac{d^2u}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2} - n(m-1)x^{m-2}(1 - x^m - y^m)^{\frac{n-m}{m}}$$

$$+ n(n-m)x^{2m-2}(1 - x^m - y^m)^{\frac{n-2m}{m}},$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = n(n-1)y^{n-2} - n(m-1)y^{m-2}(1 - x^m - y^m)^{\frac{n-m}{m}}$$

$$+ n(n-m)y^{2m-2}(1 - x^m - y^m)^{\frac{n-2m}{m}},$$

$$\frac{d^2u}{dxdy} = n(n-m)x^{m-1}y^{m-1}(1 - x^m - y^m)^{\frac{n-2m}{m}};$$

dunque

$$A = \frac{2n(n-m)}{3^{\frac{n-2}{m}}}, \quad C = \frac{2n(n-m)}{3^{\frac{n-2}{m}}}, \quad B = \frac{n(n-m)}{3^{\frac{n-2}{m}}};$$

per cui sarà $AC > B^2$; dimanierachè se n ed m saranno positivi ed $n > m$, avremo $A > 0$, $C > 0$ e la u riescirà minima, se n ed m saranno positivi ed $n < m$ avremo $A < 0$, $C < 0$ e la u riescirà massima.

Esempio II. Trovare il massimo di tutti i triangoli aventi il perimetro $2p$.

Sieno x, y, $z = 2p - x - y$ i lati del triangolo; la superficie di esso sarà espressa da

$$u = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)};$$

laonde avremo

$$\frac{du}{dx}=p(p-y)(2p-2x-y),\quad \frac{du}{dy}=p(p-x)(2p-2y-x);$$

$$p(p-y)(2p-2x-y)=0,\quad p(p-x)(2p-2y-x)=0;$$

per soddisfare a queste equazioni non possiamo porre $p-y=0$, $p-x=0$, perocchè ne risulterebbe

$$2p=2y=x+y+z,\quad y=x+z,$$
$$2p=2x=x+y+z,\quad x=y+z,$$

il che è assurdo; dunque porremo

$$2p-2x-y=0,\quad 2p-2y-x=0;$$

per cui sarà

$$x=y=\tfrac{2}{3}p,\quad z=2p-x-y=\tfrac{2}{3}p;$$

ora in virtù di questi valori si trova

$$\frac{d^2u}{dx^2}=-\sqrt{3},\ \frac{d^2u}{dy^2}=-\sqrt{3},\ \frac{d^2u}{dxdy}=-\tfrac{1}{2}\sqrt{3};$$

dunque $A<0$ ed $AC>B^2$, ed i valori trovati di x e y corrispondono ad un massimo; il che vuol dire che il massimo dei triangoli isoperimetri è il triangolo equilatero.

Esempio III. Trovare il massimo di tutti i parallelepipedi iscritti in una sfera.

Sia a il diametro della sfera; siccome ogni parallelepipedo iscritto in una sfera è rettangolo, ed il centro di esso coincide con quello della sfera medesima, perciò a mentre è il diametro della sfera sarà pure la diagonale del parallelepipedo; sieno x ed y le dimensioni della sua base; $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ ne sarà l'altezza, ed

$$u=xy\sqrt{a^2-x^2-y^2}$$

il volume. Quindi sarà

$$\frac{du}{dx}=\frac{y(a^2-2x^2-y^2)}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\quad \frac{du}{dy}=\frac{x(a^2-2y^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}};$$

per cui porremo le equazioni

$$a^2-2x^2-y^2=0,\quad a^2-2y^2-x^2=0,$$

dalle quali si ha $x=y=z=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

E siccome per questi valori risulta

$$\frac{d^2u}{dx^2}=-\frac{4a}{\sqrt{3}},\quad \frac{d^2u}{dy^2}=-\frac{4a}{\sqrt{3}},\quad \frac{d^2u}{dxdy}=-\frac{2a}{\sqrt{3}},$$

conseguentemente sarà $A<0$ ed $AC>B^2$; donde si vede che i valori medesimi corrispondono ad un massimo; dunque il massimo dei parallelepipedi che si possono iscrivere in una sfera è il cubo: il lato di siffatto cubo sarà $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Esempio IV. Trovare la più corta distanza di due rette.

Prendasi una delle rette come asse della x, e l'altra sia rappresentata dalle equazioni

$$z=ax+\alpha,\qquad y=bx+\beta; \tag{11}$$

il quadrato della distanza r da un punto $(\mathrm{x}, 0, 0)$ della prima ad un punto qualunque (x, y, z) della seconda, sarà

$$r^2=(x-\mathrm{x})^2+y^2+z^2,$$

ovvero $$r^2=(x-\mathrm{x})^2+(bx+\beta)^2+(ax+\alpha)^2;$$

laonde avremo

$$\frac{du}{dx}=2(x-\mathrm{x})+2(bx+\beta)b+2(ax+\alpha)a,\quad \frac{du}{d\mathrm{x}}=-2(x-\mathrm{x});$$

quindi $$x=\mathrm{x}=-\frac{a\alpha+b\beta}{a^2+b^2};$$

e siccome

$$\frac{d^2u}{dx^2}=2(1-a^2+b^2),\quad \frac{d^2u}{d\mathrm{x}^2}=2,\quad \frac{d^2u}{dxd\mathrm{x}}=-2,$$

sarà $A>0$, ed $AC>B^2$; dunque pei valori trovati di x ed x la funzione u risulta un minimo. Ora essendo $x=\mathrm{x}$ si vede che la distanza richiesta è perpendicolare all'asse delle x; ma l'asse della x rappresenta una qualunque delle due rette date, dunque quella distanza medesima dev' essere perpendicolare anco all'altra; dunque la più corta distanza di due rette è una linea retta perpendicolare all' una e all' altra.

La verità di questo risultato può rendersi evidente in altro modo. Dalle due equazioni (11) si ha

$$y=\frac{b}{a}z-\frac{\alpha b-\beta a}{a}, \tag{12}$$

tale si è l'equazione della proiezione della retta rappresentata dalle equazioni (11) sul piano yz. Or la retta r (la cui proiezione sul piano yz passa per l'origine, mentre quelle sui piani xy, yz sono respettivamente parallele agli assi delle y e delle z) è rappresentata dalle equazioni $y = Az$, $x = \gamma$; alle quali debbono soddisfare i valori $z = ax + \alpha$, $y = bx + \beta$, perchè essa passa pel punto (x, y, z) della seconda retta; avremo adunque

$$A = \frac{y}{z} = \frac{bx + \beta}{ax + \alpha} = -\frac{a}{b};$$

e siccome una retta data dalle proiezioni $x = Az + C, y = Bz + D$ è perpendicolare ad un altra retta data dalle proiezioni $x = A_1 z + C_1, y = B_1 z + D_1$, allorquando si verifica la condizione $1 + AA_1 + BB_1 = 0$, perciò facendo $A_1 = 0$, $B_1 = -\frac{a}{b}$, $B = \frac{b}{a}$, vedremo che la retta data dalle equazioni (11) (12) è perpendicolare alla retta r.

La lunghezza della r sarà data dalla formula

$$r^2 = \sqrt{(y^2 + z^2)} = \frac{a\beta - b\alpha}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}.$$

VIII. *Il Metodo delle Tangenti.*

323. Definizione I. *Secante* di una curva dicesi ogni linea retta la quale passa per due o più punti di questa curva.

324. Definizione II. La *tangente* ad una curva è una secante di cui almeno due punti d'intersezione si sono riuniti in un punto solo. Questo punto si chiama *punto di contatto*.

325. Definizione III. Una linea retta si dirà *normale* ad una curva in un punto dato, quando sarà perpendicolare alla tangente che passa pel punto medesimo.

326. Definizione IV. *Lunghezza della tangente* e *lunghezza della normale*, si dicono quelle parti della tangente e della normale comprese fra il punto di contatto e l'asse delle ascisse.

327. Definizione V. Conducendo dal punto di contatto della tangente colla curva una ordinata, si chiameranno *sottangente* e *sunnormale* quelle parti dell'asse delle ascisse comprese fra il

piede di essa ordinata e i punti ne' quali la tangente e la normale tagliano l' asse medesimo.

328. PROBLEMA I. *Trovare l'equazione della secante alla curva* $y = Fx$.

L'equazione d' una retta condotta pei punti (α, β), (α_1, β_1) è

$$y - \beta = a(x - \alpha),$$

essendo
$$a = \frac{\beta_1 - \beta}{\alpha_1 - \alpha}.$$

Ora 1° se i punti (α_1, β_1), (α, β) si troveranno ambedue sulla curva $y = Fx$, avremo $\beta = F\alpha$, $\beta_1 = F\alpha_1$,

$$a = \frac{F\alpha_1 - F\alpha}{\alpha_1 - \alpha};$$

ovvero, supponendo $\alpha_1 = \alpha + h$,

$$a = \frac{F(\alpha + h) - F\alpha}{h}; \qquad (1)$$

così
$$y - \beta = \frac{F(\alpha + h) - F\alpha}{h}(x - \alpha), \qquad (2)$$

sarà l'equazione della secante che passa per due punti della curva; α e $F\alpha$ essendo le coordinate di uno di essi punti, $\alpha + h$ ed $F(\alpha + h)$ le coordinate dell' altro.

2° Se uno solo dei punti, per esempio (α_1, β_1), sarà sulla curva, e l' altro (α, β) si troverà al di fuori di essa, avremo

$$a = \frac{F\alpha_1 - \beta}{\alpha_1 - \alpha}; \qquad (3)$$

ma la retta di cui si tratta, supponendosi secante, taglia la curva in due punti, se (α_1, β_1) ovvero $(\alpha_1, F\alpha_1)$ è uno di essi, l' altro potremo supporre che sia $(\alpha_1 + h, F(\alpha_1 + h))$; per cui avremo la proporzione

$$\frac{F\alpha_1 - \beta}{\alpha_1 - \alpha} = \frac{F(\alpha_1 + h) - F\alpha_1}{h};$$

e quindi
$$a = \frac{F(\alpha_1 + h) - F\alpha_1}{h}, \qquad (5)$$

$$y - \beta = \frac{F(\alpha_1 + h) - F\alpha_1}{h}(x - \alpha); \qquad (6)$$

tale sarà l'equazione di una secante che passa pel punto $(\alpha_1, F\alpha_1)$ preso sulla curva, ed il punto (α, β) preso al di fuori di essa: $\alpha_1 + h$ è l'ascissa dell'altro punto in cui la secante taglia la curva.

Facendo nelle equazioni (5) e (6), $\alpha_1 = x$, $F\alpha_1 = Fx$, avremo

$$a = \frac{F(x+h) - Fx}{h}, \tag{7}$$

$$y - \beta = \frac{F(x+h) - Fx}{h}(x - \alpha); \tag{8}$$

e questa sarà l'equazione di una secante qualunque condotta dal punto (α, β) preso al di fuori della curva: x, y rappresentano le coordinate variabili di questa secante medesima.

329. Scolio. Si avverta che l'equazione (8) si muta nella (2) quando ad x e y si sostituiscono α e β; perciò l'equazione

$$y - \beta = a(x - \alpha),$$

dove

$$a = \frac{F(x+h) - Fx}{h}, \tag{9}$$

rappresenterà una secante condotta da un punto (α, β) preso al di fuori della curva, o da un punto x, y della curva, secondochè considereremo α, β costanti ed x, y variabili, oppure α, β variabili ed x, y costanti.

330. Problema II. *Trovare l'equazione della tangente alla curva* $y = Fx$.

1° Sia (α, β) quel punto della curva da cui si dee condurre la tangente; avremo ricorso alle equazioni (1) e (2); immaginando che h decrescendo indefinitamente converga verso lo zero (n. 324), sarà al limite

$$a = F'\alpha, \tag{10}$$

$$y - \beta = F'\alpha(x - \alpha); \tag{11}$$

tale si è l'equazione della tangente alla curva nel punto (α, β).

1° Sia (α, β) un punto preso al di fuori della curva; per trovare l'equazione della tangente condotta da questo punto, avremo ricorso alle equazioni (7) e (8); immaginando come sopra che h decresca indefinitamente, sarà al limite

$$a = F'x, \quad a = y', \tag{12}$$

$$y - \beta = F'x(x - \alpha), \quad y - \beta = y'(x - \alpha); \tag{13}$$

tale si è l'equazione della tangente alla curva condotta da un punto (α, β) preso al di fuori di essa.

331. Scolio I. Siccome qualunque sistema di valori per x ed y che soddisfaccia a siffatta equazione esprime le coordinate d'un punto possibile di contatto, perciò l'equazione (13) rappresenterà una curva su cui si troveranno i punti di contatto della curva $y = Fx$ con tutte le sue tangenti che partono dal punto (α, β). La natura di siffatta curva sarà determinata dalla funzione $F'x$.

Per trovare tutte le tangenti che si possono condurre dal punto (α, β) alla curva $y = Fx$ dovremo porre le due equazioni

$$y = Fx,$$
$$y - \beta = F'x(x - \alpha),$$

e determinare mediante l'eliminazione tutti i sistemi di valori reali per x, y capaci di soddisfare ad esse; ogni sistema di valori reali verrà ad esprimere le coordinate d'un punto possibile di contatto. Avvertasi che i punti di contatto potranno ottenersi altresì costruendo la curva $y - \beta = F'x(x - \alpha)$; tali punti saranno le intersezioni di essa colla curva $y = Fx$.

332. Scolio II. L'equazione (13) si muta nella equazione (11) sol che x, y si cangino in α, β e viceversa; perciò l'equazione

$$y - \beta = a(x - \alpha), \tag{14}$$

dove

$$a = F'x,$$

rappresenterà una tangente condotta da un punto x, y della curva, se considereremo x e y costanti, α e β variabili; rappresenterà una curva sulla quale si troveranno i contatti di tutte le tangenti tirate dal punto α e β alla curva se considereremo x e y variabili, α e β costanti.

333. Scolio III. Le cose che abbiamo esposte son vere per qualunque sistema di assi. Nella ipotesi per altro in cui gli assi sieno ortogonali, indicando con θ l'angolo fatto dalla tangente coll'asse delle x dalla parte delle x positive, avremo

$$\operatorname{tang}\theta = F'x = y' = \frac{dy}{dx}; \tag{15}$$

$$\cos\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = \pm\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}, \tag{16}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \pm \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}. \qquad (17)$$

334. Problema III. *Trovare l'equazione della tangente ad una curva nel caso in cui l'ordinata sia una funzione implicita dell'ascissa.*

Sia $f(x, y) = 0$ l'equazione della curva; avremo

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy = 0, \qquad (18)$$

quindi
$$F'x = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}};$$

e l'equazione (14) darà

$$\frac{df}{dx}(x-\alpha) + \frac{df}{dy}(y-\beta) = 0; \qquad (19)$$

questa sarà l'equazione della tangente quando l'ordinata sia funzione implicita dell'ascissa.

Paragonando l'equazione (19) colla (18) si vede che ad avere l'equazione della tangente, basta sostituire nella equazione differenziale della curva le differenze $x-\alpha$, $y-\beta$, ai differenziali dx, dy.

L'equazione (19) non muterebbe allorquando alla $f(x,y)=0$ si sostituisse $f(x, y) = c$; c essendo una costante qualunque.

335. Scolio. Supponiamo che l'equazione $f(x, y) = c$ abbia la forma seguente

$$u + v + w + \ldots = c,$$

u, v, w... essendo funzioni intere e omogenee, la 1ª del grado m, la 2ª del grado $m-1$, la 3ª del grado $m-2$, ec.; avremo

$$\frac{df}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} + \ldots, \quad \frac{df}{dy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dy} + \ldots;$$

diguisachè l'equazione (19) si cangerà nella seguente

$$\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} + \ldots\right)(x-\alpha) + \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dy} + \ldots\right)(y-\beta) = 0;$$

ma essendo u, v, w, ecc. funzioni omogenee, abbiamo (n. 183)

$$\frac{du}{dx}x+\frac{du}{dy}y=mu,$$

$$\frac{dv}{dx}x+\frac{dv}{dy}y=(m-1)v,$$

$$\frac{dw}{dx}x+\frac{dw}{dy}y=(m-2)w;$$

. . . . .

dunque l'equazione della tangente sarà

$$\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}+..\right)\alpha+\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dy}+..\right)\beta=mc-v-2w-...\quad(20)$$

questa equazione rappresenta la tangente condotta pel punto (x, y) della curva quando α, β si considerano come le coordinate variabili della tangente medesima; se poi si considerano α, β costanti, ed x, y variabili essa rappresenta una curva del grádo $m-1$, cioè la curva di tutti i contatti della linea $y=Fx$ colle sue tangenti che partono dal punto (α, β).

336. PROBLEMA IV. *Trovare l'equazione della normale.*

Passi la normale pel punto (α, β); la sua equazione sarà

$$y-\beta=a_1(x-\alpha).$$

1° Se gli assi saranno ortogonali, avremo

$$1+aa_1=0,$$

$$a_1=-\frac{1}{a},\quad a=y'.$$

2°. Se gli assi formeranno fra loro l'angolo ω avremo

$$1+aa_1+(a+a_1)\cos\omega=0;$$

$$a_1=-\frac{1+a\cos\omega}{a+\cos\omega},\quad a=y'.$$

L'equazione della normale nel 1° caso sarà

$$y-\beta=-\frac{1}{y'}(x-\alpha);\qquad(21)$$

nel 2° caso $\quad y-\beta=-\dfrac{1+y'\cos\omega}{y'+\cos\omega}(x-\alpha);\qquad(22)$

ed è da notare che avremo $y'=F'x$, oppure $y'=F'\alpha$, secondochè il punto (α, β) si troverà sopra la curva, o fuori.

337. Corollario I. *Il Circolo.* Sia l'equazione del circolo

$$x^2+y^2=r^2;$$

avremo $c=r^2,\ m=2,\ u=x^2+y^2,\ v=0,\ w=0$, ec.

$$\frac{du}{dx}=2x,\quad \frac{du}{dy}=2y;$$

la (20) darà $$\alpha x+\beta y=r^2. \tag{T}$$

L'equazione differenziale della curva sarà

$$xdx+ydy=0,\quad y'=-\frac{x}{y};$$

conseguentemente la (14) e la (21) daranno

$$x(x-\alpha)+y(y-\beta)=0, \tag{T}$$

$$x(y-\beta)-y(x-\alpha)=0; \tag{N}$$

è facile il vedere che le due equazioni (T) coincidono.

1° Sia il punto (x, y) sulla curva; x ed y si supporranno costanti; α, β rappresenteranno le coordinate variabili delle due rette (T), (N). Dalla equazione (T), facendo $\alpha=0$, risulta che l'ordinata all'origine è $\frac{r^2}{y}$; dunque la CT (fig. 1.) perpendicolare al raggio OM sarà la retta rappresentata dalla (T); infatti $OC=\frac{\overline{OM}^2}{OB}=\frac{r^2}{y}$.

La tangente può costruirsi ancora mediante il valore di $y'=\text{tang }(T, \alpha)=-\frac{x}{y}$ (n. 333); essendo $\text{tang } OMP=\frac{OP}{MP}=\frac{x}{y}$, concluderemo come sopra che la MT perpendicolare al raggio OM è la tangente (T); $MT\alpha=180°-OMP$, $\text{tang } MT\alpha=-\frac{x}{y}$.

Il raggio OM essendo perpendicolare alla CT sarà la normale (N); il che si comprova osservando che

$$\text{tang }(N, \alpha)=-\frac{1}{y'}=\frac{y}{x},\quad \text{tang } MOP=\frac{MP}{OP}=\frac{y}{x}.$$

Ma siccome l'equazione (N) si trasforma in $\beta=\frac{y}{x}\alpha$, perciò si vede immediatamente che la normale è una retta la quale passa per l'origine e che coincide col raggio OM.

2° Sia il punto $K(\alpha, \beta)$ (fig. 2) fuori della curva; α e β si supporranno costanti; x, y rappresenteranno le coordinate variabili delle due rette (T), (N). Si osservi che l' equazione (T), cioè

$$\alpha x + \beta y = r^2,$$

può trasformarsi nella seguente

$$\left(x - \frac{1}{2}\alpha\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\beta\right)^2 = \frac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2), \qquad (T_1)$$

e mentre sotto la prima forma rappresenta manifestamente una retta, sotto la seconda rappresenta un circolo avente il centro nel mezzo della retta OK cioè in $B(\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}\beta)$, e per raggio $BO = \frac{1}{2}\, OK = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$. Sopra questo circolo e quella retta debbono trovarsi i punti di contatto delle tangenti condotte al circolo dato dal punto $K(\alpha, \beta)$; e siccome il circolo di cui B è il centro e BO il raggio, taglia il circolo dato nei punti M ed M', perciò dovendo essi esser comuni anco alle tangenti tirate dal punto K, segue che dal punto K si possono condurre al circolo dato le due tangenti KM, KM'.

E siccome il circolo rappresentato dalla equazione (T_1) è indipendente dal raggio r, perciò siffatto circolo sarà il luogo geometrico di tutti i punti di contatto delle tangenti tirate dal punto (α, β) ai diversi circoli che si ottengono facendo variare la r nell' equazione $x^2 + y^2 = r^2$.

338. Corollario II. *L'ellisse e l'iperbola.* Queste due curve sono rappresentate dalla equazione

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = K;$$

dove $\quad c = K, \; m = 2, \quad u = Ax^2 + 2Cxy + Cy^2,$

$$\frac{du}{dx} = 2Ax + 2By, \qquad \frac{du}{dy} = 2Bx + 2Cy;$$

sicchè dalla (20) avremo

$$\alpha(Ax + By) + \beta(Cy + Bx) = K. \qquad (T)$$

L' equazione differenziale della curva è la seguente,

$$(Ax + By)\, dx + (Cy + Bx)\, dy = 0;$$

laonde avremo ancora dalla (14) e dalla (21)

$$(Ax + By)(x - \alpha) + (Cy + Bx)(y - \beta) = 0, \qquad (T)$$

$$(Ax + By)(y - \beta) - (Cy + Bx)(x - \alpha) = 0. \qquad (N)$$

Si osservi che le due equazioni (T) non differiscono fra loro che nella forma.

Quando poi le due curve fossero rappresentate dalle equazioni

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=\pm 1,$$

avremmo

$$c=\pm 1,\ m=2,\ u=\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2},$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{2x}{a^2},\ \frac{du}{dy}=\pm\frac{2y}{b^2},$$

$$\frac{\alpha x}{a^2}\pm\frac{\beta y}{b^2}=\pm 1. \qquad (T)$$

Le equazioni differenziali delle curve medesime sono

$$\frac{xdx}{a^2}\pm\frac{ydy}{b^2}=0;$$

per conseguenza otterremo

$$\frac{x}{a^2}(x-\alpha)\pm\frac{y}{b^2}(y-\beta)=0, \qquad (T)$$

$$\frac{x}{a^2}(y-\beta)\pm\frac{y}{b^2}(x-\alpha)=0. \qquad (N)$$

339. Corollario III. *La parabola.* L'equazione finita della curva essendo

$$y^2=2px,$$

l'equazione differenziale sarà

$$ydy-pdx=0;$$

laonde avremo

$$y(y-\beta)-p(x-\alpha)=0, \qquad (T)$$

$$y(x-\alpha)+p(y-\beta)=0; \qquad (N)$$

la (T) può prendere anco la forma seguente

$$\beta y-px=p\alpha. \qquad (T)$$

340. Corollario IV. *La logaritmica.* L'equazione della curva essendo

$$y=\frac{lx}{la},$$

avremo $$xdy - \frac{dx}{la} = 0$$

$$xla(y-\beta) - (x-\alpha) = 0, \qquad (T)$$

$$xla(x-\alpha) + (y-\beta) = 0. \qquad (N)$$

341. Corollario V. ***Cicloide.*** **La cicloide è quella curva che si descrive da un punto della circonferenza di un circolo che gira intorno al suo centro mantenendosi tangente ad una retta data. Questa curva si compone di una infinità di rami che sovrapposti potrebbero coincidere perfettamente; ciascuno di essi ha per base una parte della retta, uguale alla circonferenza del circolo mobile. Si prenda la retta data per asse delle ascisse, e l'origine sia uno de'punti in cui essa incontra la curva. Sia N (fig. 3) il punto di contatto del circolo mobile con tale asse, e l'arco MN sia uguale ad AN; il punto M apparterrà alla cicloide; r sia il raggio di siffatto circolo; l'angolo MON compreso fra il raggio mobile OM, e il raggio ON perpendicolare all'asse delle x, può prendere tutti i valori possibili da 0 sino a $\pm\infty$; indichiamo siffatto angolo con ω; quell'arco della circonferenza avente per raggio r che misura tale angolo sarà $r\omega$; talmentechè rispetto alle coordinate x, y di un punto M qualunque della cicloide, avremo**

$$x = AN - PN, \qquad y = ON - OQ;$$

$$x = r(\omega - \operatorname{sen}\omega), \qquad y = r(1-\cos\omega); \qquad (23)$$

di qui si ricava $\cos\omega = \frac{r-y}{r}$, $\quad \omega = \text{ar.}\cos\frac{r-y}{r}$;

per lo che sarà $\operatorname{sen}\omega = \frac{1}{r}\sqrt{2ry-y^2}$;

e quindi $$x = r\,\text{ar}\cos\frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry-y^2};$$

tale si è l'equazione della cicloide riferita a coordinate ortogonali.

Differenziando le equazioni (23) si ha

$$dx = r(1-\cos\omega)\,d\omega = y\,d\omega, \qquad dy = r\operatorname{sen}\omega\,d\omega,$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{r\,sen\,\omega}{y} = \frac{\sqrt{2ry-y^2}}{y} = \sqrt{\frac{2r-1}{y}};$$

dunque l'equazione della tangente sarà

$$y-\beta=\sqrt{\frac{2r-y}{y}}\,(x-\alpha); \qquad (T)$$

e l'equazione della normale

$$y-\beta=-\frac{y}{\sqrt{2ry-y^2}}\,(x-\alpha)$$

ovvero

$$y-\beta=-\sqrt{\frac{y}{2r-y}}\,(x-\alpha). \qquad (N)$$

342. Problema V. *Trovare la lunghezza della sottangente, della sunnormale, della tangente e della normale.*

Supporremo gli assi ortogonali, e rappresenteremo con T, N, S_t, S_n le quattro lunghezze richieste, cioè la lunghezza della tangente, della normale, della sottangente e della sunnormale. Giusta le definizioni date della sottangente e della sunnormale sarà (fig. 4)

$$S_t=PT=\pm(x-OT), \quad S_n=PN=\pm(ON-x);$$

ed avrà luogo il $+$ o il $-$ secondochè l'ascissa del punto di contatto, cioè x, sarà maggiore di OT e minore di ON, o minore di OT e maggiore di ON; in altri termini S_t ed S_n saranno volte nella direzione delle x positive o negative secondochè $x-OT$, $ON-x$ saranno positive o negative. Ricercandosi il solo valore assoluto il segno potrà sopprimersi; sicchè avremo $S_t=x-OT$, $S_n=ON-x$.

Ora i valori di OT ed ON sono appunto i valori che acquista α nelle equazioni (13) e (21) della tangente e della normale quando si faccia $\beta=0$; dunque

$$S_t=\frac{y}{y'}, \qquad S_n=yy'. \qquad (24)$$

Ciò posto è da osservare che la lunghezza della tangente è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cui y ed S_t sono i cateti, mentre la lunghezza della normale è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti sono y ed S_n. Conseguentemente

$$T=\frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}, \qquad N=y\sqrt{1+y'^2}. \qquad (25)$$

343. Corollario I. Dalle equazioni (24) si ha

$$S_t\,.\,S_n=y^2;$$

dunque l' ordinata del punto di contatto è media proporzionale fra la sottangente e la sunnormale.

344. Corollario II. *Circolo.* $x^2+y^2=r^2$.

$$S_t=\frac{r^2-x^2}{x},\quad S_n=x,\quad T=\frac{r}{x}\sqrt{r^2-x^2},\quad N=r.$$

Ellisse e Iperbola. $\quad\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=\pm 1.$

$$S_t=\frac{a^2-x^2}{x},\qquad S_n=\mp\frac{b^2x}{a^2};$$

$$T=\frac{y}{b^2x}\sqrt{(a^4y^2+b^4x^2)},\quad N=\frac{1}{a^2}\sqrt{(a^4y^2+b^4x^2)}.$$

Parabola. $\quad y^2=2px.$

$$S_t=2x,\quad S_n=p,\quad T=\sqrt{2x(2x+p)},\ N=\sqrt{p(2x+p)}.$$

Logaritmica. $\quad x=\frac{\mathrm{l}y}{\mathrm{l}a};$

$$S_t=\frac{1}{\mathrm{l}a},\qquad S_n=\mathrm{l}a.e^{2x\mathrm{l}a},$$

$$N=\mathrm{l}a.e^{2x\mathrm{l}a}\sqrt{\left(\frac{1}{\mathrm{l}a}\right)^2+e^{2x\mathrm{l}a}},\qquad T=\sqrt{\left(\frac{1}{\mathrm{l}a}\right)^2+e^{2x\mathrm{l}a}}.$$

Cicloide. L' equazione differenziale è $dy=dx\sqrt{\frac{2r-y}{y}}$

$$S_t=y\sqrt{\frac{y}{2r-y}},\qquad S_n=\sqrt{y(2r-y)},$$

$$T=y\sqrt{\frac{2r}{2r-y}},\qquad N=\sqrt{2ry}.$$

Dalla figura 3 si raccoglie che $PN=\sqrt{y(2r-y)}$, ed $MN=\sqrt{2ry}$; ciascuno di questi valori dimostra che MN ed MT sono respettivamente la normale e la tangente del punto M.

IX. *I contatti delle curve piane.*

345. Principio. Sieno $y=fx, y=Fx$, le equazioni di due curve; supponiamo che queste curve abbiano un punto (x_0, y_0) comune; avremo $fx_0=Fx_0$; la differenza delle ordinate di due

punti $M(x_0+h, f(x_0+h))$, $M'(x_0+h, F(x_0+h))$ corrispondenti alla medesima ascissa $x+h$, sarà

$$D = f(x+h) - F(x+h) = h(f'x - F'x) + \frac{h^2}{1.2}(f''x - F''x) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}\left(f^{(n)}(x+\theta h) - F^{(n)}(x+\theta h)\right)$$

questa differenza esprimerà la distanza de' due punti M, M' delle curve. Ora se pel valore di x che ci dà $fx = Fx$ si avesse ancora $f'x = F'x$, i due punti oltre avere un punto comune avrebbero una comune tangente; la differenza D sarebbe minore che nel caso in cui non avesse luogo questa seconda condizione, cioè i due punti M, M', sarebbero più vicini fra loro; sempre più vicini essi sarebbero se pel valore x_0 di x si avesse inoltre $f''x = F''x$: in generale *i punti* M, M', *si diranno tanto più vicini fra loro quanto più grande sarà il numero delle derivate di* fx *che per* $x = x_0$, *risulteranno respettivamente identiche alle derivate corrispondenti di* Fx.

346. Definizione I. Due curve s' intende che sieno *a contatto fra loro* quando hanno un punto comune ed una comune tangente.

347. Scolio. Il contatto di due curve si reputa tanto più intimo quanto più piccola è D.

348. Definizione II. Due curve $x = fx$, $y = Fx$, avranno nel punto (x_0, y_0) un contatto del primo ordine, quando sarà $fx_0 = Fx_0$, $f'x_0 = F'x_0$; avranno un contatto del 2° ordine quando sarà $fx_0 = Fx_0$, $f'x_0 = F'x_0$, $f''x_0 = F''x_0$; avranno in generale un contatto dell'ordine n^{mo} quando i valori fx_0, $f'x_0$, $f''x_0 \ldots f^{(n)}x_0$, saranno respettivamente uguali ai valori Fx_0, $F'x_0$, $F''x_0 \ldots F^{(n)}x_0$.

349. Definizione III. Quando due curve $y = fx$, $y = Fx$, avranno fra loro un contatto dell' ordine n, ciascuna di esse si dirà *osculatrice* dell'altra di quello stesso ordine.

250. Problema I. *Date due curve* y = fx, y = Fx *determinare* 1° *se esse abbiano punti comuni*, 2° *se questi punti sieno a contatto fra loro,* 3° *qual sia l'ordine del contatto.*

1° Porremo l'equazione $fx = Fx$; le due curve avranno tanti punti comuni quante saranno le radici reali $x_0, x_1, x_2, \ldots$ di tale equazione; le radici medesime esprimeranno le ascisse di questi punti.

2° Se per $x = x_0$ la derivata $f'x$ non risulterà uguale alla

derivata $F'x$, non esisterà fra le due curve verun contatto nel punto comune di cui x_0 è l'ascissa.

3°. Se per $x = x_0$ le derivate $f'x, f''x, f'''x, \dots f^{(n)}x$ risulteranno ordinatamente uguali alle derivate $F'x, F''x, F'''x \dots F^{(n)}x$, le due curve avranno fra loro un contatto dell'ordine n nel punto comune di cui x_0 è l'ascissa.

351. Problema II. *Trovare una curva appartenente alla famiglia rappresentata dalla equazione* $y = F(x, A, B, C, \dots H)$, *tale che abbia colla curva* $y = fx$ *un contatto dell'ordine* n.

Affinchè il contatto sia dell'ordine n dovranno sussistere le $n + 1$ equazioni seguenti

$$fx_0 = F(x_0, A, B, C, \dots)$$
$$f'x_0 = F'(x_0, A, B, C, \dots)$$
$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$
$$f^{(n)}x_0 = F^{(n)}(x_0, A, B, C, \dots)$$

di queste equazioni ci varremo per determinare i valori di $n + 1$ costanti $A, B, C, \dots$; per questo sistema di valori l'equazione $y = F(x, A, B, C, \dots)$ verrà a rappresentare la curva richiesta.

352. Scolio. L'equazione $y = F(x, A, B, C, \dots H)$ quando non contenesse almeno $n + 1$ costanti non potrebbe avere giammai un contatto dell'ordine n colla curva $y = fx$, nè divenire una *osculatrice* dell'ordine n di essa. Dunque una linea retta $y = ax + b$ non può essere che una osculatrice del 1° ordine, ed un circolo $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ potrà al più divenire una curva osculatrice del 2° ordine ad una curva data.

353. Problema III. *Trovare una curva parabolica del grado* n *che abbia un contatto dell'ordine* n *colla curva* $y = fx$.

Sia la linea parabolica del grado n rappresentata dalla equazione
$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \dots + Hx^n;$$

$A, B, C, \dots H$ sono le $n + 1$ costanti da determinarsi per modo che la linea parabolica venga ad avere un contatto dell'ordine n colla curva proposta $y = fx$ nel punto $(x_0, y_0, \dots)$.

Indicando con u il polinomio esprimente l'ordinata y della linea parabolica, le equazioni che dovranno aver luogo per il contatto saranno

$$fx = u, \quad f'x = \frac{du}{dx}, \quad f''x = \frac{d^2u}{dx^2}, \quad \dots \quad f^{(n)}x = \frac{d^nu}{dx^n}, \qquad (1)$$

quando si faccia per altro $x = x_0$; dunque avremo

$$\begin{aligned}
fx_0 &= A + Bx_0 + Cx_0^2 + Dx_0^3 \dots + Hx_0^n,\\
f'x_0 &= \quad B + 2\,Cx_0 + 3\,Dx_0^2 \dots + nH\,x_0^{n-1},\\
f''x_0 &= \qquad 2\,C + 2.3\,Dx_0 \dots + n\,(n-1)Hx_0^{n-2},\\
&\dots\dots\\
f^{(n)}x_0 &= \qquad n\,(n-1)\,(n-2)\dots 3.2.1H.
\end{aligned}$$

queste saranno le $n+1$ equazioni da cui ricaveremo i valori di $A, B, C \dots H$ per ottenere l'equazione della osculatrice richiesta. All'oggetto di esimerci dalla eliminazione si osservi che dovendo essere (x_0, y_0) un punto della parabola, i valori x_0, y_0 di x, y debbono esser tali da mutare l'equazione della parabola stessa in identità; cosicchè avremo

$$y_0 = A + Bx_0 + Cx_0^2 + Dx_0^3 \dots + Hx_0^n;$$

dunque l'equazione della parabola potrà mettersi sotto la forma

$$y - y_0 = B\,(x - x_0) + C\,(x^2 - x_0^2) \dots + H\,(x^n - x_0^n).$$

Infatti per $x = x_0$ sarà $y = y_0$ ed avremo l'identità $0 = 0$. Ma $x^n - x_0^n$, ove sia $x = x_0$, si può considerare come uguale ad $(x - x_0)^n$; dunque l'equazione della parabola potrà mettersi altresì sotto la forma seguente

$$y = y_0 + B\,(x - x_0) + C\,(x - x_0)^2 \dots + H\,(x - x_0)^n.$$

Ora quando si faccia $x = x_0$, il secondo membro che si esprime per u diventa y_0, le espressioni di

$$\frac{du}{dx},\ \frac{d^2u}{dx^2},\ \frac{d^3u}{dx^3} \dots \frac{d^nu}{dx^n}$$

diventano $\qquad B,\ 1.2C,\ 1.2.3D,\ \dots\ 1.2.3\dots nH;$

dunque le equazioni (1) che debbono aver luogo per il contatto, quando si faccia $x = x_0$, daranno

$$fx_0 = y_0,\ f'x_0 = B,\ f''x_0 = 1.2C,\ f'''x_0 = 1.2.3D, \dots f^{(n)}x_0 = 1.2.3\dots nH;$$

donde si ha

$$y = fx_0,\ \ B = \frac{f'x_0}{1},\ \ C = \frac{f''x_0}{1.2},\ \ D = \frac{f'''x_0}{1.2.3}, \dots H = \frac{f^{(n)}x_0}{1.2.3\dots n};$$

così

$$y = fx_0 + \frac{f'x_0}{1}(x - x_0) + \frac{f''x_0}{1.2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''x_0}{1.2.3}(x - x_0)^3 \dots + \frac{f^{(n)}x_0}{1.2\dots n}(x - x_0)^n$$

sarà l'equazione della curva parabolica del grado n, avente nel punto dato (x_0, y_0) un contatto dell'ordine n colla curva $y = fx$.

354. Corollario. Quando $n = 1$ la parabola osculatrice si cambia in una linea retta; essa è espressa dalla equazione

$$y - y_0 = f'x_0 (x - x_0)$$

e rappresenta perciò la tangente alla curva $y = fx$ nel punto (x_0, y_0). La tangente si può adunque considerare come una linea osculatrice del primo ordine.

355. Problema IV. *Trovare un circolo il quale abbia un contatto del 1° o del 2° ordine colla curva* $y = fx$ *nel punto* (x_0, y_0).

Sia l'equazione del circolo

$$(a - x)^2 + (b - y)^2 = r^2 ; \tag{2}$$

differenziando due volte avremo

$$(a - x)\,dx + (b - y)\,dy = 0,$$
$$(b - y)\,d^2y - dx^2 - dy^2 = 0;$$

ovvero

$$a - x + (b - y)\,y' = 0, \tag{3}$$
$$(b - y)\,y'' - 1 - y'^2 = 0; \tag{4}$$

in queste equazioni dovremo sostituire ad y, y', y'' i loro valori tratti dalla equazione della curva; di più dovremo sostituire ad x l'ascissa x_0 del punto (x_0, y_0) nel quale dee aver luogo il contatto. Supponendo eseguite siffatte sostituzioni si vede apertamente;

1° Che il circolo avrà un contatto del 1° ordine colla curva $y = fx$, allorquando il raggio r e le coordinate a, b del centro soddisfaranno alle due equazioni (2) e (3); ma siccome una di queste coordinate rimane indeterminata, perciò nulla vieta che esse si considerino come variabili; allora l'equazione (3) rappresenterà una normale alla curva nel punto (x_0, y_0) del contatto. Da ciò s'inferisce che ogni circolo il quale passa per un punto della curva si trova *a contatto* con essa, tostochè ha il centro sulla normale condotta al punto stesso.

2°. Che il circolo avrà un contatto del 2° ordine colla curva $y = fx$ ove r, a, b soddisfacciano a un tempo alle tre equazioni (2), (3), (4); dividendo la (3) per y', e la (4) per y'', si trova tosto

$$a - x = -y' . \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad (5) \qquad b - y = \frac{1 + y'^2}{y''}; \quad (6)$$

quindi la (2) dà $$r = \pm \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}. \tag{7}$$

356. Scolio I. Il segno di r rimane indeterminato; la sua posizione sarà per altro data dalle eq. (5) (6) nelle quali $a-x$, $b-y$ esprimono respettivamente le proiezioni di r su gli assi delle x e delle y; cosicchè il segno di queste quantità indicherà da qual lato il centro del circolo osculatore dovrà esser posto rispetto alla curva. Or, siccome ci varremo della formula (7) all'unico oggetto di trovare il valore assoluto di r, perciò all'espressione di questo daremo sempre il segno positivo. Se y'' sarà positiva, prenderemo il segno $+$; prenderemo poi il segno $-$ nel caso contrario.

357. Scolio II. Avvertasi che allorquando faremo parola del *circolo osculatore* d'una curva senza indicare l'ordine del contatto intenderemo sempre di parlare di quel circolo che ha colla curva stessa un contatto del 2° ordine.

358. Teorema I. *Di due osculatrici alla curva* $\mathrm{y} = \mathrm{fx}$ *nel punto* $(\mathrm{x}_0, \mathrm{y}_0)$, *quella dell'ordine inferiore non può mai in prossimità del contatto essere compresa fra l'altra osculatrice e la curva* $\mathrm{y} = \mathrm{fx}$.

Sieno $y = \psi x$, $y = \varphi x$ le due osculatrici alla curva $y = fx$; l'una dell'ordine $n-1$; l'altra dell'ordine $n-2$; avremo

$$\psi x_0 = fx_0, \quad \psi' x_0 = f' x_0 \; . \; . \; . \; . \; . \; \psi^{(n-1)} x_0 = f^{(n-1)} x_0,$$
$$\varphi x_0 = fx_0, \quad \varphi' x_0 = f' x_0, \; . \; . \; . \; . \; \varphi^{(n-2)} x_0 = f^{(n-2)} x_0;$$

e perchè non dee $\varphi^{(n-1)} x_0$ essere uguale ad $f^{(n-1)} x_0$, porremo

$$\varphi^{(n-1)} x_0 = f^{(n-1)} x_0 \pm K;$$

talchè, facendo per brevità

$$P = fx_0 + \frac{h}{1} f' x_0 + \frac{h^2}{2} f'' x_0 \; ... + \frac{h^{n-1}}{1.2...(n-1)} f^{n-1} x_0,$$

le ordinate prossime al contatto e corrispondenti all'ascissa $x_0 + h$, saranno

$$f(x_0 + h) = P + \frac{h^{n-1}}{1.2...(n-1)} \cdot \frac{h}{n} f^{(n)}(x_0 + \theta h),$$

$$\psi(x_0 + h) = P + \frac{h^{n-1}}{1.2...(n-1)} \frac{h}{n} \psi^{(n)}(x_0 + \theta h),$$

$$\varphi(x_0 + h) = P + \frac{h^{n-1}}{1.2...(n-1)} \left(\pm K + \frac{h}{n} \varphi^{(n)}(x_0 + \theta h)\right);$$

convergendo h verso lo zero, ciascuna delle tre quantità $\frac{h}{n}f^{(n)}(x_0+\theta h)$, $\frac{h}{n}\psi^{(n)}(x_0+\theta h)$, $\frac{h}{n}\varphi^{(n)}(x_0+\theta h)$, qualunque sia θ, potrà riuscire piccola quanto vuolsi e minore di K; dunque se sarà $K>0$, avremo per un valore di h sufficientemente piccolo,

$$\varphi(x_0+h)>f(x_0+h),\ \varphi(x_0+h)>\psi(x_0+h);$$

se sarà $K<0$ avremo

$$\varphi(x_0+h)<f(x_0+h),\ \varphi(x_0+h)<\psi(x_0+h);$$

nell' uno e nell'altro caso la curva $y=\varphi x$ in prossimità del contatto non potrà passare fra le due curve $y=fx$, $y=\psi x$.

359. Corollario. Nessuna linea retta può passare fra una curva ed una tangente condotta in un punto della curva stessa.

360. Scolio. Il teorema precedente giustifica la distinzione che si fa de' diversi generi di contatto; certo è che il contatto della curva $y=fx$ colla $y=\varphi x$ è meno intimo del contatto della curva stessa $y=fx$ colla $y=\psi x$, la quale è compresa fra $y=fx$ ed $y=\varphi x$; una curva $y=Fx$ che avesse colla curva $y=fx$ nel punto M un contatto dell' ordine n sarebbe in prossimità del contatto compresa fra $y=fx$ ed $y=\psi x$; perciò essa avrebbe colla $y=fx$ un contatto a così dire maggiore di quello che ha nello stesso punto la $y=\psi x$ colla $y=fx$; perciò il contatto può dirsi tanto più intimo, quanto più grande sarà il suo ordine.

361. Teorema II. *Due linee a contatto fra loro si taglieranno o no, secondochè il contatto sarà d' ordine pari o dispari.*

Sieno $y=fx$, $y=\psi x$ due curve aventi tra loro un contatto dell' ordine n; la differenza D di due ordinate prossime al contatto (x_0, y_0) sarà

$$D=f(x_0+h)-\psi(x_0+h)=\frac{h^{n+1}}{1.2...(n+1)}[f^{(n+1)}(x_0+\theta h)-\psi^{(n+1)}(x_0+\theta h)];$$

sia $f^{(n+1)}x_0-\psi^{(n+1)}x_0>0$; se sarà n pari, D sarà positiva o negativa secondochè sarà positiva o negativa h; se sarà n dispari, D sarà sempre positiva; cioè per n pari avremo

$$f(x_0+h)>\psi(x_0+h),\quad f(x_0-h)<\psi(x_0-h)$$

e le due curve si taglieranno; per n dispari avremo

$$f(x_0+h)>\psi(x_0+h),\quad f(x_0-h)>\psi(x_0-h).$$

e le due curve non si taglieranno.

362. Corollario. Una curva è sempre tagliata dal suo circolo osculatore.

X. *La convessità e la concavità delle curve.*

363. Definizione I. Diremo che una curva presenta in un punto dato (x_0, y_0) la sua *convessità* all'asse delle x quando conducendo in tal punto una tangente, la tangente medesima in prossimità di esso, si troverà compresa fra la curva e quell'asse.

364. Definizione II. Diremo che una curva presenta in un punto dato (x_0, y_0) la sua *concavità* all'asse delle x quando conducendo in tal punto una tangente, la curva in prossimità di esso, si troverà compresa fra questa tangente e quell'asse.

365. Scolio. Nel caso della convessità, qualsivoglia ordinata della curva prossima all'ordinata y_0 sarà maggiore dell'ordinata della tangente corrispondente alla medesima ascissa. Nel caso della concavità, qualsivoglia ordinata prossima all'ordinata y_0 sarà minore dell'ordinata della tangente corrispondente alla medesima ascissa.

366. Teorema. *Una curva data dall'equazione* $y = fx$ *presenterà nel punto* (x_0, y_0) *la sua convessità o la sua concavità all'asse delle* x, *secondochè* fx_0 *ed* $f''x_0$ *avranno il medesimo segno o segni contrarj.*

Le espressioni analitiche d'una ordinata della curva e d'una ordinata della tangente corrispondenti all'ascissa $x_0 + h$ sono

$$fx_0 \pm hf'x_0 + \frac{h^2}{2} f''x_0 \dots \pm \frac{h^n}{2.3\dots n} f^{(n)}(x_0 + \theta h)\,; \quad fx_0 \pm hf'x_0;$$

di qui vedesi che la differenza D delle due ordinate è data da

$$D = \frac{h^2}{2} f''x_0 \pm \frac{h^3}{2.3} f'''x_0 + \frac{h^4}{2.3.4} f^{\text{IV}}x_0 \dots \pm \frac{h^n}{2.3\dots n} f^{(n)}(x_0 + \theta h)\,;$$

e siccome può la h prendersi sì piccola che il primo termine avanzi la somma di tutti i susseguenti, perciò è manifesto che D sarà positiva o negativa secondochè sarà positiva o negativa $f''x_0$. Ciò avviene per fx_0 positiva, vale a dire per tutti i punti della curva situati nella regione delle ordinate positive. Per

fx_0 negativa, cioè pei punti situati nella regione delle ordinate negative avverrebbe il contrario; D sarebbe positiva o negativa secondochè fosse negativa o positiva $f''x_0$. Ma quando D è positiva la curva presenta nel punto (x_0, y_0) la sua convessità all'asse delle x, e quando è negativa presenta la concavità; dunque rimane dimostrato l'asserto teorema.

367. Scolio. Se fosse $f''x_0 = 0$ e non fosse $f'''x_0 = 0$, la curva in prossimità del punto (x_0, y_0) non sarebbe tutta dalla medesima parte della tangente, ma tagliata da essa. Se poi fosse ad un tempo $f''x_0 = 0$, $f'''x_0 = 0$, allora la curva presenterebbe nel punto (x_0, y_0) la sua convessità o la sua concavità all'asse delle x, secondochè fx_0 ed $f^{\text{IV}}x_0$ avessero il medesimo segno o segni contrarj. Se riuscisse nulla $f^{\text{IV}}x_0$ dovrebbe pure esser nulla $f^{\text{V}}x_0$, e così di seguito.

XI. *Le derivate e i differenziali dell' arco, e dell' area di una curva piana.*

368. Problema I. *Trovare la derivata e il differenziale di un' arco essendo data l' equazione* $y = \varphi x$ *della curva di cui esso è parte.*

L' arco sia $CM = s$ (fig. 5). Immaginando che l' ascissa OP si accresca della quantità $PP' = h$, l' arco si accrescerà della quantità $MM' = \Delta s$; dobbiamo adunque considerare l' arco s come una funzione Fx della x. La derivata e il differenziale richiesti dal problema altro non sono che la derivata ed il differenziale della Fx. Supporremo che da M a M' le ordinate della curva vadano crescendo al crescere della ascissa: condurremo la corda MM', la retta MQ parallela all' asse delle x, ed una tangente alla curva nel punto M; avendo cura di prolungarla finchè incontri l' ordinata del punto M'. Si osservi che l' arco MM' è una media fra la corda MM' e la linea spezzata $ML + LM'$;

$$MM' = \sqrt{(\overline{MQ}^2 + \overline{M'Q}^2)} = h\sqrt{[1 + (y' + \tfrac{1}{2}y''h + \ldots)^2]}$$

$$LQ = MQ \operatorname{tang} LMQ = hy',\ ML = \sqrt{(\overline{MQ}^2 + \overline{LQ}^2)} = h\sqrt{(1 + y'^2)}$$

$$LM' = LQ - M'Q = -\frac{1}{2}y''h^2 - \frac{1}{6}y'''h^3 - \ldots,$$

$$\Delta s = M\left\{h\sqrt{[1+(y'+\tfrac{1}{2}y''h+\ldots)^2]},\ h\sqrt{(1+y'^2)}-\tfrac{1}{2}y''h^2-\ldots\right\},$$

$$\frac{F(x+h)-Fx}{h} = M\left\{\sqrt{[1+(y'+\tfrac{1}{2}y''h+\ldots)^2},\ \sqrt{(1+y'^2)}-\tfrac{1}{2}y''h^2-\ldots\right\};$$

passando ai limiti

$$F'x = \sqrt{(1+y'^2)}, \qquad s' = \sqrt{(1+y'^2)}; \tag{1}$$

moltiplicando per dx sarà

$$ds = \sqrt{(dx^2+dy^2)}; \tag{2}$$

$y' = \varphi' x = \dfrac{d\varphi x}{dx}$ è data dalla equazione della curva.

369. **Problema II.** *Trovare la derivata e il differenziale dell'area d'una curva piana* $y = \varphi x$.

Dicesi *area* d'una curva piana l'estensione compresa da un arco di essa, le ordinate corrispondenti alle estremità di questo arco, e l'asse delle ascisse. Poniamo mente all'area $CMP = t$: se l'ascissa si accrescerà della quantità $PP' = h$, siffatta area si accrescerà della quantità $MPP'M' = \Delta t$; dunque l'area t deve considerarsi come una funzione fx della x. La derivata e il differenziale richiesti dal problema altro non sono che la derivata e il differenziale della fx. Supporremo come sopra che da M a M' le ordinate della curva vadano crescendo al crescere dell'ascissa; e condurremo la retta $M'N$ parallela all'asse delle x prolungandola fino all'incontro dell'ordinata del punto M anch'essa prolungata. Si osservi che l'area $MPP'M'$ è una media fra i due rettangoli $MPP'Q$, $NPP'M'$. Ora

$$MPP'Q = hy,\ NPP'M' = h\,(y+y'h+\tfrac{1}{2}y''h^2+\ldots);$$

$$\Delta t = M\left\{hy,\quad h(y+y'h+\tfrac{1}{2}y''h^2+\ldots)\right\};$$

$$\frac{f(x+h)-fx}{h} = M\left\{y,\qquad y+y'h+\tfrac{1}{2}y''h^2+\ldots\right\};$$

passando al limite

$$f'x = y, \qquad t' = y; \tag{3}$$

moltiplicando per dx sarà

$$dt = ydx.$$

L'espressione analitica di y è data dalla equazione della curva.

XII. L' angolo di contingenza, e la curvatura degli archi.

370. Definizione. *Angolo di contingenza* dicesi quell'angolo che formano fra loro due tangenti consecutive d'una curva.

371. Principio. Sieno M, M'(fig. 6) due punti d'una curva; $MD, M'E$ le tangenti condotte per questi punti; $MO, M'O$ le corrispondenti normali; $ECD = \tau$ sarà l'angolo che fanno fra loro le due tangenti stesse ovvero le due normali. Ora osservando che

$$ECD = 180^\circ - CDE - CED = M'Ex - MDx,$$

conchiuderemo che l'angolo delle due tangenti o delle due normali esprime l'accrescimento dell'angolo MDx che la tangente fa coll'asse delle x, corrispondente all'accrescimento dell'ascissa. Avremo adunque

$$\tau = \Delta t.$$

372. Scolio I. Osservando che tang $t = y'$, avremo

$$t = \text{ar. tang}\, y', \qquad dt = \frac{y''dx}{1 + y'^2};$$

or quando dx sia quantità infinitamente piccola, stante quel che dicemmo al n. 100, potrà Δt considerarsi come uguale a dt.

373. Scolio II. Osservando poi che

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2},$$

sarà (n. 355) $$\frac{ds}{dt} = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = r; \qquad (1)$$

e quindi $$dt = \frac{ds}{r};$$

s'inferisce da ciò che *in ogni curva l'angolo di contingenza corrispondente all'accrescimento infinitamente piccolo dell'ascissa è dato dal differenziale dell'arco diviso pel raggio.*

374. Scolio III. Rispetto alla curva circolare avremo ancora

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{r};$$

il che può dimostrarsi geometricamente nel seguente modo.

Sia r il raggio del circolo; s l'arco AM (fig. 7), $\Delta s = MM'$ l'accrescimento di questo arco dipendente dall'accrescimento Δx dell'ascissa; osservando che le due normali s' incontrano nel centro del circolo sarà

$$MOM' : 1 :: \Delta s : r$$

ovvero

$$MOM' = \Delta t = \frac{\Delta s}{r};$$

come appunto dovevasi trovare.

Ponendo questa equazione sotto la forma

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta x},$$

e passando ai limiti, or che r è costante, avremo come sopra.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{r} \cdot \frac{ds}{dx}, \quad dt = \frac{ds}{r},$$

375. Definizione II. Un arco si dice avere tanto maggiore curvatura quanto più differisce dalla linea retta. Di due archi della medesima lunghezza il più curvo è quello che più si allontana dalla sua corda, o dalla tangente condotta pel mezzo di esso.

376. Principio II. Sia $s = AM$ (fig. 8) un arco di circolo; r il raggio; $\Delta s = MM'$; l'arco $M'MM''$ è compreso fra la corda $M'M''$ e la tangente KK'', le quali sono due rette parallele; MR cioè la parte del raggio compresa fra il punto di contatto e la corda misura adunque la quantità di cui l'arco si allontana dalla corda e dalla tangente; poniamo $MR = K$; K sarà la misura della curvatura dell'arco $M'MM''$.

Ora

$$K = r(1 - \cos \Delta t) = r\left(1 - \cos \frac{\Delta s}{r}\right);$$

di qui si vede che supponendo Δs costante K cresce o decresce secondochè decresce o cresce r; dunque *la curvatura d'un arco di circolo varia in ragione inversa del suo raggio, ed è proporzionale perciò alla frazione* $\frac{1}{r}$.

377. Corollario. Poichè $r = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ed $\frac{1}{r} = \frac{\Delta t}{\Delta s}$, si conchiude

che *la curvatura di un arco di circolo è uguale al rapporto dell' angolo compreso dalle due tangenti estreme di questo arco, alla lunghezza dell' arco stesso.*

Notisi che crescendo s, potrà t crescere o decrescere, dunque in generale sarà

$$\frac{1}{r} = \pm \frac{\Delta t}{\Delta s}; \tag{2}$$

e siccome $\frac{1}{r}$ in quantochè serve di misura alla curvatura dell' arco è una quantità essenzialmente positiva, avremo

$$\frac{1}{r} = \frac{\Delta t}{\Delta s};$$

quando al crescere o decrescere di s crescerà o decrescerà t; avremo poi

$$\frac{1}{r} = -\frac{\Delta t}{\Delta s};$$

allorquando viceversa al crescere o decrescere di s, decrescerà o crescerà t.

378. Scolio I. La curvatura della circonferenza è in tutti i suoi punti la stessa; difatti il rapporto $\frac{\Delta t}{\Delta s}$ supponendo che l' arco s varii per gradi uguali (cioè che rimanga costante Δs) non muta. Ciò non può dirsi delle altre curve; stantechè l' angolo di contingenza cambia, generalmente parlando, da punto a punto. Certo è per altro che la curvatura d' una linea qualunque benchè varii continuamente in tutta l' estensione di essa si potrà determinare paragonandola di punto in punto ad una linea uniforme la cui curvatura possa agevolmente misurarsi. Questa linea che dee servire di termine di confronto è necessariamente la circonferenza del circolo. Stabiliremo adunque che la curvatura d'un arco in prossimità d' un punto M dato, sia indicata e debba considerarsi come uguale alla curvatura di quella circonferenza che meno d' ogni altra si allontana dai punti prossimi ad H. Or la sola circonferenza che soddisfà a tal condizione è quella del circolo osculatore; imperocchè essa di tutte le circonferenze è quella che ha il più intimo contatto colla curva, ed è tale ancora che fra essa e la curva medesima non potrebbe passare alcun' altra circonferenza. Per

siffatte ragioni il raggio del circolo osculatore corrispondente ad un punto M della curva si chiama *raggio di curvatura* della curva data nel punto M, ed il centro di questo circolo *centro di curvatura;* anco il circolo stesso può chiamarsi *circolo di curvatura.*

379. Scolio II. In appresso rappresenteremo il raggio del circolo osculatore, ossia il raggio di curvatura, corrispondente al punto (x_0, y_0) della curva $y=fx$, colla lettera ρ; perlochè sarà

$$\rho=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}=\frac{(1+f'x_0^2)^{\frac{3}{2}}}{f''x_0}. \qquad (3)$$

380. Scolio III. Osservando che $N=y\sqrt{1+y'^2}$, $s'=\sqrt{1+y'^2}$ (n. 342, 368), e facendo $y'=\operatorname{tang} t$, la formula (3) darà

$$\rho=\frac{s'^3}{y''},\quad \rho=\frac{N^3}{y^3y''},\quad \rho=\frac{\sec^3 t}{y''},\quad \rho=\frac{1}{y''\cos^3 t}. \qquad (4)$$

Queste formule si usano nel caso che la x sia la variabile indipendente; se la x fosse funzione di qualsivoglia variabile t, allora sarebbe (n. 207, Es. II)

$$\rho=\frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y''-y'x''},\ (5)\qquad \rho=\frac{ds^3}{dxd^2y-dyd^2x}. \qquad (6)$$

E di qui, supponendo s variabile indipendente, cioè $s'=\sqrt{x'^2+y'^2}=0$ che è quanto dire $d(dx^2+dy^2)=0$, avremo (n. 207, Es. IV),

$$\rho=\frac{x'}{y''}=-\frac{y'}{x''},\quad \rho=\frac{dxds}{d^2y}=-\frac{dyds}{d^2x}.$$

381. Scolio IV. Indicando con α, β le coordinate del centro di curvatura d'un punto (x, y) qualunque della curva è manifesto che esse dovranno considerarsi come variabili dipendenti dalla x: nullameno α e β dovranno sempre soddisfare alle due equazioni seguenti (n. 355.);

$$(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2=\rho^2,\ (\alpha-x)dx+(\beta-y)dy=0;$$

dalle quali si ha (*)

(*) È manifesto che dalla equazione $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ si ricava

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{\sqrt{a^2\pm c^2}}{\sqrt{b^2\pm d^2}}.$$

$$\frac{\beta-y}{dx}=-\frac{\alpha-x}{dy}=\frac{\sqrt{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2}}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=\frac{\rho}{ds};$$

di qui poi si ricavanò le due formule

$$\alpha-x=-\frac{dy}{ds}\rho=-y'\frac{\rho}{s'}, \quad (7) \qquad \beta-y=\frac{dx}{ds}\rho=\frac{\rho}{s'}; \quad (8)$$

delle quali ci possiamo servire per determinare le coordinate del centro di curvatura corrispondente ad un punto dato (x, y) della curva. Sostituendo il valore di ρ (n. 379), avremo pure

$$\alpha-x=y'\frac{s'^2}{y''}, \quad (9) \qquad \beta-y=\frac{s'^2}{y''}. \quad (10)$$

382. Scolio V. Dicasi a l'angolo che il raggio ρ fa coll'asse delle x dalla parte delle x positive, b quello che esso fa coll'asse delle y dalla parte delle y positive; siccome il raggio è posto sulla normale, avremo (n. 336)

$$\text{tang}\, a=-\frac{dx}{dy}, \quad \cos a=\pm\frac{dy}{ds} \ (a), \quad \cos b=\pm\frac{dx}{ds}, \ (b)$$

$$\cos^2 a=\frac{dy^2}{ds^2}, \qquad \cos^2 b=\frac{dx^2}{ds^2}.$$

Dalle formule (7) (8) si ha

$$(\alpha-x)^2=\frac{dy^2}{ds^2}\rho^2, \qquad (\beta-y)^2=\frac{dx^2}{ds^2}\rho^2,$$

dunque
$$\frac{\cos^2 a}{(\alpha-x)^2}=\frac{1}{\rho^2}, \qquad \frac{\cos^2 b}{(\beta-y)^2}=\frac{1}{\rho^2};$$

estraendo la radice per modo che le equazioni abbiano luogo quando ρ è positivo (n. 356), avremo

$$\cos a=\frac{\alpha-x}{\rho}, \qquad \cos b=\frac{\beta-y}{\rho};$$

ora si osservi che essendo, stante le equazioni (7) (8),

$$\frac{\alpha-x}{\rho}=-\frac{dy}{ds}, \qquad \frac{\beta-y}{\rho}=\frac{dx}{ds};$$

avremo necessariamente

$$\cos a=-\frac{dy}{ds}, \quad (11) \qquad \cos b=\frac{dx}{ds}; \quad (12)$$

così il segno dei coseni di a e b cessa di essere indeterminato come lo era nelle formule (a) (b).

383. Scolio VI. Siccome le coordinate α, β del centro di curvatura debbono soddisfare alle equazioni (n. 381)

$$(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2=\rho^2 \qquad (c)$$

$$(\alpha-x)\,dx+(\beta-y)\,dy=0\,, \qquad (d)$$

moltiplicando l'equazione (7) per d^2x, la (8) per d^2y e sommando i due risultati, conchiuderemo (dopo avere sostituito il valore di ρ dato dalla (6)) che le coordinate medesime debbono soddisfare eziandio alla seguente;

$$(\alpha-x)\,d^2x+(\beta-y)d^2y-dx^2-dy^2=0\,; \qquad (e)$$

la quale può mettersi altresì sotto la forma

$$(\alpha-x)\frac{d^2x}{ds^2}+(\beta-y)\,\frac{d^2y}{ds^2}=1\,.$$

Giova osservare che le due equazioni (d) (e), potrebbero ugualmente ottenersi differenziando due volte la (c) nella ipotesi di α, β, ρ costanti. Queste equazioni medesime sostituendovi i valori di y, dx, dy, d^2x, d^2y tratti dalle equazioni della curva $y=fx$, si ridurranno a tre equazioni fra α, β, ρ, x; quindi serviranno ad esprimere ρ, α, β in funzione di x.

Ad avere α, β in funzione di x bastano le due equazioni (d) (e); queste equazioni sono adunque sufficienti a mostrare i cangiamenti di situazione cui va soggetto il centro di curvatura al variare della x. che è quanto dire al variare della situazione del punto $M(x,y)$ sulla curva data $y=fx$. È chiaro che se questo punto si muoverà sulla curva $y=fx$ in un modo continuo e la percorrerà tutta, il punto (α,β) cioè il centro di curvatura, descriverà una curva continua la quale sarà il *luogo geometrico* di tutti i centri della curva $y=fx$: questa nuova curva fu detta dall'Huygens *evoluta* della curva proposta. La curva cui si riferisce una data evoluta si dice *evolvente*.

384. Corollario I. Ad avere l'equazione della evoluta basterà determinare la relazione analitica di α con β; la quale si otterrà eliminando la x dalle due equazioni (d) (e). Or non potendosi effettuare questa eliminazione finchè l'equazione della evolvente rimane indeterminata e sotto la forma $y=fx$, terremo che l'evoluta sia espressa dalla equazione $\beta=\psi\alpha$, oppure dalle equazioni (d) (e) prese insieme; nelle quali α, β, perchè sono

quantità che variano al variare della x si dovranno considerare come funzioni di x.

385. Corollario II. Frattanto è manifesto che le coordinate α, β dovendo soddisfare alle equazioni (c) (d) (e), soddisfaranno eziandio alle loro equazioni differenziali. Ora differenziando le prime due nell'ipotesi che α, β, ρ, y sieno funzioni della x, e che la x, per maggiore generalità, sia anch'essa funzione di alcun'altra variabile, e sopprimendo dipoi i termini che si elidono in virtù della 2ª e della 3ª, si ottiene

$$(\alpha - x)\, d\alpha + (\beta - y)\, d\beta = \rho d\rho, \qquad (f)$$

$$d\alpha dx + d\beta dy = 0\,;$$

e di qui $\qquad 1 + \beta'_\alpha y'_\alpha = 0, \quad 1 + \psi'\alpha f'x = 0\,;$

indicando con (x_1, y_1) un punto della curva $y = fx$, e con (α_1, β_1) il corrispondente centro di curvatura sarà

$$1 + \psi'\alpha_1 f'x_1 = 0\,.$$

Questa è la condizione che si esige affinchè due rette che fanno coll'asse delle x tali angoli da avere $f'x_1$, $\psi'\alpha_1$ per tangenti trigonometriche, sieno perpendicolari fra loro; or le rette che formano siffatti angoli coll'asse delle x sono l'una tangente alla curva $y = fx$ nel punto (x_1, y_1), l'altra tangente alla curva $\beta = \psi\alpha$ nel punto (α_1, β_1), dunque *la tangente alla evoluta nel punto* (α_1, β_1) *risulta normale alla evolvente nel punto corrispondente* (x_1, y_1); conseguentemente *la normale alla curva* $\beta = \psi\alpha$ *nel punto* (α_1, β_1) *e la tangente alla sua evolvente* $y = fx$ *nel punto* (x_1, y_1), *sono parallele fra loro.*

386. Corollario III. Or l'equazione (d), quando si rifletta che $\frac{dy}{dx} = -\frac{d\alpha}{d\beta}$, diventa $(\alpha - x)\, d\beta - (\beta - y)\, d\alpha = 0$; dunque (V. p. 233, nota)

$$\frac{d\alpha}{\alpha - x} = \frac{d\beta}{\beta - y} = \frac{(\alpha - x)d\alpha + (\beta - y)d\beta}{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2} = \frac{\pm\sqrt{d\alpha^2 + d\beta^2}}{\rho}\,.$$

Indicando con S un arco della evoluta compreso fra un punto fisso ed il punto mobile (α, β), sarà

$$dS^2 = d\alpha^2 + d\beta^2\,;$$

e quindi la suddetta equazione diverrà

$$\frac{\rho d\rho}{\rho^2} = \pm \frac{dS}{\rho};$$

cosicchè avremo $$d\rho = \pm dS;$$

ponendo $\rho = \xi x$, $S = \varphi x$, avremo altresì

$$\xi' x dx = \pm \varphi' x \, dx, \qquad \xi' x = \pm \varphi' x;$$

donde si vede che la derivata di ξx è uguale alla derivata di φx qualunque sia x: conseguentemente

$$\xi' (x + \theta \Delta x) = \pm \varphi'(x + \theta \Delta x),$$

la quale equazione porta a stabilire la seguente (n. 58)

$$\xi (x + \Delta x) - \xi x = \pm (\varphi (x + \Delta x) - \varphi x)$$

ovvero $$\Delta \xi x = \pm \Delta \varphi x$$

dunque $$\Delta \rho = \pm \Delta S;$$

dunque crescendo la x di Δx, l'accrescimento ΔS dell'arco è uguale all'accrescimento corrispondente $\Delta \rho$ del raggio di curvatura; dunque *un arco della evoluta è uguale (prescindendo dai segni) alla differenza dei raggi di curvatura corrispondenti alle sue estremità.*

XIII. Gli Asintoti delle curve piane.

387. Definizione. *Asintoto* d'una curva piana dicesi ogni retta cui può questa curva medesima approssimarsi indefinitamente senza mai incontrarla.

388. Principio. Sia $y = fx$ l'equazione d'una curva; $y = Ax + B$ l'equazione d'una linea non parallela all'asse della y; consegue alla definizione premessa che se la differenza delle ordinate fx, $Ax + B$ corrispondenti costantemente alla medesima ascissa potrà per valori grandissimi di x riuscire più piccola di qualunque quantità data, la retta $y = Ax + B$ sarà un' asintoto della curva $y = fx$. Dicasi α una quantità capace di decrescere indefinitamente a misura che x cresce; posto che l'asintoto esista avremo

$$fx - Ax - B = \pm \alpha$$

$$fx = Ax + B \pm \alpha;$$

per cui l' equazione della curva diventerà

$$y = Ax + B \pm \alpha; \tag{1}$$

dunque esisterà un asintoto almeno, ogniqualvolta l' equazione della curva sarà capace di prendere la forma

$$y = Ax + B \pm \alpha.$$

389. Corollario. Ad ottenere l' equazione dell' asintoto bisogna determinare A e B. Or l' equazione (1) ci dà

$$A = \frac{y}{x} - \frac{B}{x} \mp \frac{\alpha}{x};$$

facendo $x = \pm \infty$, avremo $\frac{B}{x} = 0$, $\frac{\alpha}{x} = 0$: potrebbe $\frac{B}{x}$ non esser zero quando fosse $B = \infty$; ma questo valore di B si esclude perchè se l'ordinata all'origine dell' asintoto fosse infinita l'asintoto non esisterebbe; dunque avremo

$$A = \int_{x=\infty} \frac{y}{x}.$$

Trovata a, dalla equazione (1) avremo

$$B = y - Ax \mp \alpha,$$

ovvero

$$B = \int_{x=\infty} (y - ax).$$

Dunque 1° se l' equazione della curva sarà $y = fx$, ad avere A cercheremo il valore che acquista la frazione $\frac{fx}{x}$, quando $x = \pm \infty$; ad aver B cercheremo il valore della quantità $fx - Ax$ nella medesima ipotesi di $x = \pm \infty$.

2° Se l' equazione della curva sarà $\varphi(x, y) = 0$, ad avere A porremo $\frac{y}{x} = v$, cioè sostituiremo vx ad y e cercheremo il valore che acquista v quando $x = \pm \infty$; ad aver B porremo $y - Ax = w$, cioè sostituiremo nella equazione $\varphi(x, y) = 0$, $w + Ax$ ad y (dopo avere posto in φ il valore trovato di A), e cercheremo il valore di w nella ipotesi di $x = \pm \infty$; ad ogni sistema di valori per A e B corrisponderà un asintoto.

Esempio I. La *logaritmica*. $y = a^x, x = \mathrm{L}\,y$.

Facendo $x = -\infty$, si ha

$$A = \int_{x=-\infty} \frac{a^x}{x}, \quad A = 0,$$

$$B = \int_{x=-\infty} (a^x - Ax) = \int_{x=-\infty} a^x; \quad B = 0.$$

Così l'asintoto avrà per equazione $y = 0$, cioè sarà l'asse delle ascisse.

Esempio II. L'*iperbola*. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1, \quad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2};$$

$$A = \pm \frac{b}{a} \int_{x=\infty} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \pm \frac{b}{a} \int_{t=0} \sqrt{1 - a^2t^2} = \pm \frac{b}{a}$$

$$B = \pm \frac{b}{a} \int_{x=\infty} [\sqrt{(x^2 - a^2)} - x] = \pm \frac{a}{b} \int_{t=0} \frac{\sqrt{(1 - a^2t^2)} - 1}{t} = 0;$$

esistono adunque due asintoti rappresentati dalla equazione

$$y = \pm \frac{b}{a} x,$$

e passano ambedue per l'origine degli assi.

390. Scolio I. Facendo $x = \infty$ il rapporto $\frac{fx}{x}$ prenderà il più delle volte la forma $\frac{\infty}{\infty}$; il suo valor vero sarà adunque quello che riceve $f'x$ per $x = \infty$; dunque

$$A = \int_{x=\infty} f'x, \qquad B = \int_{x=\infty} (fx - xf'x),$$

ovvero $\qquad A = y'_0, \quad B = y_0 - y'_0 x_0,$

indicando con x_0, y_0, y'_0 i valori di x, y, y' quando si fa $x = \infty$. Sostituendo questi valori di A e B nella equazione $y = Ax + B$, essa diventerà $\qquad y - y_0 = y'_0(x - x_0);$

questa è l'equazione della tangente che tocca la curva $y = fx$

nel punto (x_0, y_0); dunque l'asintoto d'una curva si può considerare come una tangente che tocca questa curva medesima in un punto situato ad una distanza infinita dall'origine.

391. Scolio II. Supponiamo che l'equazione $\varphi(x, y) = 0$ della curva possa prender la forma

$$F(x, y) + f(x, y) + \psi(x, y) \ldots = 0;$$

cioè che dessa possa risolversi in più parti ciascuna delle quali sia una funzione omogenea delle variabili x, y; la 1ª $F(x, y)$ del grado m, la 2ª $f(x, y)$ del grado n, la 3ª $\psi(x, y)$ del grado p, ec.; e supponiamo inoltre $m > n > p \ldots$ l'equazione stessa potrà sempre mettersi sotto la forma

$$x^m F\left(\frac{y}{x}\right) + x^n f\left(\frac{y}{x}\right) + x^p \psi\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots = 0;$$

facendo $\frac{y}{x} = v$ avremo

$$x^m Fv + x^n fv + x^p \psi v + \ldots = 0,$$

ovvero $$Fv + x^{n-m} fv + x^{p-m} \psi v \ldots = 0;$$

e per $x = \infty$ otterremo $Fv = 0$ ovvero $FA = 0$;

ogni radice reale di questa equazione sarà un valore di A.

Ad ottener B pongasi $y - Ax = w$, $y = Ax + w$; avremo

$$x^m F\left(A + \frac{w}{x}\right) + x^n f\left(A + \frac{w}{x}\right) + x^p \psi\left(A + \frac{w}{x}\right) + \ldots = 0;$$

ma $$F\left(A + \frac{w}{x}\right) = FA + \frac{w}{x} F'\left(A + \frac{\theta w}{x}\right),$$

dunque, porchè $FA = 0$, sarà

$$w x^{m-1} F'\left(A + \frac{\theta w}{x}\right) + x^n f\left(A + \frac{w}{x}\right) + x^p \psi\left(A + \frac{w}{x}\right) + \ldots = 0,$$

$$wF'\left(A + \frac{\theta w}{x}\right) + x^{n-(m-1)} f\left(A + \frac{w}{x}\right) + x^{p-(m-1)} \psi\left(A + \frac{w}{x}\right) + \ldots = 0;$$

facendo $x = \infty$, e supponendo che $F'A$, fA non sieno nulle nè infinite, avremo

$$wF'A + fA = 0 \quad \text{se sarà} \quad n = m - 1,$$
$$wF'A = 0 \quad \text{se sarà} \quad n < m - 1,$$
$$wF'A = \infty \quad \text{se sarà} \quad n > m - 1;$$

nelle quali equazioni w dee cangiarsi in B, perchè tale si è il suo valore allorquando x è infinito; dunque

1° Per $n = m - 1$, avremo $B = -\frac{fA}{F'A}$.

L'equazione dell'asintoto sarà

$$y = Ax - \frac{fA}{F'A};$$

A essendo data dalla equazione $FA = 0$.

Rappresentando con $y = Ax$ una retta che passi per l'origine parallela all'asintoto, avremo

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = 0, \qquad x^m F\left(\frac{y}{x}\right) = 0;$$

dunque la funzione omogenea del grado m uguagliata a zero darà in questo caso una equazione rappresentante tutte le rette parallele agli asintoti.

2° Per $n < m - 1$, avremo $B = 0$.

L'equazione dell'asintoto sarà $y = Ax$;

A essendo data dalla equazione $FA = 0$; qui pure avremo

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = 0, \qquad x^m F\left(\frac{y}{x}\right) = 0;$$

in tal caso gli asintoti passeranno tutti per l'origine, e saranno compresi nella equazione che si ottiene uguagliando a zero la funzione omogenea del grado m.

3° Per $n > m - 1$, avremo $B = \infty$. L'asintoto, che questo risultato pone ad una distanza infinita dall'origine, non esiste.

ESEMPIO I. Il *folium* di Cartesio $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

Sarà $$x^m F\left(\frac{y}{x}\right) = x^3\left(1 + \frac{y^3}{x^3}\right);$$

dunque l'asintoto sarà parallelo alla retta $x^3 + y^3 = 0$ ovvero $x + y = 0$, cioè ad AB (fig. 9) che passa per l'origine e taglia in parti uguali l'angolo compreso fra il semi-asse delle x positive e il semi-asse delle y negative.

$$FA = 1 + A^3 = 0, \qquad A = -1, \qquad F'A = 3A^2 = 3,$$

$$fA = -3a\frac{y}{x} = -3aA = 3a, \qquad B = -\frac{fA}{F'A} = -a.$$

L'equazione dell'asintoto sarà $y = -x - a$; facendo l'ordinata

all'origine $OC = a$, la retta condotta pel punto C parallela ad AB sarà l'asintoto stesso.

Esempio II. Rispetto alle curve comprese nella equazione

$$ay^2 + bxy + cx^2 + ey + gx + h = 0,$$

sarà $FA = aA^2 + bA + c = 0$, $\quad A = -\dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

$$F'A = 2aA + b, \qquad 2aA + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac},$$

$$fA = eA + g, \qquad B = -\frac{eA + g}{2aA + b}.$$

L'equazione data sappiamo rappresentare l'ellisse, l'iperbola, o la parabola secondochè $b^2 - 4ac$ è minore, maggiore, o uguale allo zero; nel caso della ellisse A diverrebbe immaginaria, nel caso della parabola B diverrebbe infinita; dunque delle curve comprese nella equazione generale del 2° grado, solo l'iperbola ammette asintoti e ne ha due; i quali corrispondono ai due valori di A. Tali asintoti sono dati dalla equazione $y = Ax - \dfrac{eA + g}{2aA + b}$.

392. Scolio III. La regola esposta al n. 389 quando si cangi x in y e viceversa, serve pure a determinare gli asintoti non paralleli all'asse delle x.

XIV. *I punti singolari delle curve piane.*

393. Definizione I. Diconsi *curve algebriche* tutte le curve comprese nella equazione

$$y^m + (a + bx)\, y^{m-1} + (c + dx + ex^2)\, y^{m-2} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots (p + qx + rx^2 \ldots + ux^m)\, y^0 = 0.$$

394. Scolio I. Le curve algebriche si dividono in *ordini*; l'ordine d'una curva è dato dal grado della sua equazione.

La partizione delle curve algebriche in più ordini non sarebbe esatta se cangiando gli assi ortogonali il grado della equazione d'una curva cambiasse. Or questo cambiamento di grado non può avvenire giammai, perchè le espressioni analitiche che si pongono nella funzione in luogo di x e di y all'oggetto di mutare gli assi sono espressioni lineari, per le quali il grado della funzione medesima non può abbassarsi nè inalzarsi. Questo ci assicura che la divisione delle curve algebriche in ordini è voluta dalla natura stessa delle equazioni.

395. Scolio II. Per altro siffatta divisione non è la sola che si faccia tra le curve algebriche; perocchè per ogni ordine si fanno altresì più classi o generi, e dei generi più specie, secondo la natura delle curve che si ottengono pei valori particolari dei coefficienti a, b, c, d, ec. Le linee del 1° ordine si riducono alla linea retta. Le linee del 2° ordine fanno luogo a tre generi diversi di curve, i quali sono l'ellisse, la parabola e l'iperbola.

L'enumerazione delle linee del 3° ordine si fece primieramente dal Newton, il quale seppe rinvenire nella equazione generale del terzo grado tra le coordinate x, y quattordici generi di linee che comprendono settantadue specie o famiglie diverse di curve. Lo Stirling tenendo ferme le quattordici classi principali del Newton aggiunse quattro specie; dipoi due ne aggiunse il Cramer; cosicchè si contano di presente settantotto specie diverse di linee del 3° ordine.

396. Scolio III. L'equazione generale d'un certo grado comprende non solo le linee dell'ordine indicato dal grado medesimo; comprende quelle altresì degli ordini inferiori. Per esempio l'equazione del secondo grado $(Ay+Bx+C)(Dy+Ex+F)=0$, sarà verificata da tutti que' valori di x e di y che soddisfanno alle equazioni $Ay+Bx+C=0$, $Dy+Ex+F=0$, le quali rappresentano due linee rette; dimanierachè l'equazione proposta non appartiene propriamente parlando ad una linea del 2° ordine, ma bensì a due linee del 1°, cioè a due linee rette. L'equazione del terzo grado $(Ay+Bx+C)(Dy^2+Ex^2+F)=0$ comprende una linea del 1° ordine, la cui equazione è $Ay+Bx+C=0$, ed una linea del 2°, data dalla equazione $Dy^2+Ex^2+F=0$. L'equazione del 2° grado $y^2+x^2-2by-2ax+b^2+a^2=0$, la quale si può mettere sotto la forma $(y-b)^2+(x-a)^2=0$ non potendo essere verificata che dai valori $x=a, y=b$ (esclusi gl'immaginarj) rappresenta un punto di cui a, b sono le coordinate. L'equazione del secondo grado $x^2+y^2=0$, la quale si risolve nelle due $x=0, y=0$, rappresenta anch'essa un punto che coincide coll'origine degli assi coordinati.

397. Teorema I. *Una linea retta non può incontrare una curva algebrica dell'ordine* m *in più di* m *punti.*

Prendasi la retta di cui si tratta per asse della x; la sua equazione sarà $y=0$; l'equazione della curva sia $\varphi(x, y)=0$. Le coordinate de' punti dove due curve s'incontrano debbono soddisfare a un tempo alla equazione dell'una ed a quella dell'al-

tra; dunque tanti saranno i punti d'incontro della retta colla curva quante sono le radici reali della equazione in cui si muterà $\varphi(x, y) = 0$ facendo $y = 0$; queste radici medesime saranno le ascisse dei punti d'incontro. Or l'equazione che si ottiene facendo $y = 0$ sarà al più del grado m; dunque x potrà avere al più m valori reali.

398. Corollario. Una linea del 1° ordine non può essere incontrata da una linea retta in più d'un punto; e siccome non v'ha alcuna curva cui sia dato godere di siffatta proprietà, perciò qualunque linea del 1° ordine è forza che sia una linea retta.

399. Definizione II. Diconsi *curve trascendenti* tutte quelle curve le quali si trovano rappresentate da equazioni trascendenti.

400. Scolio I. Delle curve trascendenti non può farsi alcuna generale divisione, stantechè non possono comprendersi tutte in una sola equazione come si fa rispetto alle curve algebriche.

401. Scolio II. In ogni curva debbono principalmente considerarsi due cose; 1° la sua qualità di curva *finita* o *infinita*; 2° i *punti singolari* che presenta nel suo andamento.

402. Definizione III. Una curva è finita in due casi; 1° quando essa è curva rientrante come l'ellisse, 2° quando non essendo rientrante ha le sue estremità determinate e fisse.

403. Definizione IV. Una curva è *infinita* allorquando alcun ramo di essa si estende indefinitamente seguendo una legge data; in virtù della quale questo ramo non può giammai incontrare un limite che ne arresti il corso.

404. Definizione V. Un punto d'una curva prende il nome di punto *singolare* allorquando indipendentemente dalla situazione degli assi, gode di alcuna proprietà non comune agli altri punti di essa. Punti singolari sono i *punti di fermata*, i *punti angolari*, i *punti di flesso contrario*, i *punti multipli*.

405. Definizione VI. *Punto di fermata* è ogni punto nel quale un ramo della curva si arresta per non proseguire oltre.

406. Definizione VII. *Punto angolare* è ogni punto nel quale due rami di una curva si riuniscono in guisa da formare un angolo curvilineo. I punti angolari sono di due generi; alcuni sono *punti salienti*, altri *punti di regresso*.

407. Definizione VIII. *Punto saliente* è quello nel quale

s' incontrano due rami d'una curva in modo da avere nel punto medesimo due diverse tangenti.

408. Definizione IX. *Punto di regresso* è quello nel quale s'incontrano due rami d'una curva in modo da avere nel punto medesimo una comune tangente.

409. Definizione X. Il punto di regresso dicesi poi *punto di regresso di prima specie* o *punto di regresso di seconda specie* secondochè la tangente passa fra i due rami, o li lascia ambedue da una medesima parte.

410. Definizione XI. *Punto di flesso contrario* è ogni punto nel quale una curva *senza fare angolo* cessa di esser convessa per divenir concava o viceversa.

411. Scolio. La tangente condotta pel punto di flesso contrario taglia la curva, perchè la tangente è sempre posta al di fuori della sua convessità. Il punto D della curva EDF (fig. 10) è un punto di flesso contrario; essendochè questa curva non presenta alcun angolo in D, ed osservata dal punto D si mostra da una parte convessa e dall'altra concava (n. 363 e 364).

412. Definizione XII. *Punto multiplo* è ogni punto nel quale i rami d'una curva facendo più giri s' intersecano o si toccano più volte. Il punto multiplo prende il nome particolare di punto *doppio*, *triplo*, *quadruplo*, ec. secondochè la curva s'interseca in questo punto medesimo una volta, due volte, tre volte, ec. O (fig. 9) è un punto *doppio*, H (fig. 11) un punto triplo, ec.

413. Definizione XIII. *Centro* d'una curva dicesi ogni punto che divide in due parti uguali tutte le rette che passano da esso, e che hanno le loro estremità sulla curva.

414. Definizione XIV. Una retta si dirà *diametro* d'una curva quando dividerà in parti uguali una serie di corde parallele.

415. Definizione XV. Il diametro d'una curva prende il nome di *asse* della curva stessa allorquando è perpendicolare alle corde che esso divide per metà.

416. Definizione XVI. *Vertice* d'una curva dicesi ogni punto nel quale essa è incontrata da un suo asse.

417. Scolio. Le sunnotate particolarità delle curve si riscontrano ancora nelle equazioni da cui sono rappresentate; anzi se ne rinvengono altre unicamente dovute a queste equazioni medesime, come risulta dalle cose che passiamo ad esporre.

418. I. Curve continue, e rami infiniti.

1° *La curva rappresentata dalla equazione* $y=fx$ *sarà*

continua fra le ordinate corrispondenti alle ascisse a, b, *allorquando* fx *sarà una funzione continua fra i limiti* x = a, x = b.

2° *Se la funzione* fx *per certi valori di* x *diverrà discontinua, anche nell'andamento della curva si riscontreranno certe interruzioni corrispondenti agl'intervalli che si presenteranno nella successione dei valori reali della funzione.*

Siffatta discontinuità potrà aver luogo in tre casi diversi; i quali sono stati indicati al n. 21.

3° *La curva rappresentata dalla equazione* y = fx *avrà un ramo infinito quando crescendo la* x *in un modo continuo da* x_0 $a + \infty$, o *da* x_0 $a - \infty$ *la* y *varierà in un modo continuo senza acquistare giammai un valore infinito nè immaginario.*

Esempio I. Dalla equazione dell'iperbola riferita agli asintoti $xy = a$, si vede che y si mantiene continua da $x = 0$ ad $x = \pm\infty$; dunque la curva si estende indefinitamente nelle due regioni $[+x, +y]$, $[-x, -y]$. Ma siccome $x = 0$ dà $y = \infty$ si conchiude che l'asse delle y non incontra la curva. Dunque la curva si compone di due rami infiniti distinti e separati fra loro.

Esempio II. Dalla equazione della logaritmica $x^y = e$ si vede che da $x = 0$ ad $x = \infty$, y è continua; da $x = 0$ ad $x = -\infty$, y è immaginaria: da ciò si conchiude che la logaritmica $x^y = e$ ha un ramo infinito nella regione $[+x, +y]$, e che essa non si avanza dalla parte delle x negative.

Esempio III. Dalla equazione $y = \dfrac{ax}{\sqrt{x^2}}$ si vede che da $x = 0$ ad $x = \infty$ si trova $y = a$; da $x = 0$ ad $x = -\infty$ si trova $y = -a$; dunque l'equazione proposta rappresenta una linea a due rami che si estendono indefinitamente nelle regioni $[+x, +y]$, $[-x, -y]$ i quali sono interrotti e separati fra loro dall'asse delle y: in altri termini la proposta rappresenta due linee parallele all'asse delle x (fig. 12), opposte fra loro, l'una situata al di sopra l'altra al di sotto di esso, ad una distanza designata da a.

Esempio IV. Dalla equazione $y = \pm\sqrt{x(x+c)(x-b)}$ si vede che per ogni valore di x compreso fra b e $+\infty$, y riceve due valori uguali e di segno contrario, i quali (prescindendo dal segno) vanno sempre crescendo al crescere della x; ad $x = b$ corrisponde $y = 0$; dunque la curva taglia l'asse delle x ad una distanza $OA = b$ (fig. 13) dall'origine, e si estende indefinitamente nelle due regioni $[+x, +y]$, $[+x, -y]$. Per ogni va-

lòre di x compreso fra 0 e $+b$, y è immaginario; donde si vede che fra l'asse delle y e la perpendicolare inalzata all'estremità dell'ascissa $+b$ non è compresa alcuna parte della curva. Ora si muti x in $-x$; avremo $y=\pm\sqrt{x(c-x)(x+b)}$; di qui risulta che ad ogni valore di x compreso fra 0 e c, la y riceve due valori uguali e di segno contrario; $x=c$ dà $y=0$; $x>c$ dà y immaginario; dunque la curva dalla parte delle x negative è una linea rientrante, tutta compresa fra l'asse delle y e la perpendicolare inalzata alla estremità dell'ascissa $-c$. Dunque l'equazione proposta rappresenta due curve, l'una infinita situata dalla parte delle x positive, l'altra chiusa situata dalla parte delle x negative; le quali curve sono distanti fra loro della quantità c.

419. II. Massima e minima ordinata. Sia $y=fx$ l'equazione della curva; la massima e la minima ordinata si determineranno in quella maniera medesima secondo la quale si determina il massimo o il minimo valore della funzione fx. Risolvendo l'equazione $y=fx$ rapporto ad x potremo trovare altresì la massima o minima ascissa.

Esempio. Dall'equazione dell'ellisse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, si vede che la massima ordinata corrisponde ad $x=0$ ed è uguale $\pm b$, e che la massima ascissa corrisponde ad $y=0$ ed è $\pm a$.

420. III. Tangenti parallele o perpendicolari agli assi. Sia l'equazione della curva $y=fx$; la tangente ad essa curva nel punto (x_0, y_0) sarà parallela o perpendicolare all'asse delle y, secondochè x_0 sarà radice della equazione $f'x=0$, o di $f'x=\infty$. Per determinare siffatte tangenti è d'uopo adunque determinare le radici reali di queste due equazioni.

Esempio. Dalla equazione dell'ellisse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, si rileva che le tangenti nei punti $(\pm a, 0)$ sono parallele all'asse delle y; e le tangenti nei punti $(0, \pm b)$ sono perpendicolari all'asse medesimo.

421. IV. Punti coniugati. Diconsi *punti coniugati* quei punti le cui ordinate soddisfanno alla equazione della curva benchè sieno isolati, cioè non situati sulla curva medesima. Dunque se (x_0, y_0) sarà un punto coniugato della curva $y=fx$, variando l'ascissa d'una quantità piccolissima $\pm h$, le corrispondenti ordinate $f(x_0\pm h)$ saranno ambedue immaginarie. I punti coniugati si debbono anch'essi annoverare tra i punti singolari delle curve.

Esempio I. Abbiasi la curva $y=(x-a)\sqrt{(x-b)}$; $(a, 0)$ sarà un punto coniugato; ove per altro abbiasi $a<b$.

Esempio II. Abbiasi la curva $y = \pm x\sqrt{(x+a)(x-a)}$; l'origine degli assi sarà un punto coniugato.

Esempio III. Sia la curva

$$y = k + \sqrt{x-a} + \sqrt{x-b} + \sqrt{x-c};$$

dove $a < b < c$; essa offrirà i due punti coniugati (a, k), (b, k).

422. V. Punti di fermata. Dalla definizione VI, (n. 405) risulta che se (x_0, y_0) sarà un punto di fermata della curva $y = fx$, variando l'ascissa d'una quantità piccolissima $\pm h$, una delle due corrispondenti ordinate $f(x_0 \pm h)$ risulterà immaginaria.

Esempio I. Sia la curva $y = \pi + (x-a)\sqrt{x-b}$; (b, m) sarà un punto di fermata.

Esempio II. Sia la curva $y = xlx$; l'origine degli assi sarà un punto di fermata.

Esempio III. Sia la curva $y = \sqrt{x-a} + \sqrt{b-x}$ e si supponga $a < b$; i punti $(a, \sqrt{b-a})$ $(b, \sqrt{b-a})$ saranno due punti di fermata; sicchè la curva sarà tutta compresa fra le due ordinate corrispondenti alle ascisse a e b.

423. VI. Punti angolari. Se (x_0, y_0) sarà un punto angolare della curva $y = fx$, dovrà corrispondere a ciascuna delle due ascisse $x_0 + h$, $x_0 - h$ una sola ordinata, e le differenze $f(x_0 + h) - fx_0$, $f(x_0 - h) - fx_0$ dovranno avere il medesimo segno ed esser capaci di diventare piccole quanto si vuole al diminuire di h; oppure se ad una di tali ascisse corrisponderanno due ordinate, esse dovranno esser tali da differire fra loro d'una quantità capace di riuscire piccola quanto vuolsi impiccolendo h.

424. VII. Punti di flesso contrario. Se (x_0, y_0) sarà un punto di flesso contrario della curva $y = fx$. A ciascuna delle ascisse $x_0 + h$, $x_0 - h$ dovrà corrispondere una sola ordinata, e le due differenze $f(x_0 + h) - fx_0$, $f(x_0 - h) - fx_0$ dovranno avere segni contrarj, ed esser capaci di impiccolire indefinitamente all'impiccolire di h; oppure all'ascissa $x_0 + h$ o $x_0 - h$ dovranno corrispondere tre diversi valori di fx convergenti tutti verso fx_0 al convergere verso lo zero di h.

425. VIII. Punti multipli. Se (x_0, y_0) sarà un punto multiplo della curva $y = fx$, all'ascissa $x_0 + h$, o all'ascissa $x_0 - h$, o sì all'una che all'altra, corrisponderanno tre o più valori di fx.

426. Scolio. Le condizioni precedenti relative ai punti singolari possono dirsi *criterj di verificazione*; i seguenti teoremi ci

offrono veramente il mezzo di determinare i punti singolari per mezzo della equazione della curva.

427. Teorema II. *Se un punto* (x_0, y_0) *della curva* $\varphi(x, y) = 0$ *sarà un punto coniugato, o un punto di fermata, oppure un punto angolare, il valore* $\varphi(x_0, y_0)$ *sarà un massimo o un minimo della funzione* $\varphi(x, y)$; *nel supposto per altro che questa funzione si mantenga continua in prossimità dei valori* x_0, y_0 *di* x *ed* y.

Nei tre casi suindicati potremo sempre condurre pel punto (x_0, y_0) quante rette si vogliono tali che non tocchino nè taglino la curva ne' punti prossimi ad (x_0, y_0). Sia $y = ax + b$ una di queste rette: faccia essa un angolo acuto colle x positive;

$$(x_0 - \Delta x, y_0 - \Delta y), (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y),$$

saranno due punti della retta medesima vicinissimi al punto (x_0, y_0) posto fra l'uno e l'altro. I due punti stessi si possono supporre congiunti fra loro mediante una curva che diremo $f(x, y) = 0$ tale che non incontri la curva proposta; ragione per cui le quantità

$$\varphi(x_0 - \Delta x, y_0 - \Delta y) \quad (1) \qquad \varphi(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \quad (2)$$

avranno necessariamente lo stesso segno; infatti (fig. 14) se desse avessero segni contrarj, sostituendo nella funzione $\varphi(x, y)$ tutti i valori di x compresi fra $x_0 - \Delta x$ ed $x_0 + \Delta x$, e i corrispondenti di y tratti dalla equazione $f(x, y) = 0$, la funzione $\varphi(x, y)$ dovrebbe passare per lo zero; ed allora avremmo un sistema di valori per x, y tale da soddisfare ad un tempo alle equazioni $\varphi(x, y) = 0$, $f(x, y) = 0$; sicchè le curve rappresentate da queste equazioni, contro l'ipotesi premessa, s'incontrerebbero. Per altro se nella funzione $\varphi(x, y)$ sostituiremo tutti i valori di x compresi fra $x_0 - \Delta x$ ed $x_0 + \Delta x$ e i corrispondenti di y tratti dalla equazione $y = ax + b$, la funzione $\varphi(x, y)$ passerà certamente per lo zero, e ciò avverrà quando sarà $x = x_0$, e per conseguenza $y = y_0$; stantechè il punto (x_0, y_0) è comune alla retta ed alla curva $\varphi(x, y) = 0$; ora se la quantità $\varphi(x_0, y_0)$ è nulla, le due quantità (1) (2) dovendo avere lo stesso segno saranno ambedue minori o ambedue maggiori di $\varphi(x_0, y_0)$; dunque $\varphi(x_0, y_0)$ sarà un massimo o un minimo della funzione $\varphi(x, y)$; un massimo quando le quantità (1) (2) sieno negative, un minimo quando le quantità stesse sieno positive.

428. Corollario I. Se (x_0, y_0) sarà un punto coniugato, o di fermata, o un punto angolare della curva $u = \varphi(x, y) = 0$,

avremo $$\frac{du}{dx}=0\,,\quad \frac{du}{dy}=0\,.$$

429. Corollario II. Perciò le coordinate d'un punto coniugato, o di fermata, o angolare soddisfaranno alle equazioni

$$u=0\,,\qquad \frac{du}{dx}=0,\qquad \frac{du}{dy}=0\,; \tag{3}$$

dunque se risolvendo due di siffatte equazioni otterremo i valori reali $x=x_0$, $y=y_0$, essi non potranno essere le coordinate di un punto coniugato, o di fermata, o angolare se non soddisfaranno anco alla terza. Soddisfacendo alla terza equazione non dovremo inferire che il punto $(x_0,\, y_0)$ sia di necessità uno dei ricordati punti singolari; perocchè il ragionamento fatto porta solo a conchiudere che se le coordinate x_0 ed y_0 non soddisfacessero alle equazioni (3), il punto $(x_0,\, y_0)$ non potrebbe essere un punto coniugato, nè un punto di fermata, nè un punto angolare.

430. Corollario III. Per determinare la tangente trigonometrica che la tangente alla curva fa coll' asse delle x si ricorre alla derivata del 1° ordine della equazione della curva; ma quando il punto di contatto sarà un punto coniugato, o un punto di fermata o un punto angolare, l'equazione derivata mutandosi in identità non potrà servire altrimenti a questo oggetto. Sarà d'uopo adunque ricorrere alla equazione derivata del 2° ordine, la quale si riduce alla seguente

$$\frac{d^2u}{dy^2}\,y'^2+2\,\frac{d^2u}{dxdy}\,y'+\frac{d^2u}{dx^2}=0\,; \tag{4}$$

da essa si ha il valore di y', cioè

$$\frac{d^2u}{dy^2}\,y'=-\frac{d^2u}{dxdy}\pm\sqrt{\left[\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2-\frac{d^2u}{dx^2}\,\frac{d^2u}{dy^2}\right]}\,, \tag{5}$$

donde emergono i criterj seguenti;

1° Per un punto coniugato non esiste tangente; dunque $(x_0,\, y_0)$ sarà un punto coniugato della curva quando le coordinate x_0, y_0 soddisfaranno alle equazioni

$$\frac{d^2u}{dy^2}=0\,,\qquad \frac{d^2u}{dxdy}=0\,,\qquad \frac{d^2u}{dx^2}=0\,,$$

oppure quando soddisfaranno alla condizione

$$\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2<\frac{d^2u}{dx^2}\,\frac{d^2u}{dy^2}\,;$$

nel 1° caso non sussisterà l'equazione (4), nel 2° i valori di y' diverranno immaginarj.

2° La curva non può avere in un punto di fermata che una sola tangente; sarà d'uopo adunque che per ciascun punto di fermata l'equazione (4) si riduca ad una equazione del 1° grado, ed abbiasi per conseguenza

$$\frac{d^2u}{dy^2}=0;$$

dunque (x_0, y_0) sarà un punto di fermata quando le coordinate x_0, y_0 soddisfaranno a questa equazione.

3° La curva in ciascun punto angolare ha due tangenti; un punto angolare è a dir vero un punto di fermata comune a due rami; ciascun ramo dee adunque avere nel punto di che si tratta la sua tangente. Ora i punti angolari si dividono in due generi cioè in punti salienti e punti di regresso; nei punti salienti le tangenti si tagliano e formano angolo; questo sarà il caso nel quale le due radici della equazione (6) son reali e disuguali; e per conseguenza (x_0, y_0) sarà un punto saliente quando le coordinate x_0, y_0 soddisfaranno alla condizione

$$\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2>\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2u}{dy^2};$$

nei punti di regresso le tangenti coincidono e si confondono in una sola; questo sarà il caso nel quale l'equazione (4) ha le radici uguali; perciò (x_0, y_0) sarà un punto di regresso quando le coordinate x_0, y_0 soddisfaranno alla condizione

$$\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2=\frac{d^2u}{dx^2}\,\frac{d^2u}{dy^2}.$$

È da notare che il punto di regresso sarà della 1ª o della 2ª specie secondochè le differenze $M'P-NP, M''P-NP$ avranno segni contrarj o lo stesso segno (fig. 15). A tutti i criterj precedenti deesi unire il criterio dimostrato al n° 429.

431. Teorema III. *Se la curva rappresentata dalla equazione* $u=\varphi(x,y)=0$ *avrà un punto multiplo* (x_0,y_0), *le coordinate* x_0, y_0 *soddisfaranno alle due equazioni* $\frac{du}{dx}=0$, $\frac{du}{dy}=0$, *ove però la funzione* u *sia continua in prossimità dei valori* x_0, y_0.

Sia $y=ax+b$ l'eq. d'una retta che tagli due rami qualunque della curva in prossimità del punto (x_0, y_0). Sieno X, Y

le coordinate d'uno dei punti d'intersezione; $X+\Delta X$, $Y+\Delta Y$, saranno le coordinate dell' altro (fig. 16); sicchè avremo

$$\varphi(X,Y)=0,\quad \varphi(X+\Delta X,\, Y+\Delta Y)=0,\quad \Delta\varphi(X,\, Y)=0\,;$$

a misura che X, Y convergono verso x_0, y_0, il punto $(X,\ Y)$ si avvicina al punto $(x_0,\ y_0)$ come al suo limite; il che vuol dire che in siffatto limite potranno ΔX, ΔY cangiarsi in Δx, Δy, e $\Delta\varphi(X,\, Y)$ in $\Delta\varphi(x,y)$; quindi convergendo Δx, Δy verso lo zero, $\Delta\varphi\ (x,\ y)$ convergerà verso il limite $d\varphi(x,\, y)$; dunque $d\varphi(x,\, y)=du=0$; conseguentemente

$$\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}y'=0\,. \tag{6}$$

È da osservare che essendo

$$Y=a\,X+b,\quad Y+\Delta Y=a\,(X+\Delta X)+b,\quad \Delta Y=a\,\Delta X;$$

risulta $\quad a=\dfrac{\Delta Y}{\Delta X}$, e quindi $a=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, qualunque sia Δx;

dunque $$a=\int\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx};$$

per la qual cosa l' equazione (6) diventa

$$\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}a=0,$$

la quale dovendosi verificare per qualsivoglia valore di a, si risolve necessariamente nelle due seguenti

$$\frac{du}{dx}=0,\qquad \frac{du}{dy}=0;$$

questo è ciò che dovevasi dimostrare

432. Teorema IV. *Se la curva $\varphi(x,y)=0$ avrà un punto di flesso contrario (x_0, y_0), sarà* $\dfrac{d^2y}{d^2x}=0$.

Supponiamo che l' equazione della curva abbia la forma $y=fx$; conducasi pel punto (x_0,y_0) una tangente alla curva; siffatta tangente traverserà la curva medesima; perciò indicando con D, D_1 le distanze di due punti della tangente corrispondenti alle ascisse x_0+h, x_0-h, dall'asse delle x, le differenze

$$f(x_0+h)-D,\quad f(x_0-h)-D_1,$$

saranno di segno contrario (fig.17). Or siccome l'equazione della tangente condotta da un punto (x_0, y_0) della curva, è

$$y - y_0 = f'x_0 (x - x_0);$$

per l'ordinata y ossia D corrispondente ad $x_0 + h$, avremo

$$D = fx_0 + hf'x_0,$$

e per y ossia D_1 corrispondente ad $x_0 - h$,

$$D_1 = fx_0 - hf'x_0;$$

conseguentemente

$$f(x_0+h) - D = \frac{h^2}{2} f''x_0 + \frac{h^3}{2.3} f'''x_0 + \frac{h^4}{2.3.4} f^{\text{IV}}x_0 \ldots + \frac{h^n}{2.3..n} f^{(n)}(x_0+\theta h),$$

$$f(x_0-h) - D_1 = \frac{h^2}{2} f''x_0 - \frac{h^3}{2.3} f'''x_0 + \frac{h^4}{2.3.4} f^{\text{IV}} x_0 \ldots \pm \frac{h^n}{2.3..n} f^{(n)}(x_0+\theta h);$$

supponendo h piccolissima il primo termine di ciascuna di queste due serie avanzerà la somma di tutti i termini susseguenti; ragione per cui dovendo le due differenze avere segni contrarj sarà di necessità $f''x_0 = 0$; come dovevasi dimostrare.

433. Scolio I. Qualora per il valore $x = x_0$ riuscisse nulla anco $f'''x$ dovrebbe essere $f^{\text{IV}}x_0 = 0$; e se il medesimo valore x_0 di x rendesse nulla $f^{\text{V}}x$, dovrebbe essere ancora $f^{\text{VI}}x_0 = 0$; in generale acciocchè (x_0, y_0) sia un punto di flesso contrario bisogna che l'ultima delle derivate $f''x$, $f'''x$, $f^{\text{IV}}x$, ec. che vanno a zero per $x = x_0$ sia d'ordine pari.

Segue da ciò che per determinare i punti di flesso contrario è necessario cercare i valori di x, y capaci di verificare le equazioni $y = fx, f''x = 0$, ovvero $\varphi(x, y) = 0, y'' = 0$; un sistema x_0, y_0 di tali valori corrisponderà a un punto di flesso contrario quando l'ultima delle derivate $y'', y''', y^{\text{IV}}, \ldots$ che vanno a zero per $x = x_0$ sia d'ordine pari.

434. Scolio II. I teoremi precedenti suppongono che la tangente condotta pel punto singolare non riesca perpendicolare all'asse delle x; se ciò avvenisse sarebbe $f'x_0 = \infty$: or supponiamo che x_0, y_0 sieno valori tali di x ed y da soddisfare all'equazione $f'x = \infty$; la natura del punto (x_0, y_0) potrà agevolmente determinarsi ponendo mente ai seguenti criterj;

1° Se $f(x_0 + h)$, $f(x_0 - h)$ saranno ambedue reali, e se le differenze $f(x_0 + h) - fx_0$, $f(x_0 - h) - fx_0$ avranno lo stesso segno, (x_0, y_0) sarà un punto di regresso della prima specie; se

avranno segno contrario, (x_0, y_0) sarà un punto di flesso contrario.

2° Se una delle due quantità $f(x_0+h), f(x_0-h)$, per esempio $f(x_0+h)$, sarà reale, l'altra immaginaria, (x_0, y_0) sarà un punto di fermata, o un punto di regresso della seconda specie, o soltanto un limite della curva. Sarà cosa agevole il distinguere questi casi; perchè se $f(x_0+h)$ avrà un solo valore, il punto (x_0, y_0) sarà veramente un punto di fermata; se $f(x_0+h)$ avrà due valori ambedue maggiori o ambedue minori di fx_0 quel punto sarà un punto di regresso di seconda specie; se avendo $f(x_0+h)$ due valori, l'uno sarà maggiore, l'altro minore di fx_0, il punto medesimo sarà un limite alla curva.

3° Se una delle quantità $f(x_0+h)$, $f(x_0-h)$, o sì l'una che l'altra avesse tre o un maggior numero di valori, (x_0, y_0) sarà generalmente parlando punto multiplo e punto insieme di flesso contrario.

XV. Applicazioni delle dottrine precedenti.

435. Parabola. $y^2=2px$, $y'=\frac{p}{y}$, $y''=-\frac{p^2}{y^3}$. Sostituendo questi valori nelle formule (3) n. 368 e 379, avremo

$$s'=\sqrt{\frac{2x+p}{2x}},\qquad \rho=\frac{(2px+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2},\qquad \rho=\frac{N^3}{p^2},$$

$$\alpha=3x+p,\quad \beta=-\frac{y^3}{p^2},\quad x=\frac{1}{3}(\alpha-p),\quad y=-\beta^{\frac{1}{3}}p^{\frac{2}{3}};$$

per questi valori di x e y l'equazione della parabola si cangia in quella della sua evoluta, cioè

$$\beta^2=\frac{8}{27}\frac{(\alpha-p)^3}{p};\qquad \beta=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\frac{(\alpha-p)^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}}.$$

Dunque 1° il raggio di curvatura della parabola è uguale al cubo della normale diviso pel quadrato del semi-parametro; il che mostra che il raggio di curvatura può determinarsi per mezzo di una semplicissima costruzione. E siccome un'arco dell'evoluta è la differenza de' raggi vettori che passano dalle sue estremità, segue che un arco qualunque della evoluta della parabola può rettificarsi.

3° Al crescere della x cresce ρ; dunque la curvatura della parabola decresce infinitamente (n. 376).

4° L'evoluta della parabola è formata di due rami infiniti uguali che si estendono dalla parte delle ascisse positive, e presentano la convessità all'asse delle x; infatti β e $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$ avranno sempre il medesimo segno qualunque sia x (n. 366.) (fig. 18.).

5° L'asse di questa evoluta coincide coll'asse stesso della parabola; il quale è incontrato dalla evoluta medesima in un punto O di cui p è l'ascissa; infatti facendo $x=0$ si trova $\rho=p$. Questa conseguenza è pur confermata dalla equazione della evoluta perocchè ponendo $\alpha=p$ risulta $\beta=0$.

6° Il punto O è un punto di regresso della 1ª specie; infatti ponendo $u=\beta^2-\frac{8}{27}\frac{(\alpha-p)^3}{p}$, si trova per $\alpha=p$, $\beta=0$,

$$\frac{du}{d\alpha}=-\frac{8}{9}\frac{(\alpha-p)^2}{p}=0, \quad \frac{du}{d\beta}=2\beta=0;$$

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2}=-\frac{16(\alpha-p)}{9p}=0, \quad \frac{d^2u}{d\beta^2}=2, \quad \frac{d^2u}{d\alpha d\beta}=0, \quad \frac{d^2u}{d\alpha^2}\frac{d^2u}{d\beta^2}=\frac{d^2u}{d\alpha d\beta}.$$

7° Trasportando l'origine dell'evoluta nel punto O, cioè sostituendo $\alpha+p$ ad α, l'equazione della evoluta medesima sarà $\beta^2=\frac{8}{29}\frac{\alpha^3}{p}$; dunque l'evoluta della parabola del secondo grado è una parabola del grado $\frac{3}{2}$ o $\frac{2}{3}$.

436. Ellisse. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $y'=-\frac{b^2x}{a^2y}$, $y''=-\frac{b^4}{a^2y^3}$;

$$s'^2=\frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^4y^2}, \quad \rho=\frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}, \quad \rho=\frac{a^2N^3}{b^4},$$

$$\alpha=x-\frac{(a^4y^2+b^4x^2)x}{b^2a^4}, \quad \beta=y-\frac{(a^4y^2+b^4x^2)y}{a^2b^4}.$$

Or mediante l'equazione della curva, fatto $a^2-b^2=c^2$, si trova $a^4y^2+b^4x^2=a^4-cx^2=b^4-cy^2$; dunque

$$\rho=\frac{(a^4-c^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b}=\frac{(b^4-c^2y^2)^{\frac{3}{2}}}{ab^4}, \qquad \alpha=\frac{c^2x^3}{a^4}, \quad \beta=-\frac{c^2y^3}{b^4};$$

di qui ricavando i valori di x ed y, sostituendoli nella equa-

zione dell' ellisse, e facendo per brevità $p=\frac{c^2}{a}$, $q=\frac{c^2}{b}$, otterremo le equazioni seguenti della evoluta;

$$a^{\frac{2}{3}}\,\alpha^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\,\beta^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}},\qquad \left(\frac{\alpha}{p}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\beta}{q}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

Dunque 1° il raggio di curvatura dell' ellisse può determinarsi per mezzo di una costruzione geometrica; conseguentemente l' evoluta di questa curva può rettificarsi.

2° I raggi di curvatura corrispondenti alle estremità dell'asse maggiore dell' ellisse sono uguali a $\frac{b^2}{a}$, quelli corrispondenti alle estremità dell'asse minore sono uguali ad $\frac{a^2}{b}$; imperocchè tali sono i valori che acquista ρ facendo successivamente $y=0$ ed $x=\pm a$, $x=0$ ed $y=\pm b$.

3° L' evoluta dell' ellisse, come si rileva dalla equazione è una curva chiusa (fig. 19) divisibile in quattro parti sovrapponibili, dai due assi che coincidono come quelli dell' ellisse cogli assi ortogonali; questi assi incontrano l' evoluta ne' quattro punti E, F, G, H le cui distanze dall' origine sono $+p$, $-p$, $+q$, $-q$; infatti facendo $\beta=0$ trovasi $\alpha=\pm\frac{c^2}{a}=\pm p$, e facendo $\alpha=0$ trovasi $\beta=\pm\frac{c^2}{b}=\pm q$.

4° I punti E, F, G, H sono quattro punti di regresso.

437. Iperbola. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Cangiando b^2 in $-b^2$ le formule stabilite rispetto all'ellisse si potranno adattare all' iperbola. Laonde avremo

$$\rho=\frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4};\qquad \rho=\frac{a^2N^3}{b^4};$$

e l' equazione della evoluta, ponendo $a^2+b^2=c^2$, $p=\frac{c^2}{a}$, $q=\frac{c^2}{b}$,

sarà $$a^{\frac{2}{3}}\alpha^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}}\,\beta^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}},\ \left(\frac{\alpha}{p}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{\beta}{q}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

Dunque 1° il raggio di curvatura dell' iperbola si determina nella maniera medesima con cui si determina quello dell' ellisse; l' evoluta dell' iperbola può rettificarsi.

2° I raggi di curvatura corrispondenti ai vertici dell' iperbola sono uguali a $\frac{b^2}{a}$.

3° L'evoluta dell'iperbola (fig. 20) è composta di due curve l'una separata dall' altra ciascuna dalle quali è divisa nei punti A e B in due rami infiniti dall' asse della x. Le distanze dei punti A e B dall'origine sono uguali, cioè $+p, -p$, ovvero $\pm \frac{c^2}{a}$.

438. Cicloide. $x = r \text{ ar cos } \frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}$ (n. 341);

$$y' = \sqrt{\frac{2r-y}{y}},\ y'' = -\frac{r}{y^2},\quad \alpha = x + 2\sqrt{2ry - y^2},\quad \beta = -y.$$

Di qui si ha $y = -\beta$, $x = \alpha - 2\sqrt{-2r\beta - \beta^2}$; sostituendo questi valori nella equazione della cicloide, avremo l'equazione della evoluta, che sarà

$$\alpha = r \text{ ar cos } \frac{r+\beta}{r} + \sqrt{-2r\beta - \beta^2}.$$

Dunque 1° nella cicloide il raggio di curvatura è doppio della normale; infatti $N = \sqrt{2ry}$ (n. 344); dunque prolungando la corda MN (fig. 3), e facendo $NK = MN$, il punto K sarà il centro di curvatura del punto M. Ora se da I mezzo di AA' si conduce la perpendicolare $IC = 2r$, da C la parallela VV' ad AA', e si prolunga GN finchè incontri questa parallela, è manifesto che la circonferenza avente il diametro NB passerà pel punto K; il perchè sarà l'arco NK = arco $MN = AN$, e l'arco $KB = NI = BC$. Dunque il punto K si trova sulla cicloide descritta da un punto della circonferenza BKN, ed avente l'origine in C e VV' per base; dunque l'evoluta della cicloide si compone di due semi-cicloidi AKC, $A'K'C$ uguali alla prima nella forma e nelle dimensioni, le quali vengono a formare nel punto O dove si riuniscono un punto di regresso di prima specie. Ciò risulta pur anco dalla equazione dell'evoluta; imperocchè trasportando l'origine in C, il che si ottiene facendo $\alpha = \alpha_1 + \pi r$, $\beta = \beta_1 - 2r$, avremo

$$-\alpha_1 = r \text{ ar cos } \frac{r-\beta_1}{r} - \sqrt{2r\beta_1 - \beta_1^2}\ (^*)$$

e sostituendo $-\alpha_1$ ad α_1, cioè prendendo le α_1 positive secondo

(*) Ad ottenere questo risultato è d'uopo osservare che dalle equazioni $\cos a = t$, $\cos(\pi - a) = -t$, si ha

$$a = \text{ar cos } t,\quad \pi - a = \text{ar cos}(-t),\quad \pi - \text{ar cos } t = \text{ar cos}(-t).$$

la direzione della CV, otterremo l'equazione della cicloide primitiva.

2° Essendo l'arco AK uguale ad MK, sarà l'arco $AK = 2\sqrt{2ry}$, e la semi-cicloide $AKC = EC = 4r$; di qui si vede che la cicloide è curva che può rettificarsi.

XVI. Le curve piane riferite alle coordinate polari.

439. Problema I. *Data l'equazione d'una curva riferita a coordinate ortogonali determinare l'equazione della curva stessa riferita a coordinate polari.*

Sia $\varphi(x, y) = 0$ l'equazione d'una curva riferita a coordinate ortogonali; siccome le equazioni che legano i due sistemi sono

$$x = r\cos\omega\,, \qquad y = r \operatorname{sen}\omega\,, \tag{1}$$

è manifesto che $\varphi(r\cos\omega,\ r\operatorname{sen}\omega) = 0$ sarà l'equazione richiesta.

440. Scolio. L'angolo ω, cioè l'angolo compreso fra il raggio vettore r ed una retta fissa, qui rappresentata dall'asse delle x, può ricevere tutti i valori possibili da 0 fino a $\pm\infty$.

441. Corollario I. L'equazione della parabola secondochè l'origine è al vertice o al fuoco sappiamo essere $y^2 = 2px$, $y^2 = p(p + 2x)$; dunque l'equazione polare della parabola nell'uno o nell'altro caso, sarà

$$r = 2p\frac{\cos\omega}{\operatorname{sen}^2\omega}\,, \qquad r = \frac{p}{1 - \cos\omega}\,.$$

442. Corollario II. L'equazione dell'ellisse e della iperbola, l'origine essendo al centro di tali curve, sappiamo essere $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$; dunque le equazioni polari delle curve medesime saranno

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\omega \pm a^2\operatorname{sen}^2\omega}\,.$$

Per trasportare l'origine al fuoco dell'ellisse situato dalla parte delle x positive, oppure al fuoco dell'iperbola dalla parte delle x negative, dovremo porre nell'equazione della prima curva $x + \sqrt{a^2 - b^2}$ in luogo di x, ed in quella della seconda $x - \sqrt{a^2 + b^2}$ in luogo di x; talmentechè facendo per l'ellisse

$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=e$, e per l'iperbola $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=e$, e le equazioni di queste due curve saranno respettivamente

$$\frac{(x+ae)^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1,\quad \frac{(x-ae)^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(e^2-1)}=1;$$

laonde l'equazione polare della ellisse sarà allora

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\omega};$$

e l'equazione polare della iperbola

$$r=\frac{a(e^2-1)}{1+e\cos\omega},\ \text{oppure}\ r=\frac{a(e^2-1)}{e\cos\omega-1},$$

secondochè tale equazione si vorrà riferire al ramo della curva più prossimo al fuoco dove abbiamo posta l'origine, o al ramo più lontano dal fuoco istesso.

443. PROBLEMA II. *Data l'equazione d'una curva riferita a coordinate polari, determinare l'equazione della curva stessa riferita a coordinate ortogonali.*

Sia $f(r,\omega)=0$ l'equazione polare d'una curva; le equazioni (1) danno

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad (2)\qquad \omega=\text{arc tang}\,\frac{y}{x};\qquad (3)$$

dunque

$$f\left(\sqrt{x^2+y^2},\ \text{ar tang.}\frac{y}{x}\right)=0,$$

sarà l'equazione richiesta.

444. COROLLARIO. Quando si volesse l'equazione differenziale, differenzieremmo l'equazione proposta $f(r,\omega)=0$, ed elimineremmo la ω per mezzo della proposta medesima; il risultato conterrebbe r, dr, $d\omega$; ma poichè

$$dr=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad d\omega=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2},$$

fatta la sostituzione di queste due espressioni si ottiene l'equazione differenziale che ricercavasi.

445 SCOLIO. Il raggio vettore r si prende sempre positivo.

446. PROBLEMA III. *Determinare l'angolo che la tangente alla curva fa col raggio vettore condotto al punto di contatto.*

Sia v l'angolo richiesto (fig. 21); sarà

$$v = \omega - t\,, \quad \tan v = \frac{\tan \omega - \tan t}{1 + \tan \omega \tan t}\,,$$

ovvero
$$\tan v = \frac{y - xy'}{x + yy'}\,.$$

Quando la curva fosse riferita a coordinate polari e si volesse l'angolo v espresso in funzione di r e ω, dovremmo assoggettare questa formula alla trasformazione indicata al n. 207; presa ω come variabile indipendente, risulterà

$$\tan v = -\frac{r}{r'} = -\frac{r d\omega}{dr}\,.$$

447. SCOLIO. Se il calcolo si adattasse alla fig. 22, troveremmo $v = t - \omega$,

$$\tan v = \frac{xy' - y}{x + yy'}\,, \qquad \tan v = \frac{r}{r'} = \frac{r d\omega}{dr}\,;$$

perciò innanzi di valersi di queste formule nelle applicazioni sarà necessario por mente al segno del secondo membro.

448. PROBLEMA IV. *Determinare l'angolo* t *che fa la tangente tirata in un punto qualunque della curva coll'asse delle* x *per mezzo delle coordinate polari di questo punto.*

Siccome $t = \omega - v$, e $\tan t = \dfrac{\tan \omega - \tan v}{1 + \tan \omega \tan v}$;

avremo
$$\tan t = \frac{r + r' \tan \omega}{r' - r \tan \omega}\,;$$

ω essendo la variabile indipendente.

449. PROBLEMA V. *Trovare l'equazione polare d'una retta che passa per un punto di cui si conoscono le coordinate polari* ω_0, r_0.

L'equazione d'una linea retta che passa pel punto (x_0, y_0) sappiamo essere $y - y_0 = \tan t(x - x_0)$; avremo adunque

$$r \operatorname{sen} \omega - r_0 \operatorname{sen} \omega_0 = \tan t\,(r \cos \omega - r_0 \cos \omega_0)\,;$$

ovvero, perchè $\tan t = \dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$,

$$r \operatorname{sen}(\omega - t) = r_0 \operatorname{sen}(\omega_0 - t)\,,$$

nella quale equazione rimane indeterminata la t, cioè l'angolo compreso fra la retta ed il semi-asse delle x positive.

450. PROBLEMA VI. *Esprimere per mezzo delle coordinate polari le lunghezze della tangente, della normale, della sottangente e della sunnormale.*

Nel sistema delle coordinate polari la sottangente e la sunnormale si riferiscono alla perpendicolare TN (fig. 23) condotta dall'origine al raggio vettore OM. La sottangente sarà OT, cioè la parte di quella perpendicolare compresa fra l'origine ed il punto in cui essa incontra la tangente; la sunnormale sarà ON cioè la parte della perpendicolare medesima compresa fra l'origine ed il punto dove essa incontra la normale. Ciò posto si osservi che

$$S_t = \frac{OM}{\tan g\, OTM}, \quad S_n = \frac{OM}{\tan g\, ONM}, \quad T^2 = \overline{OM}^2 + \overline{OT}^2, \quad N^2 = \overline{OM}^2 + \overline{ON}^2,$$

ma $OTM = 90° - v$, $ONM = v$, dunque (n. 446)

$$S_t = \frac{r^2}{r'} = \frac{r^2 d\omega}{dr}, \qquad S_n = r' = \frac{dr}{d\omega};$$

$$T = \frac{r}{r'}\sqrt{r^2 + r'^2} = r\,\frac{\sqrt{dr^2 + r^2 d\omega^2}}{dr^2}, \qquad N = \sqrt{r^2 + r'^2} = \frac{\sqrt{dr^2 + r^2 d\omega}}{d\omega^2}.$$

451. PROBLEMA VII. *Esprimere per mezzo delle coordinate polari la derivata e il differenziale dell'arco.*

Siccome $ds^2 = dx^2 + dy^2$, $s'^2 = 1 + y'^2$, sostituendo $\frac{s'}{x'}$ ad s', $\frac{y'}{x'}$ ad y', e quindi ad x', y' le derivate di $r\cos\omega$, $r\,\mathrm{sen}\,\omega$ prese nella supposizione che la r sia funzione di ω, ed ω variabile indipendente, avremo (n. 207)

$$s' = \sqrt{r^2 + r'^2}, \qquad ds = \sqrt{r^2 d\omega^2 + dr^2}.$$

452. PROBLEMA VIII. *Esprimere per mezzo delle coordinate polari la derivata e il differenziale del settore compreso fra un'arco qualunque della curva e i due raggi vettori tirati alle sue estremità.*

Poniamo mente al settore $AOM = S$ (fig. 24); se l'angolo ω crescerà della quantità $MOM' = \Delta\omega$, siffatto settore crescerà della quantità $MOM' = \Delta S$; dunque il settore S dee considerarsi come una funzione $\xi\omega$ di ω. La derivata e il differenziale richiesti dal problema, altro non sono che la derivata e il differenziale di $\xi\omega$. Supporremo che durante l'accrescimento $\Delta\omega$ il

raggio vettore vada sempre crescendo o sempre diminuendo; cosicchè immaginando descritti coi raggi OM, OM' gli archi circolari $M'N'$, MN il settore MOM' si troverà compreso fra i due settori circolari $M'ON'$, MON, i quali sono espressi da $\frac{1}{2}r^2\Delta\omega$, ed $\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\omega$; avremo adunque

$$\Delta S = M\left[\tfrac{1}{2}r^2\Delta\omega\,,\ \tfrac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\omega\right]$$

ovvero
$$\frac{\xi(\omega+\Delta\omega)-\xi\omega}{\Delta\omega} = M\tfrac{1}{2}\left[r^2\,,\ \tfrac{1}{2}(r+\Delta x)^2\right];$$

passando ai limiti

$$\xi'\omega = \tfrac{1}{2}r^2\,,\ S' = \tfrac{1}{2}r^2\,,$$

moltiplicando per $d\omega$, sarà

$$dS = \tfrac{1}{2}r^2\,d\omega.$$

Se il settore decrescerà al crescere dell'angolo ω avremo

$$S' = -\tfrac{1}{2}r^2\,,\qquad dS = -\tfrac{1}{2}r^2 d\omega.$$

453. Scolio. Sostituendo il valore di $d\omega$ tratto dalla (3) avremo
$$dS = \pm\tfrac{1}{2}(xdy - ydx);$$
il segno $+$ avrà luogo quando al crescere o decrescere di ω crescerà o decrescerà S, il $-$ nel caso contrario.

454. Problema IX. *Esprimere per mezzo delle derivate polari il raggio di curvatura.*

Dalla formula (3) n. 379 fatte le riduzioni che sono state indicate al n. 307 es. II, avremo

$$\rho = \frac{(r'^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{2r'^2 - rr'' + r^2} = \frac{s'^3}{2r'^2 - rr'' + r^2};$$

ω essendo la variabile indipendente.

455. Corollario. *Spirale d'Archimede.* $r = a\omega$; $r' = a$.

$$\tang v = \omega,\quad S_n = a,\quad S_t = r\omega;$$

da ciò si raccoglie che l'angolo v compreso fra la tangente ed il raggio vettore condotto al punto di contatto, cresce continuamente al crescer di ω. La sunnormale è costante. La tangente uguaglia in lunghezza l'arco di circolo descritto col raggio r e che serve di misura all'angolo ω.

Spirale iperbolica. $r = \dfrac{a}{\omega}$; $r' = -\dfrac{a^2}{\omega^2}$.

$$\tang v = -\omega,\quad S_t = -a,$$

qui l'angolo v è ottuso e decresce al crescere di w. La sottangente è costante.

Spirale logaritmica. $r = e^{m\omega}, r' = mr, r'' = m^2 r.$

$$\operatorname{tang} v = \frac{1}{m}, \quad S_n = mr, \quad S_t = \frac{r}{m};$$

$$T = \frac{r}{m}\sqrt{1+m^2}, \quad N = r\sqrt{1+m^2};$$

l'angolo v è costante; la sottangente e la sunnormale variano nella medesima ragione del raggio vettore.

La formula stabilita per la determinazione del raggio vettore (n. 454) ci da pure

$$\rho = r\sqrt{1+m^2};$$

donde si vede che il raggio di curvatura e il raggio vettore conservano un rapporto costante; di più si vede che il raggio di curvatura corrispondente ad un punto della curva è uguale alla normale propria di quel punto. Dimanierachè supponendo che la MT (fig. 25) sia la tangente condotta pel punto M, ed OM il raggio vettore, il centro di curvatura corrispondente al punto M sarà il punto d'incontro delle due rette ON, MN l'una perpendicolare ad OM, l'altra ad MT.

Pertanto sarà facile il dimostrare che l'evoluta della spirale è anch'essa una spirale logaritmica identica alla prima. Sieno ω_1, r_1 le coordinate del centro di curvatura N corrispondente ad un punto M qualunque: sarà

$$\omega_1 = NOx = \omega + \tfrac{1}{2}\pi, \quad r_1 = ON = S_n = r' = me^{m\omega};$$

e sostituendo ad ω il suo valore $\omega_1 - \frac{1}{2}\pi$, avremo

$$r_1 = me^{m(\omega_1 - \frac{1}{2}\pi)} = e^{m\left(\omega_1 - \frac{1}{2}\pi + \frac{\text{l}m}{m}\right)};$$

ora le coordinate r_1 ed ω_1 si possono cangiare in r ed ω perchè sì le une che le altre hanno il polo in O; inoltre al trinomio $\omega - \frac{1}{2}\pi + \frac{\text{l}m}{m}$ si può sostituire α; dunque

$$r = e^{m\alpha}$$

sarà l'equazione dell'evoluta; questa equazione è la stessa equa-

zione della curva proposta sebbene l'indeterminata u sia stata impiccolita di tutta la quantità $\frac{1}{2}\pi - \frac{lm}{m}$; ciò mostra che l'evoluta della spirale logaritmica è pure una spirale logaritmica ad essa identica e solo spostata dalla sua situazione per un movimento angolare indicato dalla quantità $\frac{1}{2}\pi - \frac{lm}{m}$.

LIBRO TERZO

IL CALCOLO INTEGRALE

I. I principj fondamentali.

456. Definizione I. Una funzione U si dirà *integrale* di un altra funzione V allorquando questa sarà il differenziale della prima.

457. Definizione II. La funzione U si dirà *integrale primo*, *secondo*, *terzo*, n^{mo}, della funzione V, secondochè la V sarà il differenziale primo, secondo, terzo, n^{mo}, della U.

458. Definizione III. *Integrare* vuol dire trovare l'integrale d'una funzione data; il calcolo che mira a determinare questo integrale dicesi *integrazione*: i metodi che si usano nella integrazione delle diverse funzioni, si comprendono tutti sotto il nome di *calcolo integrale*.

459. Scolio. Acciocchè si possa trovare l'integrale n^{mo} di una funzione V è necessario che la V medesima sia una funzione differenziale dell'ordine n^{mo} almeno: può l'ordine della V avanzare n; non essere minore di n; perocchè se fosse minore di n sarebbe assurdo ricercare una funzione U tale che differenziata n volte producesse V.

In quella guisa che da una funzione finita si passa al suo differenziale dell'ordine n per mezzo di n successive differenziazioni, così dalla funzione dell'ordine n si risale alla funzione finita per mezzo di n successive integrazioni; cioè dall'ordine n

si passa all' ordine $n-1$, da questo all' ordine $n-2$, e così via discorrendo; la funzione finita cui alla fine si giunge dicesi *integrale finito*, oppure *funzione primitiva*.

460. Caratteristica dell' integrale. L' integrale d' una funzione s' indica scrivendo innanzi ad essa la caratteristica $\int$; perlochè se l' integrale di $\varphi x dx$, funzione differenziale del 1° ordine, sarà fx, avremo

$$fx = \int \varphi x dx .$$

Se l' integrale primo della funzione differenziale del secondo ordine $\psi x dx^2$, sarà la funzione $\varphi x dx$, siccome fx si suppone essere l' integrale di questa, fx sarà l' integrale secondo di $\psi x dx^2$; sicchè avremo

$$fx = \int \varphi x dx = \int \int \psi x dx^2 .$$

Se $\psi x dx^2$ fosse l' integrale primo di $\xi x dx^3$, avremmo ancora

$$fx = \int \varphi x dx = \int \int \psi x dx^2 = \int \int \int \xi x dx^3 ,$$

e così di seguito.

461. Principio I. Sieno Fx, fx due funzioni della x; avremo

$$F(x+h) = Fx + hF'(x+\theta h) ,$$

$$f(x+h) = fx + hf'(x+\theta h) .$$

Ora supponendo $F'x = f'x$, sarà $F'(x+\theta h) = f'(x+\theta h)$; quindi risulterà

$$F(x+h) - f(x+h) = Fx - fx ;$$

dunque la differenza $Fx - fx$ non cangia quando la x si muta in $x+h$; dunque questa differenza è indipendente dalla x, cioè costante; dunque *gl' integrali aventi una stessa derivata non possono differire fra loro che di una quantità costante.*

462. Corollario. Nel supposto che fx sia l' integrale di $\varphi x dx$ non basterà porre $\int \varphi x dx = fx$, perocchè fx non è l'unica funzione di cui $\varphi x dx$ sia il differenziale; volendo comprendere nella espressione dell' integrale tutte le funzioni aventi per differenziale $\varphi x dx$ porremo

$$\int \varphi x dx = fx + c ,$$

c rappresentando una quantità costante come suol dirsi *arbitraria*; questa è l' espressione più generale dell' integrale di $\varphi x dx$, la quale si dice *integrale completo*. Privando l' integrale completo della costante arbitraria, o attribuendo ad essa un valore particolare l' integrale completo si cambierà in un *integrale incompleto* o *particolare*.

Frattanto si vede che l' integrale d' una funzione rimane indeterminato, e per la costante arbitraria che dee di necessità contenere, e per la variabile da cui dipende.

463. Principio II. Supponiamo che fx sia l'integrale di $\varphi x dx$; sarà $\varphi x dx$ il differenziale di fx; per cui avremo

$$\int \varphi x dx = fx, \qquad \varphi x dx = dfx;$$

sostituendo dfx a $\varphi x dx$, la prima di queste equazioni diventa

$$\int dfx = fx;$$

dunque l'*integrazione d'una funzione preceduta dalla caratteristica differenziale* d *si farà sopprimendo questa caratteristica.*

464. Corollario. Poniamo mente alle formule seguenti;

$$d\,\frac{x^{m+1}}{m+1} = x^m dx, \qquad (a)$$

$$d\,\frac{a^x}{\mathrm{l}a} = a^x dx, \quad (b) \qquad de^x = e^x dx, \quad (c)$$

$$d\mathrm{L}x = \frac{dx}{x\mathrm{l}a}, \quad (d) \qquad d\mathrm{l}x = \frac{dx}{x}, \quad (e)$$

$$d \operatorname{sen} x = \cos x dx, \quad (f) \qquad d(-\cos x) = \operatorname{sen} x dx, \quad (g)$$

$$d \operatorname{ar sen} x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (h) \qquad d \operatorname{ar cos} x = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (i)$$

$$d \operatorname{ar tang} x = \frac{dx}{1+x^2}; \qquad (k)$$

in virtù del principio precedente avremo

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c; \qquad (1)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\mathrm{l}a} + c; \quad (2) \qquad \int e^x dx = e^x + c; \quad (3)$$

$$\int \frac{dx}{x\mathrm{l}a} = \mathrm{L}x + c; \quad (4) \qquad \int \frac{dx}{x} = \mathrm{l}x + c; \quad (5)$$

$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + c; \quad (6) \qquad \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + c; \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{ar} \operatorname{sen} x + c; \quad (8) \qquad \int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{ar} \cos x + c; \quad (9)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{ar} \operatorname{tang} x + c. \qquad (10)$$

465. Scolio I. La formula (1) dimostra che *per integrare il monomio* $x^m dx$ *bisogna sopprimere il fattore* dx, *accrescere di una unità l'esponente della variabile, e dividere per l'esponente così accresciuto.*

Or siccome la formula (a) è vera qualunque sia m, perciò anco la formula (1) non anderà soggetta ad alcuna restrizione; ponendo $-m$ in luogo di m, avremo

$$\int \frac{dx}{x^m} = -\frac{1}{(m-1)x^{m-1}} + c; \qquad (11)$$

donde si raccoglie che *per integrare il monomio* $\frac{dx}{x^m}$ *bisogna sopprimere il fattore* dx, *mutare il segno alla frazione, diminuire l'esponente d'una unità, e dividere la frazione per l'esponente così diminuito.*

466. Scolio II. Facendo $m = -\frac{1}{2}$ la formula (1) darà

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c; \qquad (12)$$

e di qui si vede che *l'integrale del monomio fratto irrazionale* $\frac{dx}{\sqrt{x}}$ *è uguale al doppio del suo denominatore.*

Facendo $m = 2$, $= -\frac{3}{2}$, la formula stessa darà pure

$$\int \sqrt{x}\,.\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c, \quad (13) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^3}} = -\frac{2}{\sqrt{x}} + c. \qquad (14)$$

467. Scolio III. La formula (1) sebbene si debba considerare come generale e vera per qualunque valore di m, pure quando si faccia $m = -1$ fa luogo ad un risultato assai singolare; essa ci dà $\int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{0}$. Questo risultato è assurdo, stantechè dalla formula (5) si vede che l'integrale della funzione $\frac{dx}{x}$ è il logaritmo iperbolico della variabile. Siffatta assurdità dipende dal

cangiamento di natura cui và soggetto l'integrale $\int x^m dx$ per $m = -1$; imperocchè per tutt'altro valore di m questo integrale è una funzione algebrica, mentre per $m = -1$ diventa una funzione logaritmica, la quale non può essere giammai un caso particolare della prima. Nullameno disponendo convenientemente della costante arbitraria potremo trasformare la formula (1) in altra cui non disconvenga il valore -1 dato ad m. Facciasi

$$c = -\frac{a^{m+1}}{m+1},$$

a essendo essa pure una costante arbitraria; avremo

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1};$$

or facendo $m = -1$, questa formula dà $\int \frac{dx}{x} = \frac{0}{0}$; ma

$$\frac{D_m(x^{m+1} - a^{m+1})}{D_m(m+1)} = x^{m+1} \mathrm{l}x - a^{m+1}\mathrm{l}a,$$

dunque per $m = -1$, avremo

$$\int \frac{dx}{x} = \mathrm{l}x - \mathrm{l}a = \mathrm{l}\,\frac{x}{a}, \quad \text{ovvero} \quad \int \frac{dx}{x} = \mathrm{l}x + c,$$

perchè essendo a arbitraria nulla vieta che al logaritmo $-\mathrm{l}a$ si sostituisca l'arbitraria c. Di questa guisa si ritrova la formula (5).

468. Scolio IV. Le formule (8) (9) (10) sono stabilite nella ipotesi che il raggio del circolo sia l'unità; se tal raggio fosse r, dovremmo sostituire ad ar sen x, ar cos x, ar tang x, le quantità

$$\frac{\text{ar sen}\, x}{r}, \quad \frac{\text{ar cos}\, x}{r}, \quad \frac{\text{ar tang}\, x}{r};$$

la x poi dovrebbe anch'essa essa essere cangiata in $\frac{x}{r}$; facendo queste sostituzioni nelle formule (h) (i) (k) e poscia integrando avremo per il caso del raggio $= r$,

$$\int \frac{rdx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \text{ar sen}\, x + c, \quad (15) \qquad \int \frac{-rdx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \text{ar cos}\, x + c, \quad (16)$$

$$\int \frac{r^2 dx}{r^2 + x^2} = \text{ar tang}\, x + c. \qquad (17)$$

Notisi che sostituendo $\frac{x}{a}$ ad x le formule (8) (9) (10), danno pure

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{ar sen}\,\frac{x}{a} + c, \quad (18) \qquad \int \frac{-dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{ar cos}\,\frac{x}{a} + c, \quad (19)$$

$$\int \frac{adx}{a^2+x^2} = \text{ar tang}\,\frac{x}{a} + c; \qquad (20)$$

queste però suppongono il raggio $= 1$.

469. Principio III. Indicando con $\pm A$ una costante quantunque, in virtù del principio II (n. 463), avremo altresì

$$\int(\pm A\varphi x dx) = \int(\pm A df x) = \int d(\pm A f x) = \pm A f x = \pm A \int \varphi x dx;$$

dunque *l'integrale del prodotto d'una costante multiplicata per una funzione è uguale al prodotto della costante presa col suo segno moltiplicata per l'integrale della funzione medesima.*

470. Corollario I. Siccome $dx^{m+1} = (m+1)x^m dx$, sarà

$$x^{m+1} = (m+1)\int x^m dx, \qquad \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1};$$

la quale coincide colla (1) (n. 464).

471. Corollario II. Per $A = 1$ si trova

$$\int(\pm\varphi x dx) = \pm\int \varphi x dx;$$

e di qui si vede che *l'integrale d'una funzione conserva sempre il segno della funzione medesima.*

472. Principio IV. Supponiamo che $Fx, fx, \mathfrak{f}x$, ec. sieno ordinatamente gl'integrali delle funzioni $\varphi x dx, \psi x dx, \xi x dx$, ec.; queste funzioni medesime saranno i differenziali di $Fx, fx, \mathfrak{f}x$, ec.; talchè avremo

$$\int \varphi x dx = Fx, \quad \int \psi x dx = fx, \quad \int \xi x dx = \mathfrak{f}x, \ldots;$$

ed insieme

$$\varphi x dx = dFx, \quad \psi x ax = dfx, \quad \xi x dx = d\mathfrak{f}x, \ldots;$$

quindi in forza del principio II, sarà

$$\int(\varphi x dx + \psi x dx + \xi x dx + \ldots) = \int(dFx = dfx + d\mathfrak{f}x + \ldots)$$
$$= \int d(Fx + fx + \mathfrak{f}x + \ldots) = Fx + fx + \mathfrak{f}x + \ldots$$
$$= \int \varphi x dx + \int \psi\, x dx + \int \xi x dx + \ldots$$

dunque *l'integrale della somma di più funzioni è la somma degl'integrali di queste funzioni medesime.*

473. Corollario. Abbiasi la funzione intera seguente;

$$Fxdx = Adx + Bxdx + Ex^2dx \dots + Tx^mdx;$$

avremo

$$\int Fxdx = A\int dx + B\int xdx + E\int x^2dx \dots + T\int x^mdx;$$

$$\int Fxdx = C + Ax + \frac{1}{2}Bx^2 + \frac{1}{3}Ex^3 \dots + \frac{1}{m+1}Tx^{m+1};$$

donde risulta che *l'integrale d'una funzione intera si ottiene sopprimendo il fattore* dx, *accrescendo gli esponenti della* x *in tutti i termini d'una unità, e dividendo questi termini medesimi per gli esponenti così accresciuti.*

474. Principio V. Si osservi che

$$d(\varphi x\psi x) = \varphi x d\psi x + \psi x d\varphi x;$$

or questa equazione in virtù del principio II e del IV, dà

$$\varphi x\psi x = \int \varphi x d\psi x + \int \psi x d\varphi x,\ \int \varphi x d\psi x = \varphi x\psi x - \int \psi x d\varphi x;$$

dunque *l'integrale d'una funzione moltiplicata pel differenziale d'un altra è eguale al prodotto delle due funzioni diminuito dell'integrale della seconda moltiplicata pel differenziale della prima.*

475. Scolio. Questo principio è noto sotto il nome di *integrazione per parti.* Supponiamo che una funzione Fx possa risolversi in due fattori U, V, talchè sia

$$\int Fxdx = \int UVdx;$$

supponiamo altresì che l'integrale di Vdx possa determinarsi agevolmente, sicchè abbiasi $\int Vdx = P$, ovvero $Vdx = dP$; sarà

$$\int UVdx = \int UdP = UP - \int PdU$$

ovvero

$$\int UVdx = UP - \int PU'dx$$

dimanierachè l'integrazione della funzione $UVdx$ dipenderà da quella della funzione più semplice $PU'dx$. Di questa guisa l'integrazione d'una funzione trascendente potrà talvolta ridursi alla integrazione d'una funzione algebrica.

Notisi che l'equazione $\int UVdx = UP - \int PU'dx$ può scriversi ancora nel modo seguente

$$\int UVdx = U\int Vdx - \int (dU\int Vdx).$$

Esempio I. Abbiasi la funzione x^mdx; avremo

$$\int x^mdx = x^{m+1} - m\int x^mdx,\quad \int x^mdx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c$$

come abbiamo trovato di sopra (n. 464 e n. 470).

Esempio II. Abbiasi la funzione $\mathrm{l}x.dx$; sarà

$$\int \mathrm{l}x.dx = x\mathrm{l}x - \int x.\frac{dx}{x} = x\mathrm{l}x - x + c. \qquad (21)$$

476. **Principio VI.** Siccome l'equazione

$$dFx = \varphi x dx,$$

sussistendo per la variabile x, dee sussistere per qualunque altra variabile ove anche non sia indipendente, e dee pure sussistere nel caso in cui si sostituisca ad x qualunque funzione di x, o d'altra variabile t; per conseguenza anche l'equazione

$$\int \varphi x dx = Fx,$$

sussisterà qualunque sia la x: dunque sostituendo ad x una funzione X qualsiasi, avremo

$$\int \varphi X dX = FX;$$

dunque *una formula integrale stabilita per una funzione di x che si reputa variabile indipendente, può estendersi anche al caso in cui la* x *rappresenti una funzione qualunque.*

Esempio I. Sia la funzione $z^m z'dx$, dove $z = \xi x$; avremo

$$\int z^m.z'dx = \int z^m dz = \frac{z^{m+1}}{m+1} + c.$$

Esempio II. Sia la funzione $(A + Bx + Ex^2)^3(B + 2Ex)\,dx$; siccome $(B + 2Ex)dx = d\,(A + Bx + Ex^2)$, sarà

$$\int (A + Bx + Ex^2)^3(B + 2Ex)dx = \tfrac{1}{4}\,(A + Bx + Ex^2)^4 + c.$$

Esempio III. Sia la funzione $\frac{azdz}{(z^2+1)^m}$; siccome

$$zdz = \tfrac{1}{2}\,d(z^2 + 1),$$

sarà [n. 465 (11)] $\displaystyle\int \frac{azdz}{(z^2+1)^m} = c - \frac{a}{2(m-1)(z^2+1)^{m-1}}. \qquad (22)$

Esempio IV. Sia la funzione $\frac{azdz}{z^2+1}$; siccome $zdz = \frac{1}{2}d(z^2+1)$,

avremo [n. 464 (5)] $\displaystyle\int \frac{azdz}{z^2+1} = a\mathrm{l}\sqrt{(z^2+1)} + c. \qquad (23)$

II. *L'integrazione delle funzioni fratte.*

477. Problema I. *Integrare la funzione* $\frac{Adx}{x-a}$.

Osservando che $dx = d(x-a)$, troveremo

$$\int \frac{Adx}{x-a} = C + A\,\mathrm{l}\,(x-a). \tag{1}$$

478. Problema II. *Integrare la funzione* $\frac{Adx}{(x-a)^n}$.

Qui pure osservando che $dx = d(x-a)$; sarà

$$\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = C - \frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}}. \tag{2}$$

479. Problema III. *Integrare la funzione* $\frac{(Ax+B)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$.

Questa funzione si può trasformare nella seguente

$$\frac{\frac{Ax+B}{\beta}\frac{dx}{\beta}}{\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1} = \frac{A\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)+\frac{B+A\alpha}{\beta}}{\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1}\cdot d\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right);$$

perciò ponendo $\frac{x-\alpha}{\beta} = z$, $\frac{B+A\alpha}{\beta} = b$, avremo

$$\frac{(Ax+B)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{(Az+b)\,dz}{z^2+1} = \frac{Azdz}{z^2+1} + \frac{bdz}{z^2+1};$$

dunque l'integrale della proposta dipende dagl'integrali di due funzioni le quali sono due casi particolari di essa; la prima è della forma che acquista la proposta per $B=0, \alpha=0, \beta=1$; la seconda della forma cui si riduce la proposta medesima per $A=0, \alpha=0, \beta=1$. Frattanto avremo [n. 476 (23) e n. 464 (10)]

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \int \frac{(Az+b)\,dz}{z^2+1} = A\,\mathrm{l}\sqrt{(z^2+1)} + b\,\mathrm{ar\,tang}\,z + c. \tag{3}$$

480. Problema IV. *Integrare la funzione* $\frac{(Ax+B)\,dx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^n}$.

Elimineremo la x come sopra; dopo ciò faremo per brevità

$$\frac{A}{\beta^{2n-2}} = a, \qquad \frac{A\alpha + B}{\beta^{2n-1}} = b,$$

e così la proposta si ridurrà alla seguente;

$$\frac{(az+b)dz}{(z^2+1)^n} = \frac{azdz}{(z^2+1)^n} + \frac{bdz}{(z^2+1)^n};$$

dunque l'integrale della proposta dipende dagl'integrali di due funzioni, le quali sono due casi particolari di essa; il 1° corrisponde a $B=0$, $\alpha=0$, $\beta=1$, il 2° ad $A=0$, $\alpha=0$, $\beta=1$. Frattanto avremo [n. 476 (22)]

$$\int\frac{(az+b)dz}{(z^2+1)^n} = C - \frac{a}{(n-1)(z^2+1)^{n-1}} + b\int\frac{dz}{(z^2+1)^n}. \qquad (4)$$

Rispetto all'integrale della funzione $\frac{dz}{(z^2+1)^n}$ sarà facile dimostrare che esso dipende dall' integrale d' una funzione della stessa specie coll'esponente del denominatore diminuito d'una unità. Infatti dalla identità

$$dz = z^2dz + dz - z^2dz,$$

si ha $$\int\frac{dz}{(z^2+1)^n} = \int\frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}} - \int\frac{z^2dz}{(z^2+1)^n}; \qquad (5)$$

ora $$\int\frac{z^2dz}{(z^2+1)^n} = \frac{1}{2}\int z\cdot\frac{2zdz}{(z^2+1)^n} = -\frac{1}{2}\int zd\,\frac{1}{(n-1)(z^2+1)^{n-1}},$$

e integrando per parti

$$\int\frac{z^2dz}{(z^2+1)^n} = -\frac{z}{2(n-1)(z^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int\frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}};$$

perciò ponendo questa espressione nella equazione (5) risulterà

$$\int\frac{dz}{(z^2+1)^n} = \frac{z}{2(n-1)(z^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\int\frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}}; \qquad (6)$$

di qui, cambiando successivamente n in $n-1$, $n-2$, ec. ricaveremo tutte le equazioni seguenti;

$$\int\frac{dz}{(z^2+1)^{n-1}} = \frac{z}{2(n-2)(z^2+1)^{n-2}} + \frac{2n-5}{2(n-2)}\int\frac{dz}{(z^2+1)^{n-2}},$$

$$\int\frac{dz}{(z^2+1)^{n-2}} = \frac{z}{2(n-3)(z^2+1)^{n-3}} + \frac{2n-7}{2(n-3)}\int\frac{dz}{(z^2+1)^{n-3}},$$

. . . .

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^3} = \frac{1}{2.2}\,\frac{z}{(z^2+1)^2} + \frac{3}{2.2}\int \frac{dz}{(z^2+1)^2},$$

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{2.1}\,\frac{z}{z^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2+1},$$

$$= \frac{1}{2.1}\,\frac{z}{z^2+1} + \frac{1}{2}\,\text{ar tang}\, z\,;$$

dalle quali si ha

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^n} = \frac{z}{(z^2+1)^{n-1}}\left\{ \frac{1}{2(n-1)} + \frac{(z^2+1)(2n-3)}{2^2(n-1)(n-2)} \right.$$

$$\left. + \frac{(z^2+1)^2(2n-3)(2n-5)}{2^3(n-1)(n-2)(n-3)} \cdots + \frac{(z^2+1)^{n-2}(2n-3)(2n-5)(2n-7)..3.1}{2^{n-1}(n-1)(n-2)(n-3)....3.2.1} \right\}$$

$$+ \frac{(2n-3)(2n-5)(2n-7)...5.3.1}{2^{n-1}(n-1)(n-2)(n-3)...3.2.1}\,\text{ar tang}\, z + C. \qquad (7)$$

481. Scolio. Abbiasi la funzione fratta

$$\frac{(Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots.)dx}{ax^n + bx^{n-1} + \ldots.} = \frac{\xi x dx}{fx};$$

se il grado di ξx avanzerà il grado di fx, dividendo ξx per fx avremo un quoziente Q ed un resto Fx, il cui grado sarà minore del grado di fx; talchè sarà

$$\int \frac{\xi x dx}{fx} = \int Q dx + \int \frac{Fx dx}{fx};$$

la ricerca dell'integrale della funzione intera Qdx non presenta alcuna difficoltà; resta adunque che si dica del modo d'integrare la funzione $\frac{Fxdx}{fx}$. Siccome la frazione $\frac{Fx}{fx}$ può risolversi in frazioni parziali, la forma delle quali (moltiplicate che sieno per dx) sarà sempre una di quelle che abbiamo considerate qui sopra (pag. 162), perciò l'integrale della proposta potrà sempre trovarsi.

III. Integrazione delle funzioni irrazionali.

482. Problema I. *Integrare la funzione* $x^{\frac{m}{n}}dx$;

In virtù la formula (1) n. 464, avremo

$$\int \sqrt[n]{x^m}dx = \frac{n\sqrt[n]{x^{m+n}}}{m+n}; \tag{1}$$

casi particolari di questa equazione sono le formule (12) (13) (14) esposte al n. 466.

483. Scolio I. Le formule stesse (12) (13) n. 466, sussistono ove anche si sostituisca ad x una funzione u di x n. 476; dunque

$$\int u'\sqrt{u}.dx = \frac{2}{3}\sqrt{u^3}+C, \quad (2) \qquad \int \frac{u'dx}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}+C; \tag{3}$$

dunque tutte le funzioni $\varphi x dx$ nelle quali φx potrà risolversi in due fattori u', $\sqrt{u}$, oppure u', $\frac{1}{\sqrt{u}}$ potranno integrarsi.

484. Scolio II. Ogni funzione di x formata di due parti l'una razionale, l'altra irrazionale del 2° grado, è espressa da $A+u+\sqrt{v}$; u, v essendo funzioni razionali di x. Si osservi che

$$dl(A+u+\sqrt{v}) = \frac{du+\dfrac{dv}{2\sqrt{v}}}{A+u+\sqrt{v}}; \tag{4}$$

moltiplicando per $\frac{\sqrt{v}}{du}\times\frac{du}{\sqrt{v}}$, avremo

$$dl(A+u+\sqrt{v}) = \frac{\dfrac{1}{2}\dfrac{dv}{du}+\sqrt{v}}{A+u+\sqrt{v}}\times\frac{du}{\sqrt{v}}; \tag{5}$$

perciò ogniqualvolta sarà $\quad \frac{1}{2}\frac{dv}{du} = A+u, \quad$ (6)

avremo $$\int \frac{du}{\sqrt{v}} = l(A+u+\sqrt{v})+C. \tag{7}$$

Or dalla condizione (6) si ha $dv = 2\,A du + 2u du$, e integrando $v = a + 2Au + u^2$; dunque dalla (5) avremo

$$\int \frac{du}{\sqrt{a+2\,Au+u^2}} = \mathrm{l}\,(A+u+\sqrt{a+2\,Au+u^2}) + C. \qquad (8)$$

485. Problema II. *Integrare la funzione* $\dfrac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}}$.

Facendo $u = x$, e sostituendo $\frac{1}{2}b$ ad A, otterremo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}} = \mathrm{l}\left(\frac{1}{2}\,b+x+\sqrt{a+bx+x^2}\right)+C. \qquad (9)$$

486. Corollario I. Da questa formula si hanno le seguenti;

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{a+bx^m+x^{2m}}} = \frac{1}{m}\mathrm{l}\left(\frac{1}{2}\,b+x^m+\sqrt{a+bx^m+x^{2m}}\right)+C, \; (10)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ac+bcx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\mathrm{l}\left(\frac{1}{2}\,b+x+\sqrt{a+bx+x^2}\right)+C;$$

e sostituendo $\frac{a}{c}$ ad a, $\frac{b}{c}$ a b, ed $\frac{1}{\sqrt{c}}\,\mathrm{l}\sqrt{c}+C$ alla costante arbitraria C, avremo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\,\mathrm{l}\left(\frac{1}{2}b\sqrt{c}+x\sqrt{c}+\sqrt{a+bx+cx^2}\right)+C. \; (11)$$

487. Corollario II. Facendo nella (9) $a = 1, b = 0$, si trova

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \mathrm{l}\,(x+\sqrt{1+x^2})+C. \qquad (12)$$

488. Scolio. Siccome $d\,\text{ar tang}\,u = \dfrac{du}{1+u^2}$,

sarà $\qquad 2d\,\text{ar tang}\sqrt{u} = \dfrac{du}{(1+u)\sqrt{u}} = \dfrac{u'}{1+u}\,\dfrac{dx}{\sqrt{u}}; \qquad (13)$

dunque per $\qquad u' = 1+u, \qquad (14)$

avremo $\qquad \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{u}} = C + 2\,\text{ar tang}\sqrt{u}.$

Or dalla (14) si ha

$\dfrac{du}{1+u} = dx$, $u = e^{x+n} - 1$, dove n è cost. arbitraria; perciò

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{x+n}-1}} = C + 2\,\text{ar tang}\sqrt{e^{x+n}-1}\,; \qquad (15)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^{x+n}-1}} = C + \frac{2}{\mathrm{l}a} \operatorname{ar\,tang} \sqrt{a^{x+n}-1}; \tag{16}$$

la seconda delle quali si trova sostituendo $x\,\mathrm{l}a$ ad x, $n\,\mathrm{l}a$ ad n.

489. Problema III. *Integrare la funzione* $\dfrac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}$.

Integrando l'equazione (13) si trova

$$\int \frac{d\mathrm{l}\,(1+u)}{\sqrt{u}} = C + 2 \operatorname{ar\,tang} \sqrt{u}. \tag{17}$$

Facciasi $\quad u = \dfrac{A-x}{x-B}; \quad$ sarà $\quad 1+u = \dfrac{A-B}{x-B},$

$$\mathrm{l}\,(1+u) = \mathrm{l}\,(A-B) - \mathrm{l}(x-B), \quad d\mathrm{l}\,(1+u) = -\frac{dx}{x-B},$$

sostituendo queste espressioni nella (17) avremo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(A-x)(x-B)}} = C - 2 \operatorname{ar\,tang} \sqrt{\frac{A-x}{x-B}} \tag{18}$$

dove A e B rappresentano le radici della equazione $x^2-bx-x=0$.

490. Corollario. Dividendo per $\sqrt{c}$, e mutando a e b in $\dfrac{a}{c}$ e $\dfrac{b}{c}$, la (17) dà

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = C - \frac{2}{\sqrt{c}} \operatorname{ar\,tang} \sqrt{\frac{H-x}{x-K}}; \tag{19}$$

H e K essendo le radici della equazione $x^2 - \dfrac{b}{c}x - \dfrac{a}{c} = 0$. Sostituendo l'espressione analitica di queste radici avremo pure

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = C - \frac{2}{\sqrt{c}} \operatorname{ar\,tang} \sqrt{\frac{b-2cx+\sqrt{4ac+b^2}}{2cx-b+\sqrt{4ac+b^2}}}. \tag{20}$$

491. Scolio I. Se sarà $b=0$, $a=1$, avremo $A=1$, $B=-1$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = C - 2 \operatorname{ar\,tang} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = C - \operatorname{ar\,tang} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}; \tag{21}$$

la quale, perchè

$$\operatorname{ar\,tang} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{ar\,cos} x = \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{ar\,sen} x,$$

coincide colla (7) (n. 460).

492. Scolio II. Facendo $x = z + \frac{1}{2}b$, si trova

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{a+\frac{1}{4}b^2-z^2}};$$

ma per la (18) (n. 468) $\int \frac{dz}{\sqrt{a+\frac{1}{4}b^2-z^2}} = \text{ar sen}\,\frac{z}{\sqrt{a+\frac{1}{4}b^2}}$,

dunque $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = C + \text{ar sen}\,\frac{2x-b}{\sqrt{4a+b^2}}; \tag{22}$$

dividendo per $\sqrt{c}$ e mutando a e b in $\frac{a}{c}$ e $\frac{b}{c}$, avremo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = C + \frac{1}{\sqrt{c}}\,\text{ar sen}\,\frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}}.$$

ESEMPIO. $$\int \frac{dx}{bx-x^2} = C + \text{ar sen}\,\frac{2x-b}{b}. \tag{23}$$

493. SCOLIO III. Sostituendo $\sqrt{u}$ ad x la $d\,\text{ar sen}\,x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ dà

$$d\,\text{ar sen}\,\sqrt{u} = \frac{u'}{2\sqrt{1-u}}\,\frac{dx}{\sqrt{u}};$$

perciò ogniqualvolta sarà $$u' = 2\sqrt{1-u}, \tag{24}$$

avremo $$\int \frac{dx}{\sqrt{u}} = C + \text{ar sen}\,\sqrt{u};$$

ma la (24) dà $\frac{du}{2\sqrt{1-u}} = dx$, e quindi $u = 1-(A-x)^2$, perciò

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-(A-x)^2}} = C + \text{ar sen}\,\sqrt{1-(A-x)^2}.$$

Cangiando x in $\pm x + A$, avremo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = C \pm \text{ar sen}\,\sqrt{1-x^2};$$

questa coincide colla (8) (n. 464), perchè

$$\text{ar sen}\,x = \tfrac{1}{2}\pi \pm \text{ar sen}\,\sqrt{1-x^2}.$$

494. SCOLIO IV. L'equazione $t\sqrt{-1} = \text{l}\,(\cos t + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,t)$, facendo $\text{sen}\,t = x$, $\cos t = \pm\sqrt{1-x^2}$, $t = \text{ar sen}\,x$, dà

$$\text{ar sen}\,x = \frac{\text{l}\,(x\sqrt{-1}+\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{-1}}; \tag{25}$$

facendo $\cos t = \sqrt{1+x^2}$, $\text{sen}\,t = \pm x\sqrt{-1}$, $t = \pm\,\text{ar sen}\,x\sqrt{-1}$, la stessa equazione darà

$$l(x+\sqrt{1+x^2})=\frac{\text{ar sen}\, x\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}; \tag{26}$$

conseguentemente le note formule [(8) n. 464, (12) n. 487]

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=C+\text{ar sen}\, x, \tag{27}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=C+l(x+\sqrt{1+x^2}), \tag{28}$$

si cangeranno nelle seguenti

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=C+\frac{l(x\sqrt{-1}+\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{-1}}, \tag{29}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=C+\frac{\text{ar sen}\, x\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}. \tag{30}$$

Non sarà superfluo il notare che le formule (29) (30) sono le stesse formule (27) (28) colla x cangiata in $x\sqrt{-1}$.

Si noti che l'integrale di $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ mediante la (27) si esprime per un arco reale, e mediante la (29) per un log. immaginario; viceversa l'integrale di $\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ mediante la (28) viene espresso da un log. reale, e mediante la (30) da un arco immaginario. Questo avviene stante la relazione che sussiste tra gli archi di circolo e i logaritmi, indicata dalla equazione simbolica

$$t\sqrt{-1}=l(\cos t+\sqrt{-1}\,\text{sen}\, t).$$

Siffatta equazione dimostra chiaramente che ove sia reale l'arco dee l'espressione di esso data dai logaritmi essere di necessità immaginaria, e viceversa. La trasformazione degli archi reali in funzioni logaritmiche immaginarie si farà mediante la formula (25); quella dei logaritmi reali in funzione di archi immaginarj si farà per mezzo della formula (26).

495. Problema IV. *Integrare la funzione* $\frac{xdx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$.

Si osservi che $cx^2=a+bx+cx^2-a-bx$. Facendo $u=a+bx+cx^2$, avremo $2cxdx=du-bdx$; e quindi

$$\frac{xdx}{\sqrt{u}}=\frac{du}{2c\sqrt{u}}-\frac{b}{2c}\frac{dx}{\sqrt{u}},\quad \int\frac{xdx}{\sqrt{u}}=\frac{\sqrt{u}}{c}-\frac{b}{2c}\int\frac{dx}{\sqrt{u}}, \tag{31}$$

qualunque sia il segno di c.

Quindi, stante le formule (11) (18),

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{c}\sqrt{a+bx+cx^2} - \frac{b}{2c\sqrt{c}}\,\mathrm{l}\left(\frac{b}{2\sqrt{c}} + x\sqrt{c} + \sqrt{a+bx+cx^2}\right);$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = -\frac{1}{c}\sqrt{a+bx-cx^2} + \frac{b}{c\sqrt{c}}\text{ ar tang}\sqrt{\frac{H-x}{x-K}}.$$

496. Problema V. *Integrare la funzione* $dx\sqrt{a+bx+cx^2}$.
Integrando per parti si trova

$$\int dx\sqrt{u} = x\sqrt{u} - \int \frac{xdu}{2\sqrt{u}};$$

ovvero $$\int dx\sqrt{u} = x\sqrt{u} - \tfrac{1}{2}b\int \frac{xdx}{\sqrt{u}} - c\int \frac{x^2dx}{\sqrt{u}}; \qquad (32)$$

inoltre $$\int dx\sqrt{u} = \int \frac{udx}{\sqrt{u}} = a\int \frac{dx}{\sqrt{u}} + b\int \frac{xdx}{\sqrt{u}} + c\int \frac{x^2dx}{\sqrt{u}};$$

sommando $$\int dx\sqrt{u} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{u} + \tfrac{1}{2}a\int \frac{dx}{\sqrt{u}} + \tfrac{1}{4}b\int \frac{xdx}{\sqrt{u}};$$

dunque stante la (31)

$$\int dx\sqrt{u} = \frac{2cx+b}{4c}\sqrt{u} + \frac{4ac-b^2}{8c}\int \frac{dx}{\sqrt{u}}; \qquad (33)$$

qualunque sia il segno di c.

497. Corollario. Si muti a^2 in a, e facciasi $b=0$, $c=-1$, sarà

$$\int dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}a^2\text{ ar sen }\frac{x}{a}.$$

498. Problema VI. *Integrare la funzione* $\dfrac{x^2dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$.

Risulta dalla (32) la seguente

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{u}} = \frac{x}{c}\sqrt{u} - \frac{b}{2c}\int \frac{xdx}{\sqrt{u}} - \frac{1}{c}\int dx\sqrt{u};$$

quindi, stante la (31) e la (33), avremo

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{u}} = \frac{2cx-3b}{4c^2}\sqrt{u} + \frac{3b^2-4ac}{8c^2}\int \frac{dx}{\sqrt{u}}; \qquad (34)$$

qualunque sia il segno di c.

499. Problema VII. *Integrare la funzione* $x^m(a+bx^n)^p dx$.

1° Siccome $\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{\int x^{m-n+1} d(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)}$,
integrando per parti avremo

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx =$$

$$\frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1} - (m-n+1)\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}dx}{nb(p+1)}; \quad (35)$$

questa formula serve a diminuire m e ad accrescere p, e giova al caso di $m>0, p<0$.

2° Siccome $(a+bx^n)^{p+1} = a(a+bx^n)^p + bx^n(a+bx^n)^p$,

sarà per la (35) $\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} +$

$$\frac{-a(m-n+1)\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx - b(m-n+1)\int x^m(a+bx^n)^p dx}{nb(p+1)};$$

e quindi, perchè $nb(p+1) + b(m-n+1) = npb + bm + b$,

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx =$$

$$\frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1} - a(m-n+1)\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx}{b(np+m+1)}; \quad (36)$$

questa formula pure serve a diminuire m lasciando intatto p; giova anch'essa al caso di $m>0$.

3° Sostituendo nella (35) $m+n$ ad m, e $p-1$ a p, sarà

$$\int x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p - (m+1)\int x^m(a+bx^n)^p dx}{npb};$$

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p - npb\int x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}dx}{m+1}; \quad (37)$$

per questa formula cresce m e decresce p; essa serve al caso di $m<0$ e $p>0$.

4° Sostituendo nella (36) $m+n$ ad m, avremo

$$\int x^{m+n}(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1} - a(m+1)\int x^m(a+bx^n)^p dx}{b(np+m+n+1)},$$

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx =$$

$$\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1} - b(np+m+n+1)\int x^{m+n}(a+bx^n)^p dx}{a(m+1)}; \quad (38)$$

per questa formula p non muta e si accresce la m; essa serve al caso di $m < 0$.

5° Siccome $x^{m+n} = \frac{x^m}{b}(a+bx^n-a) = \frac{x^m}{b}(a+bx^n) - \frac{a}{b}x^m$, ed

$$x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}dx = \frac{x^m}{b}(a+bx^n)^p dx - \frac{a}{b}x^m(a+bx^n)^{p-1}dx,$$

la formula (37) darà

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx =$$

$$\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p - np\int x^m(a+bx^n)^p dx + npa\int x^m(a+bx^n)^{p-1}dx}{m+1},$$

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p + npa\int x^m(a+bx^n)^{p-1}dx}{m+np+1}; \quad (39)$$

qui non si muta m e decresce p; la form. serve al caso di $p > 0$.

6° Pongasi nella formula (39) $p+1$ in luogo di p, avremo

$$\int x^m(a+bx^n)^{p+1}dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1} + na(p+1)\int x^m(a+bx^n)^p dx}{m+np+n+1},$$

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx =$$

$$\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1} - (m+np+n+1)\int x^m(a+bx^n)^{p+1}dx}{na(p+1)}; \quad (40)$$

per questa formula rimane intatto m e cresce p; la formula giova al caso di $p < 0$.

Esempio. Debbasi integrare $\frac{x^r dx}{\sqrt{ax-x^2}} = x^{r-\frac{1}{2}}(a-x)^{-\frac{1}{2}}dx$.

Facendo $b = -1, n = 1, m = r - \frac{1}{2}, p = -\frac{1}{2}$, la (36) dà

$$\int \frac{x^r dx}{\sqrt{ax-x^2}} = -\frac{x^{r-1}\sqrt{ax-x^2}}{r} + \frac{(2r-1)a}{2r}\int \frac{x^{r-1}dx}{\sqrt{ax-x^2}};$$

e continuando ad usare questa formula giungeremo alla funzione $\frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}$ il cui integrale è $c + \text{ar sen}\frac{2x-a}{a}$ [n. 492 (23)].

500. Scolio. Uno dei modi per agevolare e rendere possibile l'integrazione delle funzioni irrazionali consiste talvolta nel trasformarle in funzioni razionali. Questa trasformazione non può

farsi per altro che in pochi casi; i seguenti meritano di esser presi in ispeciale esame.

I. Funzioni irrazionali monomie. Ogni funzione Xdx in cui X non contenga che irrazionali monomie, potrà sempre rendersi razionale; infatti gl'irrazionali monomj contenuti in X sieno

$\sqrt[m]{x}$, $\sqrt[n]{x}$, $\sqrt[p]{x}$; facendo $x = z^{mnp}$; avremo

$$dx = pnmz^{pnm-1}dz, \quad \sqrt[m]{x} = z^{np}, \quad \sqrt[n]{x} = z^{mp}, \quad \sqrt[p]{x} = z^{mn};$$

sicchè la funzione Xdx diverrà razionale.

II. Funzioni irrazionali del 2° grado.

1° Sia $$Xdx = \frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}}.$$

Porremo $\sqrt{a + bx + cx^2} = z - x$; quindi risulterà

$$x = \frac{z^2 - a}{b + 2z}, \quad dx = \frac{a + bz + z^2}{(b + 2z)^2}\, 2dz,$$

$$\sqrt{a + bx + x^2} = z - x = \frac{a + bz + z^2}{b + 2z}, \quad Xdx = \frac{2dz}{b + 2z};$$

integrando ritroveremo la formula (9) n. 485.

2° Sia $$Xdx = \frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}},$$

ed $$x^2 - bx - a = (x - A)(x - B).$$

Porremo $\sqrt{a + bx - x^2} = \sqrt{(A - x)(x - B)} = (x - B)z$;

donde risulterà $x = \dfrac{A + Bz^2}{1 + z^2}$, $dx = \dfrac{2(B - A)zdz}{(1 + z^2)^2}$,

$$\sqrt{a + bx - x^2} = -\frac{B - A}{1 + z^2}, \quad Xdx = -\frac{2zdz}{1 + z^2}.$$

3° Abbiasi $Xdx = \sqrt{a + bx \pm x^2} \, . \, dx$; sarà

$$Xdx = \frac{(a + bx \pm x^2)dx}{\sqrt{a + bx \pm x^2}};$$

talchè la funzione potrà rendersi razionale mediante i due modi usati precedentemente.

III. Funzioni irrazionali binomie.

Abbiasi $$Xdx = x^m(a + bx^n)^p.$$

Supporremo che gli esponenti m ed n sieno interi, perchè ove fossero fratti la funzione potrebbe assoggettarsi alla trasformazione indicata qui sopra relativamente alle differenziali irrazionali monomie. Supponiamo adunque che solo p sia fratto; pongasi $a + bx^n = z$; avremo

$$x = \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{nb}\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} dz;$$

$$x^m(a + bx^n)^p = \frac{1}{nb} z^p \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} dz.$$

dunque se $\frac{m+1}{n}$ sarà un numero intero positivo o negativo, la funzione di z non avrà altro irrazionale che il fattore z^p.

Ciò posto si osservi che

$$x^m(a + bx^n)^p = x^{m+np}(ax^{-n} + b)^p dx;$$

dalla condizione suespressa risulta che la funzione binomia potrà rendersi razionale quando il numero $\frac{m+np+1}{-n}$ ovvero $\frac{m+1}{n} + p$ sarà intero.

Dunque *l'integrazione della funzione binomia* $x^m(a + bx^n)^p$ *potrà sempre ridursi alla integrazione d'una funzione razionale quando uno de' due numeri* $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n} + p$ *sarà intero.*

IV. L'integrazione delle funzioni esponenziali, e delle funzioni logaritmiche.

501. Principio. Sia $X = Fx$, $Z = fz$, $z = \varphi x$; sia inoltre

$$\int X dx = X_1, \ \int X_1 dz = X_2, \ \ldots \ \int X^{n-1} dz = X^n;$$

mediante la integrazione per parti avremo

$$\int XZdx = ZX_1 - \int X_1 Z' dz, \quad \int X_1 Z' dz = Z'X_2 - \int X_2 Z'' dz, \ \ldots$$

$$\int XZdx = ZX_1 - Z'X_2 + Z''X_3 \ldots \mp Z^{(n-1)}X_n \pm \int X_n Z^{(n)} dz. \quad (1)$$

Notisi che facendo uso di questa formula le derivate Z', Z'', Z''', ec. si determineranno come se z fosse variabile indipendente.

502. Corollario I. Sia $X=1$, $z=x$; Z funzione di x; avremo stante la (1)

$$\int Xdx=X_1=x\,,\quad \int X_1dz=X_2=\frac{x^2}{2},\ldots\int X_{n-1}dz=\frac{x^n}{2.3\ldots n}\,; \quad (2)$$

$$\int Zdx=xZ-\frac{1}{2}x^2Z'+\frac{1}{2.3}x^3Z''\ldots\pm\frac{1}{2.3\ldots n}\int x^nZ^{(n)}dx\,. \quad (3)$$

503. Corollario II. Sia $Z=z^n$, avremo dalla (1)

$$\int Xz^ndx=X_1z^n-n\,X_2z^{n-1}+n(n-1)X_3z^{n-2}\ldots\pm n(n-1)\ldots 2.1\int X_ndz. \quad (4)$$

504. Problema I. *Integrare la funzione $a^x\varphi x dx$.*

Siccome $a^x=e^{xla}$ l'integrale richiesto si otterrà tostochè abbiasi l'integrale di $e^{xla}\varphi xdx$, ovvero di $e^{ax}\varphi xdx$, purchè dopo il calcolo laddove è a pongasi la. Facendo $Z=\varphi x$, $z=x$, $X=e^{ax}$, avremo, stante la (1),

$$Z'=\varphi'x,\ Z''=\varphi''x,\ \text{ec.}\quad X_1=\frac{e^{ax}}{a},\quad X_2=\frac{e^{ax}}{a^2},\ldots\ X_n=\frac{e^{ax}}{a^n}\,;$$

$$\int e^{ax}\varphi xdx=\frac{e^{ax}}{a}\left(\varphi x-\frac{\varphi'x}{a}+\frac{\varphi''x}{a^2}\ldots\pm\frac{\varphi^{(n-1)}x}{a^{n-1}}\right)\pm\frac{1}{a^n}\int e^{ax}\,\varphi^{(n)}xdx\,. \quad (5)$$

505. Problema II. *Integrare la funzione $e^{ax}x^ndx$.*

Dalla precedente, facendo $\varphi x=x^n$ ricaveremo

$$\int e^{ax}x^ndx=\frac{e^{ax}}{a}\left(x^n-\frac{nx^{n-1}}{a}+\frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^2}\ldots\pm\frac{n(n-1)\ldots 2.1}{a^n}\right). \quad (6)$$

506. Problema III. *Integrare la funzione $\dfrac{e^{ax}dx}{x^n}$.*

Facendo $\quad Z=e^{ax},\quad z=ax,\quad X=\dfrac{1}{x^n}$, sarà

$$Z'=\frac{de^{ax}}{dz}=e^{ax},\quad Z''=\frac{dZ'}{dz}=e^{ax}\,,\ \ldots.\ Z^{(n)}=e^{ax}.$$

$$X_1=-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}\,,\ X_2=\frac{a}{(n-1)(n-2)x^{n-2}},\ldots\ X_{n-1}=\frac{a^{n-2}}{(n-1)(n-2)\ldots 2.1.x}\,;$$

non si può procedere oltre perchè l'ultimo fattore del denominatore di X_n diverrebbe zero ed X_n infinito; dunque la (1) darà

$$\int\frac{e^{ax}dx}{x^n}=-e^{ax}\left(\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}-\frac{a}{(n-1)(n-2)x^{n-2}}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\mp\frac{a^{n-2}}{(n-1)(n-2)\ldots 2.1.x}\right)\pm\frac{a^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 2.1.}\int\frac{e^{ax}dx}{x}\,. \quad (7)$$

L'integrale della funzione $\frac{e^{ax}dx}{x^n}$, n essendo intero, dipende adunque dall'integrale della funzione $\frac{e^{ax}dx}{x}$, il quale non si può ottenere altrimenti che sviluppando in serie l'esponenziale e^{ax}; laonde sarà

$$e^{ax}=1+\frac{ax}{1}+\frac{a^2x^2}{1.2}+\frac{a^3x^3}{1.2.3}+\ldots.$$

$$\int\frac{e^{ax}dx}{x}=\mathrm{l}x+ax+\frac{a^2x^2}{2.2}+\frac{a^3x^3}{2.3.3}+\ldots. \quad (8)$$

507. Scolio. Se nella funzione $e^{ax}\varphi x dx$ fosse φx una potenza fratta di x l'una o l'altra delle due formule (5) (6) varrebbe a ridurre l'esponente della x ad una frazione positiva o negativa minore dell'unità.

508. Problema IV. *Integrare la funzione* $\mathrm{l}^n x X dx$.

Facendo nella formula (4) n. 503, $z=\mathrm{l}x$, avremo

$$\int \mathrm{l}^n x\, Xdx = X_1\mathrm{l}^n x - nX_2\mathrm{l}^{n-1}x + n(n-1)X_3\mathrm{l}^{n-2}x - \ldots$$

$$\pm n(n-1)\ldots 2.1 X_n \mathrm{l}x \pm n(n-1)\ldots 2.1\int\frac{X_n dx}{x}; \quad (9)$$

dove sarà $\quad X_1=\int Xdx,\ X_2=\int\frac{X_1dx}{x},\ X_3=\int\frac{X_2dx}{x},\ \ldots$

509. Problema V. *Integrare la funzione* $\mathrm{l}^n x.x^m dx$.

Facendo nella formula precedente $X=x^m$, avremo

$$X_1=\frac{x^{m+1}}{m+1},\ X_2=\frac{x^{m+1}}{(m+1)^2},\ \ldots X_n=\frac{x^{m+1}}{(m+1)^n},\ \int\frac{X_n dx}{x}=\frac{x^{m+1}}{(m+1)^{n+1}};$$

$$\int \mathrm{l}^n x.x^m dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}\left(\mathrm{l}^n x-\frac{n\mathrm{l}^{n-1}x}{m+1}+\frac{n(n-1)\mathrm{l}^{n-2}x}{(m+1)^2}\ldots\pm\frac{n(n-1)\ldots 2.1}{(m+1)^n}\right)(10)$$

510. Scolio. Questa formula può ricavarsi dalla (5). Infatti facciasi $e^x=z$; sarà $e^{ax}=z^a$; $e^{ax}dx=z^{a-1}dz$, $x=\mathrm{l}z$, e quindi

$$\int \mathrm{l}^n z.z^{a-1}.dz=\frac{z^a}{a}\left(\mathrm{l}^n z-\frac{n\mathrm{l}^{n-1}z}{a}+\frac{n(n-1)\mathrm{l}^{n-2}z}{a^2}\ldots\pm\frac{n(n-1)\ldots 2.1}{a^n}\right);$$

or mutando z in x, ed a in $m+1$, avremo la formula (10).

511. Problema VI. *Integrare la funzione* $\frac{x^m dx}{l^n x}$.

La formula (7) (n. 506) ove si faccia $e^z = z$, e si cangi dipoi z in x ed a in $m+1$, darà

$$\int \frac{x^m dx}{l^n x} = -x^{m+1}\Big(\frac{1}{(n-1)l^{n-1}x} - \frac{m+1}{(n-1)(n-2)l^{n-2}x} + \dots$$

$$\mp \frac{(m+1)^{n-2}}{(n+1)(n-2)\dots 2.1 lx)} \pm \frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\dots 2.1}\int \frac{x^m dx}{lx}. \quad (11)$$

L'integrale di $\frac{x^m dx}{lx}$ dipenderà da quello di $\frac{e^{az}dx}{x}$: perciò non si potrà esprimere che per una serie la quale si dedurrà dalla (8) (n. 506) facendovi le medesime sostituzioni indicate qui sopra.

V. L'integrazione delle funzioni circolari.

512. Problema I. *Integrare la funzione* $\operatorname{sen} x \cos x dx$.

Sarà $\operatorname{sen} x \cos x dx = \operatorname{sen} x d \operatorname{sen} x = -\cos x d \cos x$;

$$\int \operatorname{sen} x \cos x dx = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + c = -\tfrac{1}{2}\cos^2 x + c. \quad (1)$$

513. Problema II. *Integrare la funzione* $\frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x}$.

Sarà $\frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x} = \frac{(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)dx}{\operatorname{sen} x \cos x} = \frac{d \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} - \frac{d \cos x}{\cos x}$;

quindi
$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x} = lc \operatorname{tang} x. \quad (2)$$

514. Problema III. *Integrare le funzioni* $\frac{dx}{\operatorname{sen} x}$, $\frac{dx}{\cos x}$.

Sarà $\frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \frac{d\frac{1}{2}x}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}x \cos\frac{1}{2}x}$; $\quad \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = lc \operatorname{tang}\frac{1}{2}x$. (3)

$\frac{dx}{\cos x} = \frac{d(\frac{1}{2}\pi \pm x)}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\pi \pm x)}$; $\quad \int \frac{dx}{\cos x} = lc \operatorname{tang}(\frac{1}{4}\pi \pm \frac{1}{2}x)$. (4)

515. Problema IV. *Integrare le funzioni* $\operatorname{tang} x dx$, $\cot x dx$.

Sarà $\operatorname{tang} x dx = \frac{\operatorname{sen} x dx}{\cos x}$, $\quad \int \operatorname{tang} x dx = l \frac{c}{\cos x}$, (5)

$\cot x dx = \frac{\cos x dx}{\operatorname{sen}}$, $\quad \int \cot x dx = lc \operatorname{sen} x$. (6)

516. **Problema V.** *Integrare le funzioni* $\operatorname{sen}^2 x dx$, $\cos^2 x dx$.

Essendo $dx = (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)dx$, $d(\operatorname{sen} x \cos x) = (\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x)dx$;

avremo $\int \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x \cos x + c,$ (7)

$$\int \cos^2 x dx = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} x \cos x + c. \tag{8}$$

517. **Problema VI.** *Integrare le funzioni* $\operatorname{sen} 2x dx$, $\cos 2x dx$.

Sarà $\operatorname{sen} 2x dx = 2 \operatorname{sen} x d \operatorname{sen} x = -2 \cos x d \cos x$,

$$\int \operatorname{sen} 2x dx = \operatorname{sen}^2 x + c = -\cos^2 x + c; \tag{9}$$

$$\cos 2x dx = \cos^2 x dx - \operatorname{sen}^2 x dx = \cos x\, d \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x\, d \cos x,$$

$$\int \cos 2x dx = \operatorname{sen} x \cos x + c. \tag{10}$$

518. **Problema VII.** *Integrare la funzione* $\operatorname{sen}^m x \cos^n x dx$.

1° Sia $m > 0$, ed n qualunque; avremo

$$\operatorname{sen}^m x \cos^n x dx = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x\, d \cos^{n+1} x}{n+1};$$

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \operatorname{sen}^{m-2} x \cos^{n+2} x dx;$$

ma $\operatorname{sen}^{m-2} x \cos^{n+2} x\, dx = \operatorname{sen}^{m-2} x \cos^n x\, dx - \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$;

perciò risulta

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^{m-2} x \cos^n x dx. \tag{11}$$

2° Sia $n > 0$, ed m qualunque; sostituendo $\frac{1}{2}\pi - x$ ad x, e cangiando m in n e viceversa, otterremo

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x dx. \tag{12}$$

3° Sia $m < 0$, ed n qualunque; ricavando dalla (11) il valore di $\int \operatorname{sen}^{m-2} x \cos^n x dx$, e mutando m in $-m+2$, avremo

$$\int \frac{\cos^n x dx}{\operatorname{sen}^m x} = -\frac{\cos^{n+1} x}{(m-1)\operatorname{sen}^{m-1} x} + \frac{m-n-2}{m-1}\int \frac{\cos^n x dx}{\operatorname{sen}^{m-2} x}. \tag{13}$$

4° Sia $n < 0$, ed m qualunque; ricavando dalla (12) il valore di $\int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x dx$, e cangiando n in $-n+2$, sarà

$$\int \frac{\operatorname{sen}^m x dx}{\cos^n x} = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-m-2}{n-1}\int \frac{\operatorname{sen}^m x\, dx}{\cos^{n-2} x}. \tag{14}$$

5° Sia $m > 0, n = 0$; la (11) darà

$$\int \operatorname{sen}^m x\, dx = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \operatorname{sen}^{m-2} x\, dx. \quad (15)$$

6° Sia $m < 0, n = 0$; la (14) darà

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^m x} = -\frac{\cos x}{(m-1)\operatorname{sen}^{m-1} x} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^{m-2} x}. \quad (16)$$

7° Sia $n > 0, m = 0$; la (12) darà

$$\int \cos^n x\, dx = \frac{\operatorname{sen} x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx. \quad (17)$$

8° Sia $n < 0, m = 0$; la (14) darà

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\operatorname{sen} x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}. \quad (18)$$

9° Sia $m<0, n<0$; perchè $dx = \operatorname{sen}^2 x dx + \cos^2 x dx$, avremo

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^m x \cos^n x} = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^{m-2} x \cos^n x} + \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x} \quad (19)$$

10° Sia $m = n$, perchè $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$, fatto $2x = u$,

sarà $$\int \operatorname{sen}^m x \cos^m x\, dx = \frac{1}{2^{m+1}}\int \operatorname{sen}^m u\, du; \quad (20)$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^m x \cos^m x} = 2^{m-1}\int \frac{du}{\operatorname{sen}^m u}. \quad (21)$$

519. Scolio I. Alle formule precedenti aggiungeremo

$$\int \operatorname{sen} x \cos^n x dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + c, \quad (22)$$

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos x dx = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x}{m+1} + c; \quad (23)$$

le quali si ottengono e dalle formule (11) e (12), e per integrazione immediata.

520. Scolio II. Frattanto si vede che l'integrazione di $\operatorname{sen}^m x \cos^n x dx$, stante la (11) si farà dipendere da quella di $\cos^n x dx$ o di $\operatorname{sen} x \cos^n x dx$ secondochè m sarà pari o dispari; stante la (12) da quella di $\operatorname{sen}^m x dx$ o di $\operatorname{sen}^m x \cos x dx$. L'integrale poi di $\frac{\cos^n x dx}{\operatorname{sen}^m x}$ dipenderà in virtù della (13) da quella di

$\cos^n x dx$ o di $\frac{\cos^n x dx}{\text{sen}\, x}$; e per la (14) l'integrale di $\frac{\text{sen}^m x dx}{\cos^n x}$ si ridurrà all'integrale di $\text{sen}^m x dx$ o di $\frac{\text{sen}^m x dx}{\cos x}$. Or gl'integrali di $\text{sen}\, x \cos^n x dx$ e $\text{sen}^m x \cos x dx$ sono dati dalle formule (22) (23); e gl'integrali di $\cos^n x dx$, $\text{sen}^m x dx$, $\frac{\cos^n x dx}{\text{sen}\, x}$, $\frac{\text{sen}^m x dx}{\cos x}$ per mezzo delle formule (17) (15) (13) (14) si faranno dipendere dagl'integrali di dx, $\cos x dx$, $\text{sen}\, x dx$, $\frac{dx}{\text{sen}\, x}$, $\frac{\cos x dx}{\text{sen}\, x}$ ovvero $\cot x$, $\frac{dx}{\cos x}$, $\frac{\text{sen}\, x dx}{\cos x}$ ovvero $\text{tang}\, x$, i quali son noti.

Le formule (16) (18) ridurranno anch'esse gl'integrali di $\frac{dx}{\text{sen}^m x}$, $\frac{dx}{\cos^n x}$ agl'integrali di dx, $\frac{dx}{\text{sen}\, x}$, $\frac{dx}{\cos x}$.

In fine per la formula (19) l'integrale di $\frac{dx}{\text{sen}^m x \cos^n x}$, dipenderà dagl' integrali suddetti o da quello di $\frac{dx}{\text{sen} x \cos x}$.

521. Scolio III. È da notare che le funzioni circolari della forma $\text{sen}^m x \cos^n x dx$ possono trasformarsi in funzioni algebriche binomie per essere integrate alla maniera di queste. Pongasi $\text{sen}\, x = z$ e $\cos x dx = dz$, oppure $\cos x = u$ e $\text{sen}\, x dx = -du$; sarà $\text{sen}^m x \cos^n x \, dx = z^m (1 - z^2)^{\frac{1}{2}(n-1)} dz = -u^n (1 - u^2)^{\frac{1}{2}(m-1)} du$; donde si vede che l'integrale si potrà agevolmente ottenere quando uno de' numeri m, o n, o $m + n$ sia pari.

522. Scolio IV. È da avvertire altresì che l'integrazione delle funzioni circolari potrà talvolta semplicizzarsi assai sostituendo alle potenze de' seni e dei coseni di x gli sviluppi loro in funzioni lineari de' seni e de' coseni dei multipli di x.

523. Scolio V. Le formule (74) e (75) n. 260, dimostrano che qualunque funzione circolare può trasformarsi in funzione esponenziali. Dunque l'integrazione delle funzioni circolari si può ricondurre a quella delle funzioni esponenziali.

524. Problema VIII. *Integrare* $e^{ax} \cos bx dx$, e^{ax} sen $bx dx$.

Integrando per parti si trova

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax} \cos bx}{a} + \frac{b}{a} \int e^{ax} \text{sen}\, bx dx,$$

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx dx = \frac{e^{ax} \operatorname{sen} bx}{a} - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx dx;$$

queste equazioni conducono poi alle seguenti

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{a \cos bx + b \operatorname{sen} bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + c,$$

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx dx = \frac{a \operatorname{sen} bx - b \operatorname{sen} bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + c.$$

525. PROBLEMA IX. *Integrare* $(\operatorname{ar} \cos x)^n dx$, $(\operatorname{ar} \operatorname{sen} x)^n dx$.
Facendo $X = 1$, $z = \operatorname{ar} \cos x$, $= \operatorname{ar} \operatorname{sen} x$, la formula (4)
(n. 502), darà $\int (\operatorname{ar} \cos x)^n dx =$

$$(\operatorname{ar}\cos x)^n \left[x - \frac{n\sqrt{1-x^2}}{\operatorname{ar}\cos x} - \frac{n(n-1)x}{(\operatorname{ar}\cos x)^2} + \frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{1-x^2}}{(\operatorname{ar}\cos x)^3} + \ldots \right] + c$$

$$\int (\operatorname{ar} \operatorname{sen} x)^n dx =$$

$$(\operatorname{ar}\operatorname{sen} x)^n \left[x + \frac{n\sqrt{1-x^2}}{\operatorname{ar}\operatorname{sen} x} - \frac{n(n-1)x}{\operatorname{ar}\operatorname{sen} x)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{1-x^2}}{(\operatorname{ar}\operatorname{sen} x)^3} + \ldots \right] + c$$

526. SCOLIO. Si osservi che mediante l'integrazione per parti si ha

$$\int X \operatorname{ar} \operatorname{sen} x.dx = \operatorname{ar} \operatorname{sen} x \int X dx - \int \frac{dx \int X dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int X \operatorname{ar} \operatorname{tang} x.dx = \operatorname{ar} \operatorname{tang} x \int X dx - \int \frac{dx \int X dx}{1 + x^2};$$

di questa guisa l'integrazione delle funzioni contenenti archi di circolo si riduce ad una integrazione di funzioni algebriche.

VI. L'integrazione per serie.

527. DEFINIZIONE. *Integrazione per serie* dicesi ogni metodo analitico diretto a determinare l'integrale d'una funzione sotto la forma d'una serie infinita.

528. PRINCIPIO I. Sia $fxdx$ la funz. da integrarsi; avremo

$$fx = f0 + \frac{f'0}{1} x + \frac{f''0}{1.2} x^2 + \frac{f'''0}{1.2.3} x^3 \ldots + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{1.2\ldots n} x^n, \quad (1)$$

$$fxdx = f0dx + \frac{f'0}{1} xdx + \frac{f''0}{1.2} x^2dx + \frac{f'''0}{1.2.3} x^3dx + \ldots$$

$$\int fxdx = c + \frac{f0}{1}x + \frac{f'0}{1.2}x^2 + \frac{f''0}{1.2.3}x^3 + \frac{f'''0}{1.2.3.4}x^4 + \ldots \quad (2)$$

Questo è l' integrale della funzione $fxdx$ sotto forma di serie infinita.

529. Scolio. Siffatta serie sarà convergente ogniqualvolta sarà convergente la serie (1); infatti la serie (1) è convergente quando il termine complementario per tutti i valori di x compresi fra 0 ed x può acquistare un valore tanto più piccolo quanto più è grande n, e riuscire minore di qualunque quantità data. Sia V il maggior valore che può acquistare il coefficiente $\frac{f^{(n)}(\theta x)}{1.2\ldots n}$; se il termine complementario della serie (1) soddisfarà alla condizione di convergenza, anche il termine $\frac{Vx^{n+1}}{n+1}$, ed il termine complementario delle serie (2) soddisfaranno alla condizione medesima.

530. Principio II. La serie (5) n. 89, facendo $i=x$, $h=-x$, dà

$$\varphi 0 = \varphi x - \frac{\varphi' x}{1}x + \frac{\varphi'' x}{1.2}x^2 - \frac{\varphi''' x}{1.2.3}x^3 + \ldots .$$

$$\varphi x = \varphi 0 + \frac{\varphi' x}{1}x - \frac{\varphi'' x}{1.2}x^2 + \frac{\varphi''' x}{1.2.3}x^3 - \ldots . \quad (3)$$

Ciò posto supponiamo che $c + \varphi x$ sia l' integrale della funzione $fxdx$; avremo $\int fxdx = c + \varphi x$; ovvero in virtù della (3)

$$\int fxdx = c + \varphi 0 + \frac{\varphi' x}{1}x - \frac{\varphi'' x}{1.2}x^2 + \frac{\varphi''' x}{1.2.3}x^3 - \frac{\varphi^{\text{IV}} x}{1.2.3.4}x^4 + \ldots$$

$\varphi 0$ essendo costante si può includere nella costante c; ed a $\varphi' x$ $\varphi'' x, \varphi''' x, \varphi^{\text{IV}} x\ldots$ potremo sostituire $fx, f'x, f''x, f'''x$; dunque

$$\int fxdx = c + \frac{fx}{1}x - \frac{f'x}{1.2}x^2 + \frac{f''x}{1.2.3}x^3 - \ldots \quad (4)$$

Questa è la serie nota sotto il nome di *Serie di Giovanni Bernoulli;* anche di essa ci potremo valere ad ottenere l' integrale della funzione $fxdx$ espresso per una serie infinita.

531. Scolio I. Notisi che sì in questa come nella equazione (2) la costante c deve determinarsi attribuendo alla x un valore particolare il quale renda la serie convergente, o che sia il limite dei valori che soddisfanno alle condizioni di convergenza, perchè in ogni altro caso la serie non dà altrimenti il valore della funzione donde è stata desunta.

532. Scolio II. Talvolta il calcolo delle successive derivate $f'x, f''x, f'''x, \ldots$ riuscirà assai laborioso e difficile; e potrà ottenersi più facilmente svolgendo in serie fx moltiplicando per dx e integrando i termini risultanti.

533. Scolio III. La serie di Giovanni Bernoulli concide colla formula (3) n. 502, dove Z rappresenta la funzione fx.

534. Scolio IV. Può la integrazione per serie servire talvolta a sviluppare in serie una funzione data fx: imperocchè essendo $fx = \int d\,fx = \int f'x\,dx$, è manifesto che la serie esprimente l'integrale $\int f'x\,dx$ sarà lo sviluppo di fx. Questo metodo riesce utilissimo specialmente nel caso in cui fx sia funzione trascendente ed $f'x$ funzione algebrica, come si vedrà nei seguenti problemi.

535. Problema I. *Sviluppare in serie* $\mathrm{l}(1+x)$. Primieramente si osservi che $d\mathrm{l}(1+x) = (1+x)^{-1}\,dx$; per cui sarà

$$fx = (1+x)^{-1},\quad f'x = -(1+x)^{-2},\quad f''x = 1.2(1+x)^{-3},\ \text{ec.}$$
$$f0 = 1,\ f'0 = -1,\ f''0 = 1.2,\ f'''0 = -1.2.3,\ \text{ec.}$$

Quindi in virtù della equazione (4) avremo

$$\mathrm{l}(1+x) = c + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

questa serie riesce tanto più convergente quanto più è piccola la x; facendo $x = 0$ (n. 531), si trova $\mathrm{l}1 = 0$, dunque $c = 0$, e perciò

$$\mathrm{l}(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

536. Problema II. *Sviluppare in serie la funzione* ar sen x.

Si osservi che $d\,\text{ar sen}\,x = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$. Ora la formula newtoniana del binomio dà

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots$$

moltiplicando per dx e integrando, avremo

$$\text{ar sen}\,x = c + x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^7 + \ldots$$

infiniti sono gli archi cui corrisponde il seno x, ma siccome tutti questi archi medesimi si deducono come sappiamo dal più piccolo di essi, perciò supporremo che ar sen x sia appunto il più piccolo di tutti gli archi cui spetta il seno x, cioè che ar sen x non sia $> \frac{1}{2}\pi$. Per determinare la costante c porremo

mente ai valori di x che rendono convergente la serie ottenuta. Or questa serie riesce tanto più convergente quanto più è piccola la x, e perciò potremo porre $x=0$ (n. 531); ed allora avremo arsen$0=c$; ma ar sen $0=0$, dunque $c=0$; dunque

$$\text{ar sen}\, x = x + \frac{1.1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 \ldots + \frac{1.3.5\ldots(n-2)}{2.4.6\ldots(n-1).n}x^n \ldots$$

537. Corollario I. Ponendo $x=1$ avremo ar sen $x=\frac{1}{2}\pi$, ed

$$\tfrac{1}{2}\pi = 1 + \frac{1.1}{2.3} + \frac{1.3.1}{2.4.5} + \frac{1.3.5.1}{2.4.6.7} \ldots + \frac{1.3.5\ldots(n-2).1}{2.4.6\ldots(n-1).n} + \ldots$$

538. Corollario II. Ponendo $x=\frac{1}{2}$, avremo ar sen $x=\frac{1}{6}\pi$, ed

$$\tfrac{1}{6}\pi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{1.3.1}{2.4.5.2^5} + \frac{1.3.5.1}{2.4.6.7.2^7} + \frac{1.3.5\ldots(n-2).1}{2.4.6\ldots(n-1).n.2^n} \ldots$$

539. Problema III. *Sviluppare in serie la funzione* ar tang x. Si osservi che d ar tang $x = (1+x^2)^{-1}dx$; ora

$$(1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$

moltiplicando per dx e integrando, avremo

$$\text{ar tang}\, x = c + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

supponendo che ar tang x sia non $> \frac{1}{2}\pi$, e facendo $x=0$ (perchè la serie riesce tanto più convergente quanto più è piccola la x), avremo ar tang $0=c$, dunque $c=0$; dunque

$$\text{ar tang}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

540. Corollario I. Ponendo $x=1$, avremo ar tang $x=\frac{1}{4}\pi$, ed

$$\tfrac{1}{4}\pi = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

541. Corollario II. Ponendo tang $x=\frac{1}{2}$, tang $y=\frac{1}{3}$, sarà tang $(x+y)=1$ (*); dunque

$$\tfrac{1}{4}\pi = x + y \text{, cioè } \tfrac{1}{4}\pi = \text{ar tang}\, \tfrac{1}{2} + \text{ar tang}\, \tfrac{1}{3};$$

(*) $\text{tang}(x+y) = \dfrac{\text{tang}\, x + \text{tang}\, y}{1 - \text{tang}\, x\, \text{tang}\, y}$.

dimanierachè facendo nello sviluppo di ar tang x, $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{3}$, e sommando i risultati, avremo

$$\tfrac{1}{4}\pi=\frac{1}{2}-\frac{1}{3.2^3}+\frac{1}{5.2^5}-\ldots+\frac{1}{3}-\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}-\ldots$$

serie assai più convergente della precedente.

542. Corollario III. Per tang $x=\frac{1}{5}$, sarà tang $2x=\frac{5}{12}$, tang $4x=\frac{120}{119}$ (*). Sia $y=4x-\frac{1}{4}\pi$; sarà tang $y=\frac{1}{239}$ (**), ed

$$\tfrac{1}{4}\pi=\frac{4}{5}-\frac{4}{3.5^3}+\frac{4}{5.5^5}-\ldots-\frac{1}{239}+\frac{1}{3.239^3}-\frac{1}{5.239^5}+\ldots$$

543. Scolio I. Frattanto dalle cose dette si raccoglie che una funzione $\varphi x\, dx$ può sempre riputarsi differenziale esatta d'una certa funzione di x; imperocchè o $\varphi x\, dx$ sarà il differenziale d'una funzione cognita di x, ed in questo caso l'integrazione potrà effettuarsi immediatamente, o l'integrazione si farà sviluppando in serie la funzione φx e prendendo l'integrale d'ogni termine.

544. Scolio II. Per mezzo del calcolo integrale non solo si possono date le funzioni trovare le serie, ma ben anche date che sieno le serie si possono trovare talvolta le funzioni corrispondenti; cioè si possono trovare le somme delle serie medesime, ove per altro sieno convergenti. Il metodo consiste nel moltiplicare le serie proposte per un tale fattore differenziale che renda i suoi termini integrabili, e che conduca inoltre ad una serie la quale si sappia sommare.

Esempio. Sia $s=x+2x^2+3x^3\ldots+nx^n\, dx$.

Avremo

$$\frac{s dx}{x}=dx+2x\,dx+3x^2\,dx\ \ldots+nx^{n-1}\,dx;$$

integrando

$$\int\frac{s dx}{x}=x+x^2+x^3\ldots.+x^n=\frac{x-x^{n+1}}{1-x};$$

(*) $\tang 2x=\dfrac{2\tang x}{1-\tang^2 x}$. (**) $\tang(4x-\frac{1}{4}\pi)=\dfrac{\tang 4x-1}{\tang 4x+1}$.

differenziando e sopprimendo il fattore dx,

$$s=\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}.$$

545. Scolio. Il suindicato metodo d'integrazione giova a determinare la funzione Fx data che sia la sua derivata $A\,\frac{Fx}{x}$, o AFx, o $\frac{A}{x}$; (n. 65, 66, 67).

1° Sia
$$dFx=A\,\frac{Fx}{x}\,dx; \tag{5}$$

facendo $Fx=y$, avremo

$$xy'=Ay,\quad xy''+y'=Ay',\quad xy'''+2y''=Ay'',\dots$$

$$xy^{(n+1)}+ny^{(n)}=Ay^{(n)};\ y^{(n+1)}=(A-n)\frac{y^{(n)}}{x};$$

e di qui, facendo $n=0,\ =1,\ =2$, ec., avremo ancora

$$y'=\frac{Ay}{x},\ y''=(A-1)\frac{y'}{x}=A(A-1)\frac{y}{x^2},$$

$$y'''=(A-2)\frac{y''}{x}=A(A-1)(A-2)\frac{y}{x^3},$$

$$\dots\dots$$

$$y^{(n)}=A(A-1)(A-2)\dots[A-(n-1)]\frac{y}{x^n};$$

conseguentemente per la serie del Taylor avremo

$$F(x+h)=y+\frac{A}{1}\frac{hy}{x}+\frac{A(A-1)}{1.2}\frac{h^2y}{x^2}\dots+\frac{A(A-1)\dots[A-(n-1)]}{1.2.3\dots n}\frac{h^ny}{x^n}\dots$$

$$\frac{F(x+h)}{Fx}=1+\frac{A}{1}\frac{h}{x}+\frac{A(A-1)}{1.2}\frac{h^2}{x^2}\dots+\frac{A(A-1)\dots[A-(n-1)]}{1.2.3\dots n}\frac{h^n}{x^n}\dots$$

$$\frac{F(x+h)}{Fx}=\left(1+\frac{h}{x}\right)^A;\qquad \frac{F(x+h)}{(x+h)^A}=\frac{Fx}{x^A};$$

l'ultima equazione dimostra manifestamente che la quantità $\frac{Fx}{x^A}$ non varia al variare della x; dunque essa è costante; dunque $\frac{Fx}{x^A}=\beta$ ovvero $Fx=Bx^A$.

Sostituendo questa espressione di Fx nella eq. (5) avremo $Bdx^A = ABx^{A-1}dx$ ovvero $dx^A = Ax^{A-1}dx$; di questa guisa si ritrova l'espressione del differenziale d'una potenza.

2° Sia $$dFx = AFx\,dx; \qquad (6)$$
avremo $$F'x = AFx, \quad F''x = A^2Fx, \quad F'''x = A^3Fx, \ldots$$
$$F(x+h) = Fx\left(1 + \frac{Ah}{1} + \frac{A^2h^2}{1.2} + \frac{A^3h^3}{1.2.3} + \ldots\right)$$
$$F(x+h) = Fxe^{Ah}.$$

Cangiando x in h e viceversa, quindi ponendo $h = 0$, sarà
$$F(x+h) = Fhe^{Ax}, \qquad Fx = F0.e^{Ax} = Be^{Ax}.$$

Sostituendo questa espressione di Fx nella equazione (6) avremo $de^{Ax} = Ae^{Ax}dx$.

3° Sia $$dFx = \frac{Adx}{x}; \qquad (7)$$
avremo $$F'x = \frac{A}{x}, \quad F''x = -\frac{A}{x^2}, \quad F'''x = 1.2\frac{A}{x^3}, \ldots$$
$$F(x+h) = Fx + \frac{A}{1}\frac{h}{x} - \frac{A}{1}\frac{h^2}{x^2} + \frac{A}{3}\frac{h^3}{x^3} - \ldots$$
$$F(x+h) = Fx + A\mathrm{l}\left(1 + \frac{h}{x}\right), F(x+h) - A\mathrm{l}(x+h) = Fx - A\mathrm{l}x;$$
questa equazione mostra che la quantità $Fx - A\mathrm{l}x$ non varia al variare della x e che perciò è costante; dunque $Fx = B + A\mathrm{l}x$.

Sostituendo questa espressione di Fx nella equazione (7) si trova $d\mathrm{l}x = \frac{dx}{x}$.

VII. *Le condizioni cui debbono soddisfare le funzioni differenziali del primo ordine a più variabili indipendenti per essere differenziali esatte; l'integrazione di queste funzioni.*

546. Problema I. *Trovare le condizioni cui debbono soddisfare le funzioni $Pdx + Qdy$, $Pdx + Qdy + Rdz$, ec., acciocchè sieno differenziali esatte; x, y, z essendo variabili indipendenti.*

Sia U una funzione qualunque di x ed y; il differenziale completo della U sarà $dU = \frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy$; dunque acciocchè $Pdx + Qdy$ sia una funzione differenziale esatta, e si possa per conseguenza considerare come il risultato della differenziazione d'una funzione U, dovrà aversi

$$P = \frac{dU}{dx}, \quad Q = \frac{dU}{dy}, \quad \text{ovvero} \quad \frac{dP}{dy} = \frac{d^2U}{dxdy}, \quad \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2U}{dydx};$$

dunque $Pdx + Qdy$ sarà una funzione differenziale esatta quando abbiasi

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}. \tag{1}$$

Sia U una funzione qualunque di x, y, z; il differenziale completo della U sarà $dU = \frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dz}dz$; dunque acciocchè $Pdx + Qdy + Rdz$ sia una funzione differenziale esatta, cioè completa, e si possa considerare come il risultato della differenziazione d'una funzione U, dovrà aversi

$$P = \frac{dU}{dx}, \quad Q = \frac{dU}{dy}, \quad R = \frac{dU}{dz};$$

dunque $Pdx + Qdy + Rdz$ sarà una funzione differenziale esatta quando abbiasi

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}, \quad \frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}, \quad \frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}. \tag{2}$$

Nello stesso modo potrebbero determinarsi le condizioni cui debbono soddisfare le funzioni del 1° ordine fra quattro variabili, fra cinque, ec., per essere differenziali esatte.

547. Principio. Sia $U = \int Pdx$, dove P contiene la variabile x e più costanti a, b, c, ec.; fatta la integrazione nulla vieta che

si cerchi la derivata di U relativa ad una delle costanti medesime, per esempio a; questa derivata sarà $\frac{dU}{da}=\frac{d\int Pdx}{da}$.

Or siccome $d_x U = Pdx$, e perciò $\frac{dU}{dx}=P$, sarà $\frac{d^2U}{dxda}=\frac{dP}{da}$;

ma $\frac{d^2U}{dxda}=\frac{d\,\frac{dU}{da}}{dx}$; dunque $\frac{d\,\frac{dU}{da}}{dx}=\frac{dP}{da}$; moltiplicando per dx, ed integrando rapporto ad x, avremo finalmente $\frac{dU}{da}=\int\frac{dP}{da}dx$,

ovvero
$$\frac{d\int Pdx}{da}=\int\frac{dP}{da}dx,$$

prendendo l'integrale $\int\frac{dP}{da}dx$ nella supposizione di a costante. Da ciò si conchiude che la differenziazione della funzione $\int Pdx$ rapporto ad una quantità a contenuta in P può farsi sotto il segno $\int$; in altri termini le *due operazioni espresse nella formula* $d\int Pdx$ *dalle caratteristiche* d *ed* $\int$ *possono invertirsi.*

548. Problema II. *Trovare l'integrare della funz.* $Pdx + Qdx$ *nel supposto che essa sia una differenziale esatta.*

Se $Pdx + Qdx$ è il risultato della differenziazione d'una funzione U delle variabili x, y, sarà forza considerare il termine Pdx come il differenziale di U preso nella ipotesi di x costante. Conseguentemente ad avere l'integrale di $Pdx + Qdy$ potremo supporre la y costante ed aggiungere all'integrale $\int Pdx$ dove solo la x è variabile, la quantità Y che potrà considerarsi come funzione di y. Avremo adunque

$$U = \int Pdx + Y. \tag{3}$$

Or per determinare la Y si osservi che dovendo la funz. $\int Pdx + Y$ differenziata rapporto ad x ed y produrre la funzione $Pdx + Qdy$, la derivata di $\int Pdx + Y$ presa rapporto ad y dovrà essere identica a Q; avremo adunque

$$Q=\int\frac{dP}{dy}dx+\frac{dY}{dy}\ ; \qquad Y=\int\left(Q-\int\frac{dP}{dy}dx\right)dy;$$

e questa integrazione sarà possibile ogniqualvolta il differenziale

della quantità $Q - \int \frac{dP}{dy} dx$ preso rapporto ad x cioè la quantità $\frac{dQ}{dx} dx - \frac{dP}{dy} dx$ sia nulla; e sarà nulla difatti quando la proposta sarà differenziale esatta, cioè quando abbiasi $\frac{dQ}{dx} = \frac{dP}{dy}$. Sostituendo il trovato valore di Y nella equazione (3) avremo

$$U = C + \int Pdx + \int \left(Q - \int \frac{dP}{dy} dx \right) dy; \qquad (4)$$

questo sarà l' integrale richiesto.

549. Scolio. Siccome $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$, alla espressione $Q - \int \frac{dP}{dy} dx$ potremo sostituire $Q - \int \frac{dQ}{dx} dx$. Ora se dopo avere differenziato Q rapporto ad x, integreremo il risultato rapporto ad x, si riprodurranno que' soli termini di Q che contengono la x; il perchè l' integrale $\int \frac{dQ}{dx} dx$ rappresenta que' soli termini di Q che contengono x, e $Q - \int \frac{dQ}{dx} dx$ quei termini di Q che non contengono x; indicando con Q_1 la somma di siffatti termini, l' integrale della proposta prenderà la forma

$$U = C + \int Pdx + \int Q_1 dy;$$

molti sono i casi nei quali gioverà valersi di questa formula.

Esempio I. $dU = (a^2 + 2xy + x^2)dx + (x^2 + y^2 - a^2)dy$.

Questa funzione è una differenziale esatta, perchè $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} = 2x$.

Ora $\int Pdx = a^2x + x^2y + \frac{1}{3}x^3$, $Q_1 = y^2 - a^2$, $\int Q_1 dy = \frac{1}{3}y^3 - a^2y$; dunque $\quad U = C + a^2x + x^2y + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - a^2y$.

Esempio II. $\quad dU = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2}\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right)$.

Siffatta funzione è anch' essa differenziale esatta, avendosi

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Ora $\quad P = \frac{1}{x} + \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{1}{y} + \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad Q_1 = \frac{1}{y};$

$\int Pdx = \text{ar tang}\,\frac{x}{y} + \mathrm{l}x, \int Q_1 dy = \mathrm{l}y,\ U = C + \text{ar tang}\,\frac{x}{y} + \mathrm{l}\frac{x}{y}.$

550. PROBLEMA III. *Integrare la funzione $Pdx + Qdy + Rdz$, nel supposto che essa sia una differenziale esatta.*

Supponiamo costante la z, l'integrale della proposta sarà

$$U = \int Pdx + \int \left(Q - \int \frac{dP}{dy} dx \right) dy + Z; \qquad (5)$$

purchè sia $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$, il che avverrà quando la proposta sarà una differenziale esatta; Z rappresenterà una funzione di z. Or per determinare questa funzione osserveremo che dovendo siffatta espressione di U differenziata rapporto ad x, y e z, riprodurre la funzione $Pdx + Qdy + Rdz$, la derivata della espressione medesima presa rapporto a z dovrà essere identica ad R. Dunque avremo

$$R = \int \frac{dP}{dz} dx + \int \left(\frac{dQ}{dz} - \int \frac{d^2P}{dydz} dx \right) dy + \frac{dZ}{dz};$$

e quindi

$$Z = \int \left[R - \int \frac{dP}{dz} dx - \int \left(\frac{dQ}{dz} - \int \frac{d^2P}{dydz} dx \right) \right] dz.$$

Questa integrazione sarà sempre possibile, purchè l'espressione che moltiplica dz sia priva della x e della y, il che avverrà quando le derivate della espressione medesima l'una presa rispetto ad x, l'altra rispetto ad y sieno nulle; e saranno difatti nulle (come facilmente si vedrà facendo il calcolo), quando la proposta sarà una differenziale esatta; infatti in tal caso avremo $\frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}$, $\frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}$.

Frattanto sostituendo la suddetta espressione di Z nella equazione (5), avremo

$$U = C + \int Pdx + \int \left(Q - \int \frac{dP}{dy} dx \right)$$

$$+ \int \left[R - \int \frac{dP}{dz} dx - \int \left(\frac{dQ}{dz} - \int \frac{d^2P}{dydz} dx \right) \right] dz. \qquad (6)$$

ESEMPIO. $dU = -\frac{2x(y^2 - z^2)}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)} dx + \frac{2y}{x^2+y^2} dy - \frac{2z}{x^2+z^2} dz.$

Questa funzione è differenziale esatta, perchè

$$\frac{dP}{dy}=\frac{dQ}{dx}=-\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{dP}{dz}=\frac{dR}{dx}=\frac{4xz}{(x^2+z^2)^2},\quad \frac{dQ}{dz}=\frac{dR}{dy}=0.$$

Fatto il calcolo, giovandosi della formula precedente, avremo

$$U=C+1\frac{x^2+y^2}{x^2+z^2}.$$

551. Scolio I. Sarebbe cosa agevole lo stabilire formule analoghe alle precedenti relativamente alla integrazione delle funzioni differenziali del primo ordine fra quattro variabili, cinque, ec.

552. Scolio II. È superfluo il notare che si giunge sempre allo stesso integrale qualunque sia la variabile da cui si comincia l' integrazione.

VIII. L' integrazione delle equazioni in generale; la teorica delle costanti arbitrarie.

553. Definizione. *Integrare* una equazione differenziale fra la funzione z e le variabili indipendenti x, y, ec. vuol dire trovare tutti i valori di z in funzione di x, y, ec. capaci di soddisfare alla equazione medesima; cioè trovare una equazione che possa considerarsi come conseguenza della proposta, e da cui la proposta stessa possa ricavarsi mediante le regole della differenziazione.

554. Teorema I. *L' integrale di qualunque equazione differenziale tra due variabili esiste sempre, e può sempre esprimersi per una serie; questo integrale conterrà tante costanti arbitrarie quante unità si troveranno nell' ordine dell' equazione medesima, e talmente poste da non potere essere eliminate se non per mezzo di altrettante differenziazioni successive.*

Sia $y=fx$; denotando colle lettere A, A_1, A_2, ec. i valori costanti che ricevono la y e le sue derivate y', y'', ec. quando si fa $x=0$, avremo in virtù della serie del Maclaurin

$$y=A+A_1x+A_2\frac{x^2}{2}+A_3\frac{x^3}{2.3}+\dots \qquad (1)$$

Ora la y in vece di esser data da una equazione finita sia data da una equazione del 1° ordine $\varphi(x, y, y')=0$; avremo

da essa $y' = \psi(x, y)$, $y'' = \xi(x, y, y')$, ec.; quindi facendo di mano in mano le opportune sostituzioni le derivate y', y'', ec. verranno ad essere espresse in funzione di x e y; talchè per $x = 0, y = A$ le espressioni delle derivate medesime y', y'', ec. le quali si cangeranno allora in A_1, A_2, ec. conterranno tutte la A che resterà indeterminata. In secondo luogo sia data la y da una equazione del 2° ordine $\varphi(x, y, y', y'') = 0$; avremo da essa $y'' = \psi(x, y, y')$, $y''' = \xi(x, y, y', y'')$, ec.; quindi otterremo y'', y''', ec. tutte espresse in x, y, y'; dimanierachè facendo $x = 0$, siccome allora y si cangia in A, ed y' in A_1, avremo le quantità A_2, A_3, ec. tutte espresse per A ed A_1, queste due rimanendo indeterminate. In terzo luogo sia la y data da una equazione del 3° ordine $\varphi(x, y, y', y'', y''') = 0$; avremo da essa $y''' = \psi(x, y, y', y'')$, $y^{\text{iv}} = \xi(x, y, y', y'', y''')$, ec.; facendo poscia $x = 0$, e cangiando y, y', y'' in A, A_1, A_2, otterremo le quantità A_3, A_4, ec. espresse per A, A_1, A_2 rimaste indeterminate. Ragionamento analogo può farsi quanto alle equazioni derivate degli ordini superiori.

Frattanto si vede che sostituendo le espressioni che in tal guisa si trovano de' coefficienti A_1, A_2, A_3, ec. nella equazione (1) verremo sempre a determinare la funzione y (che è quanto dire l'integrale d'una equazione differenziale), sotto forma di serie; nella quale resterà per altro una costante indeterminata A quando l'equazione differenziale medesima sarà del 1° ordine, ne resteranno due A, A_1, quando l'equazione differenziale sarà del 2° ordine, ne resteranno tre A, A_1, A_2, se tale equazione sarà del 4° ordine; e così di seguito. Dunque l'integrale d'una equazione differenziale dell'ordine n fra due variabili esiste sempre e può sempre esprimersi per una serie; inoltre questo integrale conterrà n costanti indeterminate.

Tali costanti saranno ancora talmente poste nell'integrale medesimo da non potere essere eliminate se non per mezzo di n differenziazioni successive; infatti le quantità $A, A_1, A_2, \ldots A_n$ si trovano nell'espressione dell'integrale respettivamente moltiplicate per $x^0, x^1, x^2, \ldots x^n$.

555. Scolio I. Dal ragionamento precedente si raccoglie che le costanti $A, A_1, A_2, \ldots$ sono i valori di y, y', y'', ec. corrispondenti ad $x = 0$; nullameno esse debbono considerarsi come costanti arbitrarie; infatti siccome quando per mezzo della differenziazione si passa dall'integrale all'equazione differenziale, tali

costanti spariscono è manifesto che siffatto integrale soddisfà all'equazione differenziale qualunque sia il valore di esse.

556. Scolio II. Può avvenire per altro che facendo $x=0$ alcuna delle quantità y, y', y'', ec. riesca immaginaria o infinita, e che la serie del Maclaurin cessi di esistere. In questo caso il teorema suddetto potrà dimostrarsi nello stesso modo avendo ricorso alla serie del Taylor; imperocchè pongasi in questa serie $x=a$, a essendo un numero qualunque che non renda immaginaria nè infinita alcuna delle funzioni y, y', y'', ec.; rappresentando con A, A_1, A_2, ec. i valori delle derivate medesime corrispondenti ad $x=a$, avremo

$$f(x+h)=A+A_1h+A_2\frac{h^2}{2}+A_3\frac{h^3}{2.3}+\ldots.$$

e facendo $h=x-a$, il che è lecito perchè h è qualunque, avremo ancora

$$y=A+A_1(x-a)+A_2\frac{(x-a)^2}{2}+A_3\frac{(x-a)^3}{2.3}+\ldots; \quad (2)$$

lo stesso ragionamento fatto sopra, gioverà a mostrare che tutti i coefficienti di questa serie si potranno esprimere in funzione della indeterminata A se l'equazione differenziale data sarà del 1° ordine; in funzione delle indeterminate A, A_1 se l'equazione differenziale data sarà del 2° ordine; in generale in funzione delle indeterminate $A, A_1, A_2, \ldots A_n$ se l'equazione differenziale sarà dell'ordine n; e che tali quantità indeterminate e arbitrarie saranno talmente poste da dovere sparire per mezzo di n differenzioni successive. La quantità a sebbene sia stata presa a piacere non dee riputarsi arbitraria, perchè essa è collegata con A mediante l'equazione $fa=A$.

557. Teorema II. *Ogni equazione fra* x *e* y *ed* n *costanti arbitrarie che soddisfaccia ad una equazione differenziale dell'ordine* n *coinciderà necessariamente con ogni altra equazione contenente* n *costanti arbitrarie che soddisfaccia al pari di essa all'equazione medesima.*

Infatti sia $F(x, y, C, C_1 \ldots C_{n-1})=0$ una equazione fra x, y ed n costanti arbitrarie capace di soddisfare alla equazione differenziale $\varphi(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)})=0$; immaginando che dall'equazione $F=0$ si ricavi il valore di y e si sviluppi secondo le potenze ascendenti di $x-a$ è manifesto che gli n primi termini della

serie conterranno a e le n costanti arbitrarie, e saranno capaci di prendere tutti i valori possibili disponendo convenientemente di queste costanti qualunque sia a; tali coefficienti potranno perciò considerarsi come costanti arbitrarie; e siccome i coefficienti susseguenti dipendono necessariamente da essi stante l'equazione $\varphi=0$, perciò lo sviluppo di cui si tratta non differirà in alcun modo da quello ci vien dato dalla equazione (2).

558. Scolio. Abbiansi le equazioni

$$\varphi(x,y)=0,\, d\varphi(x,y)=0,\, d^2\varphi(x,y)=0, \ldots d^n\varphi(x,y)=0;$$

esse conterranno generalmente le medesime costanti $a, b, c, \ldots$ che si trovano contenute nella 1ª dalla quale derivano. Queste equazioni potranno servire ad eliminare n delle costanti medesime da una qualunque di esse; il risultato di tale eliminazione sarà una equazione dell'ordine n di cui l'equazione primitiva $\varphi(x,y)=0$ esprimerà l'integrale.

Qualunque equazione differenziale si dee considerare come proveniente da siffatta eliminazione; imperocchè dovendo l'integrale di essa contenere n costanti non comprese nella equazione medesima si conclude che l'equazione differenziale qualunque essa sia, non può non riputarsi ottenuta per l'eliminazione delle costanti stesse da una equazione primitiva e dalle n equazioni differenziali immediate che ne risultano.

Tali differenziazioni ed eliminazioni potranno farsi in più modi; perocchè o prima si faranno le differenziazioni per passare di poi alla eliminazione di tutte le costanti $a, b, c, \ldots$, o l'eliminazione di ciascuna delle costanti medesime si farà a misura che si ottengono le equazioni differenziali, cavando sempre partito dall'ultima eliminata; di questa guisa avremmo una eliminata del 2° ordine che conterrebbe un costante di meno della equazione primitiva, una eliminata del 3° ordine, la quale conterrebbe tre costanti di meno, e così via discorrendo. Nullameno qualunque sia il modo del calcolo, l'eliminata dell'ordine n cioè l'equazione differenziale priva delle n costanti, sarà sempre la stessa; il che può dimostrarsi nella seguente maniera.

559. Teorema III. *Da una equazione finita $\varphi(x, y, a, b, c \ldots)=0$ non si può ottenere eliminando in qualsivoglia modo* n *costanti per mezzo delle equazioni differenziali desunte da essa, che una sola e medesima equazione differenziale dell'ordine* n.

Supponiamo infatti che variando il modo del calcolo si

possa giungere a due equazioni differenti; risolvendo queste equazioni rapporto ad $y^{(n)}$ avremo

$$y^{(n)} = \varphi(x, y, y' \dots y^{(n-1)}), \quad (3) \quad y^{(n)} = \psi(x, y, y', \dots y^{(n-1)}); \ (4)$$

da quanto abbiamo dimostrato (n. 557) risulta che deducendo dall'una o dall'altra una equazione finita fra x, y ed n costanti arbitrarie, otterremo l'equazione istessa da cui sono state tratte e per conseguenza otterremo due risultati identici. Diguisachè ricavando da questi risultati il valorè di y sviluppato secondo le potenze ascendenti di $x - a$, i coefficienti delle differenti potenze saranno respettivamente uguali; supponendo però che alle costanti indeterminate $A, A_1, A_2, \dots A_{n-1}$ (rappresentanti i valori di $y, y', y'', \dots y^{(n-1)}$) vogliasi attribuire il medesimo valore in ambedue le serie. In queste serie i coefficienti di $\frac{(x-a)^n}{1.2 \dots n}$ saranno $\varphi(a, A, A_1, \dots A_{n-1}), \psi(a, A, A_1, \dots A_{n-1})$; bisogna adunque che qualunque sia a queste due espressioni sieno uguali per tutti i valori dati arbitrariamente alle quantità $A, A_1, \dots A_{n-1}$, ed alle costanti non eliminate, le quali sono le stesse da una parte e dall'altra; per conseguenza $A, A_1, \dots A_{n-1}$ dovranno entrare nelle espressioni medesime nello stesso modo; ma esse tengono quel luogo medesimo che tengono le quantità $x, y, y', \dots y^{(n-1)}$ nella espressioni (1) e (2), dunque queste due espressioni sono identiche; identiche sono perciò anco le equazioni da cui sono state ricavate.

560. Definizione. Un integrale se conterrà tutte le costanti arbitrarie che gli competono in ordine all'equazione differenziale cui appartiene, si dirà *integrale completo* o *generale*; se alcuna di tali costanti arbitrarie mancherà, cioè se sarà nulla o avrà ricevuto altro valore particolare, allora quell' integrale prenderà il nome d'*integrale incompleto* o *particolare*.

561. Scolio. Da un integrale completo si possono dedurre infiniti integrali particolari del medesimo ordine attribuendo dei valori particolari alle costanti; i quali integrali soddisfaranno tutti alla equazione differenziale cui appartiene l'integrale completo proposto.

562. Teorema IV. *Una equazione differenziale a due variabili dell'ordine* n *ha* n *integrali primi*, *cioè dell'ordine* n — 1.

Abbiamo detto sopra che posta l'equazione a due variabili $\varphi(x, y) = 0$ si hanno da essa le equazioni

$$d\varphi(x,y)=0,\quad d^2\varphi(x,y)=0,\ldots d^n\varphi(x,y)=0.$$

le quali contengono generalmente parlando le medesime costanti $a, b, c, \ldots$ contenute nella equazione primitiva. Ora in vece di eliminare le due costanti a e b dalle tre equazioni $\varphi(x,y)=0$, $d\varphi(x,y)=0$, $d^2\varphi(x,y)=0$ si può non eliminare che la costante b o a delle due prime; si avranno in tal guisa due equazioni del 1° ordine, di cui l'una non conterrà che la costante a, l'altra la costante b. Eliminando di poi da ciascuna di queste due equazioni la costante a o b mediante l'equazione primitiva avremo due equazioni del 2° ordine senza a nè b che dovranno coincidere colla equazione risultante dalla eliminazione simultanea di queste costanti col mezzo delle tre equazioni $\varphi(x,y)=0$, $d\varphi(x,y)=0$, $d^2\varphi(x,y)=0$. Di qui segue che una equazione del 2° ordine può considerarsi come risultante da due diverse equazioni del 1°, contenenti ciascuna una costante arbitraria non contenuta nella equazione del 2° ordine stesso. Nello stesso modo potrebbe dimostrarsi che una equazione del 3° ordine può considerarsi come risultante da tre equazioni del 2° ordine contenenti ciascuna una costante arbitraria; e così di seguito. In altri termini si può dire che una equazione del 2° ordine ammette due integrali completi del 1° ordine; che una equazione del 3° ordine ammette tre integrali completi del 2° ordine; in generale che una equazione dell'ordine n ammette n integrali completi dell'ordine $n-1$.

563. Corollario I. Una equazione differenziale dell'ordine n ammette $\frac{1}{2}n(n-1)$ integrali completi dell' ordine $n-1$, $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ integrali completi dell'ordine $n-2$, ec.; il che risulta dalle diverse combinazioni binarie, ternarie, ec. che possono farsi delle costanti, e dall'eliminare piuttosto l'una che l'altra di tali combinazioni.

564. Corollario II. Dovendosi integrare una equazione dell'ordine n potremo cercare i suoi n integrali primi; e se giungeremo a determinarli avremo n equaz. fra $x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}$ ciascuna delle quali conterrà una costante arbitraria; per conseguenza eliminando le $n-1$ derivate otterremo una equazione fra x, y ed n costanti arbitrarie, che sarà perciò l'integrale della equazione proposta.

565. Scolio. Il teorema IV (n. 562) può anche dimostrarsi per mezzo del teorema del Taylor. In forza di questo teorema abbiamo

$$\varphi(x+h)=y+y'h+\tfrac{1}{2}y''h^2+\ldots$$
$$\varphi'(x+h)=y'+y''h+\tfrac{1}{2}y'''h^2+\ldots$$
$$\varphi''(x+h)=y''+y'''h+\tfrac{1}{2}y^{\mathrm{IV}}h^2+\ldots$$
$$\ldots\ldots$$

Or facendo $h=-x$, otterremo le equazioni

$$\begin{aligned}\varphi\,0=A\ &=y-y'x+\tfrac{1}{2}y''x^2-\ldots\\ \varphi'0=A_1&=y'-y''x+\tfrac{1}{2}y'''x^2-\ldots\\ \varphi''0=A_2&=y''-y'''x+\tfrac{1}{2}y^{\mathrm{IV}}x^2-\ldots\\ &\ldots\ldots\end{aligned}\qquad(1)$$

rappresentando con A, A_1, A_2, ... i valori che acquistano le funzioni y, y', y'', . . . quando si pone $x=0$. Tali equazioni esprimono le relazioni fra una funzione y qualunque della variabile x e le successive derivate della funzione stessa; sicchè quando da una equazione proposta $f(x,y,y')=0$, oppure $\psi(x,y,y',y'')=0$, oppure $\xi(x,y,y',y'',y''')=0$, ec. piacesse di ricavare i valori delle derivate della y per sostituirli nelle equazioni suddette dovrebbero esse aver luogo colla proposta medesima; infatti una equazione $F(x,y,y'',\ldots y^{(n)})=0$, esprime una relazione fra x, y, y', y'',... $y^{(n)}$, e lo stesso esprimono dopo le sostituzioni dei valori di $y^{(n)}$, $y^{(n+1)}$, ... le equazioni suddette.

Or dalla equazione $F(x,y,y',y'',\ldots y^{(n)})=0$ si ha

$$y^{(n)}=\psi(x,y,y',\ldots y^{(n-1)}),\ y^{(n+1)}=\xi(x,y,y'\ldots y^{(n)}),\ y^{(n+2)}=\varphi(x,y,y'\ldots y^{(n+1)}),\text{ec.}$$

per mezzo delle successive sostituzioni potranno i valori di $y^{(n+1)}$, $y^{(n+2)}$... esprimersi tutti per x, y, y', ... $y^{(n-1)}$ e saranno perciò dell' ordine $n-1$; inoltre ciascuna di esse conterrà una costante non compresa nella proposta; ma tali equazioni coesistono colla proposta medesima, dunque esse sono n integrali primi di essa.

IX. L'integrazione delle più semplici equaz. differenziali di qualunque ordine a due variabili.

566. PRINCIPIO. Pongasi l'identità

$$\frac{d^ny}{dx^n}=y^{(n)};$$

moltiplicando per dx e integrando, avremo

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int y^{(n)}dx + C$$

quindi
$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int dx \int y^{(n)}\,dx + Cx + C_1,$$

$$\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = \int dx \int dx \int y^{(n)}dx + \tfrac{1}{2}Cx^2 + C_1x + C_2,$$

. . . . .

e così di seguito; dunque

$$y = \int dx \int dx \int dx \ldots \int dx \int y^{(n)}dx + A + Bx + Cx^2 \ldots + Tx^{n-1}; \quad (1)$$

la qual formula potrà servire a determinare l'integrale della proposta, e nel caso in cui $y^{(n)}$ sia data in funzione di x, ed in quello eziandio in cui dx sia espresso per una funzione della $y^{(n)}$.

567. Problema I. *Integrare l'equazione* $\frac{d^n y}{dx^n} = 0$.

Sarà $y^{(n)} = 0$; dunque per la formula (1) avremo

$$y = A + Bx + Cx^2 \ldots + Tx^{n-1}. \quad (2)$$

568. Problema II. *Integrare l'equazione* $\frac{d^n y}{dx^n} = \varphi x = X$.

Sarà $y^{(n)} = X$; laonde dalla formula (1) avremo

$$y = \int dx \int dx \ldots \int dx \int Xdx + A + Bx + Cx^2 \ldots + Tx^{n-1}; \quad (3)$$

questa formula suppone che si facciano n integrazioni successive sulla funzione Xdx^n; la prima di esse darà

$$\int Xdx^n = dx^{n-1} \int Xdx = X_1 dx^{n-1};$$

la seconda $\int\int Xdx^n = \int X_1 dx^{n-1} = dx^{n-2} \int X_1 dx = X_2 dx^{n-2};$

la terza $\int\int\int Xdx^n = \int X_2 dx^{n-2} = Xdx^{n-3} \int X_2 dx = X_3 dx^{n-3};$

e così di seguito fino alla n^ma^.

569. Scolio. Integrando per parti si trova

$$\int dx \int Xdx = x \int Xdx - \int Xxdx,$$

$$\int dx \int dx \int Xdx = \frac{1}{1.2}\left(x^2 \int Xdx - 2x \int Xxdx + \int Xx^2dx\right),$$

$$\int dx \int dx \int dx \int Xdx = \frac{1}{1.2.3}\left(x^3 \int Xdx - 3x^2 \int Xxdx + 3x \int Xx^2dx - \int Xx^3dx\right)$$

e così di seguito. I coefficienti numerici delle espressioni contenute fra le parentesi sono i coefficienti stessi delle potenze suc-

cessive del binomio $a - b$; gli esponenti della x al di fuori del segno $\int$ discendono dal massimo, il quale è indicato dal numero delle integrazioni meno una, fino a zero; gli esponenti della x al di sotto il segno $\int$ vanno crescendo da zero sino al numero indicante le integrazioni da farsi meno una. Dunque l'integrale n^{mo} sarà

$$y = \frac{1}{1.2.3...(n-1)}\left[x^{n-1}\int X dx - \frac{n-1}{1}x^{n-2}\int X x dx + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}x^{n-3}\int X x^2 dx\right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^{n-1}X\int x^{n-1}dx\right] + A + Bx + Cx^2 \ldots + Tx^{n-1}. \quad (4)$$

570. Problema III. *Integrare l'equazione* $\frac{d^n x}{dx^n} = \varphi\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = U.$

Sarà $y^{(n)} = U$, e siccome $dy^{(n-1)} = y^{(n)}\,dx$, avremo

$$dy^{(n-1)} = U dx; \qquad dx = \frac{dy^{(n-1)}}{U}, \qquad x = \int \frac{dy^{(n-1)}}{U}. \quad (5)$$

Inoltre la formula (1) per questo valore di dx diventa

$$y = \int \frac{dy^{(n-1)}}{U}\int \frac{dy^{(n-1)}}{U} \ldots \int \frac{y^{(n-1)}dy^{(n-1)}}{U} + A + Bx + Cx^2 \ldots + Sx^{n-2} \quad (6)$$

la (5) ci darà una equazione fra x, $y^{(n-1)}$ ed una costante; la (6) una equazione fra y, $y^{(n-1)}$ ed $n-1$ costanti; eliminando da queste equazioni $y^{(n-1)}$ il risultato sarà l'integrale della proposta cioè una equazione fra x, y ed n costanti arbitrarie.

571. Problema IV. *Integrare l'equazione* $\frac{dy^n}{dx^n} = \varphi\left(\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\right) = V.$

Sarà $y^{(n)} = V$, $dy^{(n-1)} = V dx$, $y^{(n-1)}dy^{(n-1)} = V dy^{(n-2)}$; integrando e ricavando dall'equazione risultante il valore di $y^{(n-1)}$, sarà

$$y^{(n-1)} = \sqrt{2\int V dy^{(n-2)}};$$

e perciò $dx = \frac{dy^{(n-2)}}{\sqrt{2\int V dy^{(n-2)}}}, \qquad x = \int \frac{dy^{(n-2)}}{\sqrt{2\int V dy^{(n-2)}}}. \quad (7)$

Inoltre la formula (1) sostituendo questo valore di dx dà

$$y = \int \frac{dy^{(n-2)}}{\sqrt{2\int V dy^{(n-2)}}}\int \frac{dy^{(n-2)}}{\sqrt{2\int V dy^{(n-2)}}} \ldots \int \frac{y^{(n-2)}dy^{(n-2)}}{\sqrt{2\int V dy^{(n-2)}}}$$
$$+ A + Bx + Cx^2 \ldots + Rx^{n-3}; \quad (8)$$

per mezzo della (7) avremo una equazione fra x, $y^{(n-2)}$ e due costanti; per mezzo della (8) una equazione fra y, $y^{(n-2)}$ ed $m-2$

costanti; eliminando poscia $y^{(n-2)}$ il risultato sarà l' integrale richiesto fra x, y ed n costanti arbitrarie.

Esempio I. Abbiasi l' eq. $\frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{d^4y}{dx^4} = 1$; ovvero $y^{\text{iv}} = \frac{1}{y'''}$.

Sarà $$U = \frac{1}{y'''},\ x = \int \frac{dy'''}{U} = \int y'''\,dy''' = \frac{y'''^2}{2} + A; \tag{9}$$

$$\int \frac{y'''dy'''}{U} = \int y'''^2 dy''' = \frac{y'''^3}{3} + B;$$

$$\int \frac{dy'''}{U} \int \frac{y'''dy'''}{U} = \frac{y'''^5}{3.5} + \frac{By'''^2}{2} + C;$$

$$y = \int \frac{dy'''}{U} \int \frac{dy'''}{U} \int \frac{y'''dy'''}{U} = \frac{y'''^7}{3.5.7} + \frac{By'''^4}{2.4} + \frac{Cy'''^2}{2} + D;$$

ma l'equazione (9) ci dà $y''' = \sqrt{2x - A}$, dunque

$$y = \frac{(2x - A)^{\frac{7}{2}}}{3.5.7} + \frac{B(2x - A)^2}{2.4} + \frac{C(2x - A)}{2} + D.$$

Esempio II. Abbiasi l' eq. $\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^2y}{dx^2}$; ovvero $y^{\text{iv}} = y''$.

Sarà $V = y''$; $\int V dy'' = \frac{y''^2}{2} + A$; $\sqrt{2\int V dy''} = \sqrt{y''^2 + 2A}$.

$$x = \int \frac{dy''}{\sqrt{2\int V dy''}} = \int \frac{dy''}{\sqrt{y''^2 + 2A}} = \mathrm{l}[y'' + \sqrt{(y''^2 + 2A)}] - \mathrm{l}B. \tag{10}$$

$$\int \frac{y''dy''}{\sqrt{2\int V dy''}} = \sqrt{y''^2 + 2A} + C;$$

$$y = \int \frac{dy''}{\sqrt{2\int V dy''}} \int \frac{y''dy''}{\sqrt{2\int V dy''}} = \int \left(dy'' + \frac{Cdy''}{\sqrt{y''^2 + 2A}}\right);$$

ovvero $$y = y'' + C\,\mathrm{l}\,(y'' + \sqrt{y''^2 + 2A}) + D;$$

ma l'equazione (10) ci dà $y'' = \frac{B}{2}e^x - \frac{A}{B}e^{-x}$; dunque

$$y = \frac{B}{2}e^x - \frac{A}{B}e^{-x} + C\mathrm{l}B + Cx + D;$$

oppure, cangiando le costanti,

$$y = Ae^x + Be^{-x} + Cx + D.$$

X. *L'integrazione delle equazioni differenziali del primo ordine a due variabili.*

572. Problema I. *Integrare l'equazione* $Pdx + Qdy = 0$.

Quando le funzioni P, Q, soddisfaranno alla condizione (1) n. 546, l'integrale della proposta potrà ottenersi mediante la formula generale (4) n. 548. Non verificandosi siffatta condizione vari sono gli artifizi, e le trasformazioni che possono sperimentarsi ad ottener l'integrale sotto forma finita; ove riescano vani dovremo procurare di ottenerlo sotto la forma d'una serie. Di questi diversi metodi diremo quel tanto che è necessario, perchè possano essi usarsi a seconda dei casi senza incontrare difficoltà.

573. La separazione delle variabili. Una equazione differenziale $Xdx + Ydy = 0$ ove X sia funzione di x, ed Y di y, sarà integrabile da per sè stessa, perchè avremo $\frac{dX}{dy} = \frac{dY}{dx} = 0$; dunque ogniqualvolta una equazione differenziale si potrà ridurre alla forma $Xdx + Ydy = 0$ se ne otterrà l'integrale: il quale sarà $\int Xdx + \int Ydy = 0$. Tal riduzione si chiama *separazione delle variabili*, inquantochè per essa l'equazione si trasforma in altra composta di due termini uno de'quali contiene la sola x, e l'altro la sola y. Quando è dato di separare le variabili ogni equazione del 1° ordine s'integra; è vero però che siffatta separazione non può aver luogo che in pochi casi; i principali de'quali sono i seguenti.

574. I. Equazioni della forma $XYdx + X_1Y_1dy = 0$; X, X_1 essendo funz. di x, ed Y, Y_1 di y. Dividendo per X_1Y, avremo

$$\frac{X}{X_1}dx + \frac{Y_1}{Y}dy = 0.$$

Esempio. $\sqrt{(1+y^2)}dx - dy = 0$; $\frac{dx}{x} - \frac{dy}{\sqrt{(1+y^2)}} = 0$;

$$lx + lc = l\,[y + \sqrt{(1+y^2)}],\ cx = y + \sqrt{(1+y^2)}.$$

575. II. Equazioni omogenee. Allorquando nella equazione differenziale $Pdx + Qdy = 0$ le funzioni P e Q delle variabili x, y sono omogenee, la separazione delle variabili ha sempre

luogo. Imperocchè facendo $y=tx$ le funzioni P, Q si cangeranno in px^n, qx^n, dove p, q s'intende che sieno funzioni della sola t, ed n le dimensioni delle funzioni istesse. Per conseguenza la proposta si cangerà in

$$(p+qt)\,dx+qxdt=0, \quad \text{ovvero} \quad \frac{dx}{x}+\frac{qdt}{p+qt}=0;$$

integrando sarà
$$\mathrm{l}x+\int\frac{qdt}{p+qt}=0.$$

Esempio. $(x-2y)\,dx+ydy=0;\ \mathrm{l}x+\int\frac{tdt}{1-2t+t^2}=0.$

$$\mathrm{l}x+\mathrm{l}(1-t)+\frac{1}{1-t}=\mathrm{l}c,\ \mathrm{l}(x-y)+\frac{x}{x-y}=\mathrm{l}c,\ (x-y)e^{\frac{x}{x-y}}=c.$$

576. III. Equazione lineare del 1° ordine. La separazione delle variabili può farsi, come abbiamo veduto, nelle equazioni omogenee per mezzo d'una trasformazione o cangiamento di variabili. Molti sono i casi ne'quali un cangiamento siffatto conduce al medesimo intento; ed uno de'più notevoli si è quello che ci offre l'equazione

$$\frac{dy}{dx}+Py+Q=0, \text{ ovvero } dy+Pydx+Qdx=0, \qquad (1)$$

nella quale P, Q sono funzioni della sola x. Questa equazione è detta *equazione lineare del* 1° *ordine*, o *equazione del* 1° *grado e del* 1° *ordine*, perchè non contiene che la prima potenza della funzione y e della sua derivata $\frac{dy}{dx}$. Facciasi $y=Xt$, X rappresentando una funzione indeterminata della x, e t una nuova variabile; avremo $tdX+Qdx+(dt+Ptdx)\,X=0$.

Or la X può determinarsi per modo che abbiasi

$$tdX+Qdx=0; \quad \text{allora sarà } dt+Ptdx=0;$$

e siccome in questa equazione le variabili sono separabili essa potrà agevolmente integrarsi; ed avremo

$$\frac{dt}{t}+Pdx=0, \mathrm{l}t=-\int Pdx,\ t=e^{-\int Pdx}.$$

Ond'è che l'equazione $tdX+Qdx=0$ diverrà

$$dX=-e^{\int Pdx}Qdx, \text{ e darà } X=-\int e^{\int Pdx}Qdx+C;$$

valore che posto con quello di t in $y = Xt$ conduce all'integrale richiesto, cioè

$$y + e^{-\int Pdx} [-\int e^{\int Pdx} Qdx + C] = 0. \qquad (2)$$

Esempio. $dy + ydx - ax^3dx = 0$; $P = 1$, $Q = -ax^3$.

$$\int Pdx = x,\ \int e^{\int Pdx} Qdx = -a \int e^x x^3 dx = ae^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6),$$

[n. 505 (6)]; dunque $y = Ce^{-x} + a(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$.

577. Scolio. V'hanno equazioni differenziali che sebbene non omogenee possono rendersi tali per mezzo di un'opportuno cangiamento di variabili. Abbiasi, per esempio, l'equazione

$$(mx + ny + p)\,dx + (ax + by + c)\,dy = 0;$$

facciasi $\quad mx + ny + p = t,\quad ax + by + c = z;$
risulterà $\quad mdx + ndy = dt,\quad adx + bdy = dz,$

e quindi $\quad dx = \dfrac{bdt - ndz}{mb - na},\quad dy = \dfrac{mdz - adt}{mb - na};$

sostituendo, la proposta diverrà omogenea, e sarà

$$tdx + zdy = 0,\ \text{ ovvero }\ (bt - az)\,dt + (mz - nt)\,dz = 0.$$

Questo calcolo suppone però che il denominatore comune de'valori dx e dy non sia nullo. Se desso il fosse, se avessimo cioè $mb = na$, che è quanto dire $m = \dfrac{na}{b}$, la proposta avrebbe la seguente forma

$$bpdx + bcdy + (ax + by)(ndx + bdy) = 0;$$

ed allora le variabili potrebbero separarsi ponendo $ax + by = u$; e conseguentemente $dy = \dfrac{du - adx}{b}$.

578. IV. Equazione del Riccati. Così chiamasi ogni equaz. della forma $dy + by^2dx = ax^m dx$; alla quale però (giacchè y ed a si possono cangiare in $\dfrac{y}{b}$ ed $\dfrac{a}{b}$) sostituiremo la seguente

$$dy + y^2dx = ax^m dx. \qquad (3)$$

1° $m = 0$; in tal caso le variabili potranno separarsi, ed avremo

$$dx = \frac{dy}{a - y^2} = \frac{dy}{(\sqrt{a} + y)(\sqrt{a} - y)} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left[\frac{dy}{\sqrt{a} + y} + \frac{dy}{\sqrt{a} - y}\right];$$

$$x = c + \frac{1}{2\sqrt{a}}\,\mathrm{l}\,\frac{\sqrt{a}+y}{\sqrt{a}-y}.$$

2° m non essendo zero; si faccia $y = x^{-1} + zx^{-2}$; sarà

$$y^2 = x^{-2} + 2zx^{-3} + z^2x^{-4},\ dy = -x^{-2}dx + x^{-2}dz - 2zx^{-3}dx;$$

ed avremo $$x^2dz + z^2dz = ax^{m+4}dx;$$

donde si raccoglie che quando sarà $m = -2$, la trasformata (2) diverrà omogenea, quindi integrabile per il metodo suesposto; quando sarà $m = -4$, la trasformata medesima cangiandosi in $x^2dz + z^2dx = adx$, si presterà alla separazione delle variabili, e darà

$$\frac{dx}{x^2} - \frac{dz}{a - z^2} = 0, \qquad c - \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{a}}\,\mathrm{l}\,\frac{\sqrt{a}+z}{\sqrt{a}-z} = 0;$$

ma $z = x^2y - x$, dunque $c - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{a}}\,\mathrm{l}\,\dfrac{\sqrt{a}+x^2y-x}{\sqrt{a}-x^2y+x} = 0.$

3° m non avendo alcuno de'suindicati valori; facendo

$$z = t^{-1},\ x^{m+3} = u;\ \text{sarà}\ x = u^{\frac{1}{m+3}}\ x^2 = u^{\frac{2}{m-3}},\ y^2 - t^{-2},$$

$$dz = -t^{-2}dt,\ dx = \frac{1}{m+3}u^{-\frac{m+2}{m+3}}du,\ x^{m+4} = u^{\frac{m+4}{m+3}}$$

quindi $$dt - \frac{1}{m+3}u^{-\frac{m+4}{m+3}}du = \frac{a}{m+3}t^2du;$$

ponendo $$n = -\frac{m+4}{m+3},\ b = \frac{1}{m+3},\ k = \frac{a}{m+3}$$

sarà $$dt + kt^2du = bu^ndu;$$

ora cangiando t in $\dfrac{t}{k}$, e facendo $bk = a_1$ avremo

$$dt + t^2du = a_1u^ndu. \tag{4}$$

È da notare che questa equazione è della stessa forma della (1); ragione per cui essa potrà integrarsi ne'due casi di $n = -2$ ed $n = -4$; non verificandosi nè l'uno, nè l'altro, allora per trasformazioni somiglianti alle precedenti potremo ottenere l'equazione

$$ds + s^2dv = a_2v^pdv,$$

dove sarà $p = -\dfrac{n+4}{n+3}$; integrabile nel caso di $p = -2$ e $p = -4$.

Procedendo in questo modo è chiaro che potremo giungere ad una equazione integrabile quando nella serie degli esponenti della variabile del 2° membro, cioè

$$m,\ n=-\frac{m+4}{m+3},\quad p=-\frac{n+4}{n+3},\quad q=-\frac{p+4}{p+3},\ \ldots.$$

uno ve ne sia uguale a -4, oppure uguale a -2. Ma facendo le opportune sostituzioni si trova

$$n=-\frac{m+4}{m+3},\quad p=-\frac{3m+8}{3m+5},\quad q=-\frac{5m+12}{3m+7},\ \ldots.$$

le quali frazioni sono tutte comprese nella espressione generale $-\frac{(2i-1)m+4i}{im+2i+1}$; dunque uguagliando questa espressione a -4, e ricavando di poi il valore di m, avremo $m=-\frac{4(i+1)}{2i+1}$, ovvero (ponendo $i-1$ in luogo di i) $m=-\frac{4i}{2i-1}$ (*).

4° Facendo nella (1) $y=t^{-1}$, $x^{m+1}=z$; $dy=-t^2dt$, $y^2=t^{-2}$,

$$x^m dx=\frac{dz}{m+1},\ x=z^{\frac{1}{m+1}},\ dx=\frac{1}{m+1}\,z^{-\frac{m}{m+1}}dz,$$

avremo $\quad dt+\frac{a}{m+1}t^2\,dx=\frac{1}{m+1}\,z^{-\frac{m}{m+1}}dz;$

e ponendo $n=-\frac{m}{m+1}$, $b=\frac{1}{m+1}$, $k=\frac{a}{m+1}$, otterremo

$$dt+kt^2dz=bz^ndz;$$

quindi cangiando t in $\frac{t}{k}$, e facendo $a'=bk$, risulterà

$$dt+t^2dz=a'z^ndz;$$

questa equazione sarà integrabile quando abbiasi $n=-\frac{4i}{2i+1}$ ovvero $-\frac{m}{m+1}=-\frac{4i}{2i-1}$, cioè $m=-\frac{4i}{2i+1}$. Da ciò si rac-

(*) L'espressione suddetta uguagliata a -2 non conduce ad alcun risultato utile; ci dà $m=-2$.

coglie che l'equazione del Riccati sarà integrabile quando abbiasi $m = -\frac{4i}{2i \pm 1}$, compresi i casi d' $i = 0$, ed $i = \infty$, che è quanto dire compresi i casi di $m = 0$, $m = -2$.

579. V. Del moltiplicatore adattato a rendere una equazione integrabile. Affinchè una eq. differenziale $Pdx + Qdy = 0$ sia *esatta* è necessario che dessa risulti, per differenziazione immediata, da una equazione finita fra le variabili x, y. Il non essere una equazione differenziale esatta, dipende d'ordinario dall'avere eliminata da essa alcuna costante o soppresso alcun fattore comune a tutti i suoi termini. Per es. l'equazione finita $\frac{y}{x} = a$ differenziata ci dà $\frac{xdy - ydx}{x^2} = 0$, ovvero $xdy - ydx = 0$; ma sotto la seconda forma non è differenziale esatta; e ciò per la soppressione del fattore $\frac{1}{x^2}$ comune ai due termini della prima.

580. Teorema. *Qualunque sia l'origine della equazione differenziale $Pdx + Qdy = 0$, esisterà sempre un moltiplicatore adattato a renderla differenziale esatta.*

Abbiamo dimostrato (n. 554) che l'equazione $Pdx + Qdy = 0$ ammette sempre un'integrale; sia siffatto integrale $f(x, y, c) = 0$; differenziando ed eliminando c otterremo necessariamente l'equazione $Pdx + Qdy = 0$; ovvero $\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}$. E siccome comunque si cambi la forma dell'integrale il valore di $\frac{dy}{dx}$ tratto da esso rimane sempre lo stesso, perciò posto che l'equazione $f(x, y, c) = 0$ risoluta rapporto a c ci dia $U = c$, e quindi $\frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy = 0$, avremo

$$-\frac{\frac{dU}{dx}}{\frac{dU}{dy}} = -\frac{P}{Q}, \qquad \frac{\frac{dU}{dx}}{\frac{dU}{dy}} + \frac{dy}{dx} = \frac{P}{Q} + \frac{dy}{dx},$$

$$\left(\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dy}\frac{dy}{dx}\right)\frac{dU}{dy} = \left(\frac{P}{Q} + \frac{dy}{dx}\right)\frac{dU}{dy},$$

$$\frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy = \left(Pdx + Qdy\right)\frac{1}{Q}\frac{dU}{dy};$$

ora il 1° membro di questa equazione è una differenziale esatta ,

tale adunque sarà anco il secondo; per conseguenza la proposta, ogniqualvolta si moltiplicherà per la quantità $\frac{1}{Q}\frac{dU}{dy}$, diverrà una differenziale esatta.

581. Corollario I. Dalla precedente dimostrazione si raccoglie che ove fosse cognito l'integrale $U=c$ d'una equazione differenziale $Pdx+Qdy=0$, il fattore adattato a renderla differenziale esatta sarebbe dato dalla derivata di U presa rapporto ad y divisa per Q.

Esempio. Abbiasi l'equazione $y^2-2a(x+y)=0$. Differenziando avremo $ydy-a(dx+dy)=0$; eliminando a, avremo pure

$$-ydx+(2x+y)\,dy=0; \tag{1}$$

questa equazione non è differenziale esatta, ma il moltiplicatore adattato a renderla tale si può dedurre dalla equazione primitiva posta sotto la forma $\frac{y^2}{2(x+y)}=a$; questo moltiplicatore sarà $\frac{1}{2x+y}\frac{y^2+2xy}{2(x+y)^2}$. Infatti l'equazione (1) si cangia in

$$\frac{(y^2+2xy)\,dy-y^2dx}{2(x+y)^2}=0,$$

che è equazione differenziale esatta; il 1° membro di essa nasce evidentemente dalla differenziazione della funzione $\frac{y^2}{2(x+y)}$.

582. Corollario II. Trovato un solo fattore della proposta potremo trovarne infiniti altri. Sia M questo fattore, e sia $PMdx+QMdy=dV$; moltiplicando per una funzione qualunque di V avremo $(Pdx+Qdy)\,MfV=fVdV$; e siccome il 2° membro $fVdV$ è la differenziale esatta d'una certa funzione FV tale sarà pure il 1°; conseguentemente la formula MfV rappresenterà infiniti fattori che rendono la proposta integrabile. Si vuol dire con ciò che moltiplicata per MfV, la proposta medesima diverrà la differenziale esatta d'una certa funzione di x e y. Questa funzione sarà la funzione stessa che abbiamo rappresentata con FV; per cui l'integrale della proposta sarà l'eq. $FV=c$; la quale risoluta che sia rapporto a V darà $V=c_1$; c_1 essendo al pari di c una costante arbitraria. Dunque tutti i moltiplicatori compresi nella formula MfV, dove f indica una funzione affatto arbitraria, condurranno sempre ad un medesimo integrale. Tali moltiplicatori non differiranno fra loro che per la funzione f.

583. Corollario III. Quando si conosceranno due diversi moltiplicatori adattati a rendere il 1° membro della equazione $Pdx + Qdy = 0$ differenziale esatta, l'integrale di essa si otterrà uguagliando il loro rapporto ad una costante arbitraria. Infatti sieno tali fattori $M.\varphi V$, $M.\psi V$; ponendo $\frac{M.\varphi V}{M.\psi V} = c$, risulterà $\frac{\varphi V}{\psi V} = c$, e risolvendo questa equaz. avremo $V = c_1$ come sopra.

584. Problema II. *Data una equaz. differenziale $Pdx+Qdy=0$, trovare un moltiplicatore capace di renderla integrabile.*

Sia M il richiesto moltiplicatore; sarà $PMdx + QMdy$ una differenziale esatta, e quindi $\frac{d.PM}{dy} = \frac{d.QM}{dx}$, cioè

$$P\frac{dM}{dy} - Q\frac{dM}{dx} + M\frac{dP}{dy} - M\frac{dQ}{dx} = 0; \qquad (2)$$

questa equazione in quanto esprime la relazione che dee sussistere fra la funzione ignota M, le sue derivate parziali $\frac{dM}{dx}$, $\frac{dM}{dy}$, e le variabili x, y di cui sono funzioni note P e Q, si è, come dicesi, una *equazione a differenziali parziali*, e presenta quanto alla integrazione maggiori difficoltà della proposta.

Per altro se il moltiplicatore M non dovrà contenere che una variabile sola x o y sarà cosa agevole il determinarlo. Imperocchè, 1° sia M funz. della sola x; risulterà $\frac{dM}{dy} = 0$, e $\frac{dM}{dx}$ non sarà altrimenti una derivata parziale: talchè l'eq. (2) diverrà

$$\frac{dM}{M} = \left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right)\frac{dx}{Q}, \quad 1M = \int\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right)\frac{dx}{Q}; \qquad (3)$$

acciocchè l'integrazione sia possibile, dovrà il 2° membro essere funzione della sola x; dunque il moltiplicatore M sarà funzione della sola x, allorquando la quantità $\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right)\frac{1}{Q}$ non conterrà in nessuna maniera la y.

2° Sia M funz. della sola y; sarà $\frac{dM}{dx} = 0$, e l'eq. (2) diverrà

$$\frac{dM}{M} = \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right)\frac{dy}{P}, \quad 1M = \int\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right)\frac{dy}{P}; \qquad (4)$$

qui, acciocchè l'integrazione sia possibile, il 2° membro dovrà es-

sere funzione della sola y; dunque il moltiplicatore M sarà funzione della sola y allorquando la quantità $\left(\frac{dQ}{dx}-\frac{dP}{dy}\right)\frac{1}{P}$ non conterrà in nessuna maniera la y.

585. Corollario. Avendosi l'eq. lineare $dy+Pydx+Qdx=0$, nella quale P e Q si reputano funzioni della sola x, sarà facile vedere che il moltiplicatore M dovrà essere una funzione della sola x; e per mezzo della (3) troveremo $\mathrm{l}M=\int Pdx$, $M=e^{\int Pdx}$.

Diguisachè la proposta diverrà

$$e^{\int Pdx}dy+Py\,e^{\int Pdx}dx+e^{\int Pdx}Qdx=0,$$

ovvero
$$d.ye^{\int Pdx}=-e^{\int Pdx}Qdx;$$

dunque
$$y=e^{-Pdx}\left(-\int e^{\int Pdx}Qdx+C\right),$$

come già trovammo (n. 576).

586. Scolio I. Di tutte le equazioni, nelle quali si possono separare le variabili, si può sempre assegnare il moltiplicatore. Supponiamo che l'equazione $Pdx+Qdy=0$, sostituendo ad x,y due funzioni di altre due variabili s, t si cangi nella equazione $Mds+Ndt=0$, M essendo funzione di s, N funzione di t; supponiamo inoltre che dividendo l'equazione per K funzione di s e t si vengano a separare le variabili; $\frac{Mds+Ndt}{K}$ sarà una differenziale esatta. Ora se in questa quantità si sostituiscono ad s e t i loro valori espressi in x e y, il risultato $\frac{P}{K}dx+\frac{Q}{K}dy$ sarà anch'essa differenziale esatta, e quindi integrabile. Dunque $\frac{1}{K}$, ove nella quantità K si pongano in luogo di s e t i loro valori espressi per x e y, sarà il moltiplicatore della equazione proposta.

Esempio. L'equazione $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx+dy=0$, facendo $y=tx$, si cangia in $(\varphi t+t)\,dx+xdt=0$, le cui variabili possono separarsi dividendo per $(\varphi t+t)x$; dunque il moltiplicatore della equazione proposta sarà $\frac{1}{\left(\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}\right)x}$. Infatti essa si cangia in

$$\frac{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx+dy}{\left(\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}\right)x}=\frac{dx}{x}+\frac{\frac{dy}{x}-\frac{ydx}{x^2}}{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}}=\frac{dx}{x}+\frac{d\frac{y}{x}}{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}}=0.$$

587. Scolio II. Or sia $Pdx+Qdy=0$ una eq. omogenea del grado n in x e y; facendo $y=tx$, essa si cangerà in

$$(px^n+qx^nt)\,dx+qx^{n+1}dt=0,$$

le cui variabili vengono a separarsi dividendo per $px^{n+1}+qx^{n+1}t$; dunque $\frac{1}{px^{n+1}+qx^{n+1}t}$ ovvero $\frac{1}{Px+Qy}$ sarà il moltiplicatore della funzione $Pdx+Qdy$ ove essa sia omogenea.

Ciò può pure dimostrarsi avendo ricorso al teorema I n. 183. Imperocchè sia M un moltiplicatore omogeneo del grado m capace di rendere la proposta integrabile; avremo $MPdx+MQdy=dU$, e più generalmente $M\varphi U.Pdx+M\varphi U.Qdy=\varphi UdU=dU_1$; dove la funzione U_1 sarà del grado $p+m+n+1$ (detto p il grado di φU); talchè avremo (n. 183),

$$M\varphi U.Px+M\varphi U.Qy=(p+m+n+1)\,U_1,$$

e potremo supporre sempre che $p+m+n+1$ non sia zero, essendochè φU può essere una funzione qualunque, quindi sarà

$$\frac{Pdx+Qdy}{Px+Qy}=\frac{dU_1}{(p+m+n+1)U_1};$$

e siccome il 2° membro è differenziale esatta, tale sarà pure il 1°, perciò il moltiplicatore $\frac{1}{Px+Qy}$ rende differenziale esatta la proposta: il che è quanto abbiamo trovato di sopra.

Se fosse $Px+Qy=0$, questo metodo non potrebbe usarsi; ma in tal caso avremmo $Q=-\frac{Px}{y}$, e la proposta si cangerebbe in $Pdx-\frac{x}{y}Pdy=0$, ovvero in $ydx-xdy=0$, che dà $y=ax$.

Esempio. Sia l'equazione $(x-2y)\,dx+y\,dy=0$; il fattore per il quale essa diverrà integrabile sarà $\frac{1}{(x-2y)\,x+y^2}$, ovvero $\frac{1}{(x-y)^2}$. Infatti si ottiene

$$\frac{(x-2y)\,dx+y\,dy}{(x-y)^2}=\frac{dx-dy}{x-y}+\frac{dx}{x-y}-\frac{x(dx-dy)}{(x-y)^2},$$

ovvero $$d\mathrm{l}\,(x-y)+d\left(\frac{x}{x-y}\right)=0,$$

il cui integrale è $\mathrm{l}(x-y)+\dfrac{x}{x-y}=c.$

588. Scolio III. Quando l'equazione differenziale proposta può dividersi in due parti riesce facile ricavare il moltiplicatore di tutta l'equazione da quelli che sono propri a cangiare ciascuna delle parti medesime in differenziali esatte. Sia l'equazione

$$Pdx+Qdy+P_1dx+Q_1dy=0,$$

e supponiamo che M, M_1 sieno i moltiplicatori adattati a rendere integrabili separatamente ciascuna delle funzioni $Pdx+Qdy$, P_1dx+Q_1dy, diguisachè sia

$$PMdx+QMdy=dU, \qquad P_1M_1dx+Q_1M_1dy=dU_1;$$

la formula $M\varphi U$ comprenderà tutti i moltiplicatori relativi alla prima, e la formula $M_1\psi U_1$ tutti quelli relativi all'altra; or se sarà possibile determinare le funzioni φ e ψ per modo che le due espressioni $M\varphi U$, $M_1\psi U_1$ riescano identiche, e coincidano in una sola e medesima funzione, questa sarà uno dei moltiplicatori della proposta.

Esempio I. $axdy-aydx=(xdx+ydy)\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}$. Il 2° membro è una differenziale esatta, ed il suo integrale si è $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2-a^2)^3}$; dunque qualunque funzione di questa quantità, ovvero di $x^2+y^2-a^2$, sarà un moltiplicatore atto a rendere integrabile il 2° membro. Il 1° membro diviene integrabile quando si moltiplica per $\dfrac{1}{x^2}$, ed allora il suo integrale è $\dfrac{ay}{x}$; qualunque funzione $\dfrac{ay}{x}$ moltiplicata per $\dfrac{1}{x^2}$ sarà un moltiplicatore atto a rendere integrabile il 2° membro. Ora è manifesto che le due funzioni $\varphi(x^2+y^2-a^2)$, $\dfrac{1}{x^2}\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ riescono identiche per

$$\varphi(x^2+y^2-a^2)=\frac{1}{a^2+(x^2+y^2-a^2)}=\frac{1}{x^2+y^2},\ \psi\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}};$$

dunque $\dfrac{1}{x^2+y^2}$ è il fattore che rende la proposta integrabile.

Esempio II. $aydx + bxdy = x^m y^n (a'ydx + b'xdy)$. Il 1° membro si rende integrabile moltiplicandolo per $\frac{1}{xy}$, e l'integrale essendo $alx + bly = l(x^a y^b)$, tutti gli altri moltiplicatori si comprenderanno nella formula $\frac{1}{xy}\varphi(x^a y^b)$. Il 2° membro poi diviene integrabile moltiplicato che sia per $\frac{1}{x^{m+1}y^{n+1}}$, e l'integrale essendo $l(x^c y^e)$, saranno tutti gli altri moltiplicatori rappresentati dalla formula $\frac{1}{x^{m+1}\,y^{n+1}}\psi(x^c y^e)$. Ora a rendere i due moltiplicatori identici facciamo

$$\varphi(x^a y^b) = x^{ra} y^{rb},\ \psi(x^c y^e) = x^{sc} y^{se};$$

e perchè deesi avere $x^{ra-1}.y^{rb-1} = x^{sc-m-1}.y^{se-n-1}$, sarà

$$ra = sc - m,\ rb = se - n,\ r = \frac{cn - em}{ae - bc},\ s = \frac{an - bm}{ae - bc};$$

laonde il moltiplicatore adattato a rendere integrabile la proposta sarà

$$x^{\frac{cn - em}{ae - bc} - 1}\ xy^{\frac{an - bm}{ae - b} - 1}.$$

589. Scolio IV. Abbiamo detto che fatta la separazione delle variabili una equazione prende la forma $Xdx + Ydy = 0$ il cui integrale è $\int Xdx + \int Ydy = c$; or sembra che non potendosi assegnare in termini finiti questi integrali, neppure possa assegnarsi in termini finiti l'integrale della proposta. Talvolta però avviene che siffatti integrali non si sappiano assegnare e che nullameno si trovi l'integrale della proposta. Ciò segue rispetto alla equazione

$$\frac{dx}{\sqrt{(a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(a + by + cy^2 + ey^3 + fy^4)}};$$

l'integrale di ciascun membro non si sa assegnare in quantità finite; cionullameno, come osservò il primo l'Eulero, si sa determinare l'integrale algebrico della equazione. Prima di integrar questa eq. non sarà però inopportuno integrar la seguente.

590. Problema III. *Integrare l'equazione*

$$\frac{dx}{\sqrt{(a + bx + cx^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(a + by + cx^2)}}.$$

Facendo ciascun membro uguale a dt avremo

$$dx = dt\sqrt{(a+bx+cx^2)}, \qquad dy = dt\sqrt{(a+by+cy^2)},$$

e $$\frac{dx+dy}{dt} = \sqrt{(a+bx+cx^2)} + \sqrt{(a+by+cy^2)}; \quad (5)$$

inoltre $$\frac{dx^2}{dt^2} = a+bx+cx^2, \quad \frac{dy^2}{dt^2} = a+by+cy^2;$$

e differenziando nella ipotesi di dt costante

$$\frac{2d^2x}{dt^2} = b+2cx, \quad \frac{2d^2y}{dt^2} = b+2cy.$$

Or facciasi $x+y=p$, donde $dx+dy=dp$, $d^2x+d^2y=d^2p$;

e $$\frac{2d^2x+2d^2y}{dt^2} = \frac{2d^2p}{dt^2} = 2b+2cp;$$

moltiplicando per dp, e quindi integrando nella ipotesi di dt costante, avremo

$$\frac{2dpd^2p}{dt^2} = 2bdp + 2cpdp, \quad \frac{dp^2}{dt^2} = C+2bp+cp^2;$$

e quindi $$\frac{dp}{dt} = \sqrt{(C+2bp+cp^2)};$$

ovvero $$\frac{dx+dy}{dt} = \sqrt{[c+2b(x+y)+c(x+y)^2]}; \quad (6)$$

in fine uguagliando questo valore coll'altro (5) trovato sopra, avremo l'integrale della proposta così espresso

$$\sqrt{(a+bx+cx^2)} + \sqrt{(a+by+cy^2)} = \sqrt{[C+2b(x+y)+c(x+y)^2]}. \quad (7)$$

591. Scolio. Questo metodo non può usarsi nel caso in cui i radicali comprendano potenze di x e di y superiori alla 2ª.

592. Problema IV. *Integrare l'equazione*

$$\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3+fx^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(a+by+cy^2+ey^3+fy^4)}}.$$

Uguagliando l'uno e l'altro membro a dt avremo

$$dx = dt\sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3+fx^4)}, \quad dy = dt\sqrt{(a+by+cy^2+ey^3+fy^4)};$$

$$\frac{dx+dy}{dt} = \sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3+fx^4)} + \sqrt{(a+by+cy^2+ey^3+fy^4)}, \quad (8)$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} = a+bx+cx^2+ex^3+fx^4, \quad \frac{dy^2}{dt^2} = a+by+cy^2+ey^3+fy^4;$$

e differenziando nell'ipotesi di dt costante

$$\frac{2d^2x}{dt^2}=b+2cx+3ex^2+4fx^3,\quad \frac{2d^2y}{dt^2}=b+2cy+3ey^2+4fy^3;$$

dunque $\dfrac{2(d^2x+d^2y)}{dt^2}=2b+2c\,(x+y)+3e(x^2+y^2)+4f(x^3+y^3)$,

$$\frac{dx^2-dy^2}{dt^2}=b\,(x-y)+c\,(x^2-y^2)+e(x^3-y^3)+f\,(x^4-y^4).$$

Or facciasi $x+y=p$, $x-y=q$, $x=\frac{1}{2}(p+q)$, $y=\frac{1}{2}(p-q)$;

avremo $\quad dx+dy=dp, \qquad d^2x+d^2y=d^2p,$

$$dx=\tfrac{1}{2}(dp+dy), \qquad dy=\tfrac{1}{2}(dp-dy);$$

$$dx^2=\tfrac{1}{4}(dp^2+dy^2+2dpdy),\ dy^2=\tfrac{1}{4}(dp^2+dy^2-2dpdy);$$

$$dx^2-dy^2=dpdy,\ x^2=\tfrac{1}{4}(p^2+q^2+2pq),\ y^2=\tfrac{1}{4}(p^2+q^2-2pq);$$

$$x^2+y^2=\tfrac{1}{2}(p^2+q^2), \quad x^2-y^2=pq.$$

$$x^3=\tfrac{1}{8}(p^3+q^3+3p^2q+3pq^2),\ y^3=\tfrac{1}{8}(p^3-q^3+3pq^2-3p^2q),$$

$$x^3+y^3=\tfrac{1}{4}(p^3+3pq^2), \quad x^3-y^3=\tfrac{1}{4}(q^3+3p^2q),$$

$$x^4-y^4=(x^2+y^2)(x^2-y^2)=\tfrac{1}{2}pq\,(p^2+q^2).$$

Laonde risulterà

$$\frac{d^2x+d^2y}{dt^2}=\frac{d^2p}{dt^2}=b+cp+\tfrac{3}{4}e\,(p^2+q^2)+\tfrac{1}{2}fp\,(p^2+3q^2),$$

$$\frac{dx^2-dy^2}{dt^2}=\frac{dpdq}{dt^2}=bq+cpq+\tfrac{1}{4}e\,q\,(q^2+3p^2)+\tfrac{1}{2}fpq(p^2+q^2),$$

$$\frac{dpdq}{qdt^2}=b+cp+\tfrac{3}{4}e\,(p^2+\tfrac{1}{3}q^2)+\tfrac{1}{2}fp\,(p^2+q^2),$$

$$\frac{d^2p}{dt^2}-\frac{dpdq}{qdt^2}=\tfrac{1}{2}e\,q^2+fpq^2;$$

dividendo per q^2, e moltiplicando per $2dp$, sarà

$$\frac{2q^2dpd^2p-2qdp^2dq}{q^4dt^2}=edp+2fpdp;$$

integrando $\dfrac{dp^2}{q^2dt^2}=ep+fp^2+C$; $\quad \dfrac{dp}{dt}=q\sqrt{(C+ep+fp^2)}$;

ovvero $\dfrac{dx+dy}{dt}=(x-y)\sqrt{\,[C+e\,(x+y)+f\,(x+y)^2]}$;

infine uguagliando questo valore coll'altro (8) trovato sopra, avremo l'integrale della proposta così espresso

$$\sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3+fx^4)}+\sqrt{(a+by+cy^2+ey^6+fy^4)}$$
$$=(x-y)\sqrt{[C+e(x+y)+f(x+y)^2]} \qquad (9)$$

593. Scolio I. Il precedente metodo d'integrazione è quello istesso immaginato dal Lagrange ed alquanto semplicizzato dall'Eulero; esso però non può estendersi alle equazioni nelle quali la variabile sotto il segno radicale oltrepassa la quarta potenza.

594. Scolio II. Facendo $e=0, f=0$, si trova

$$\sqrt{(a+bx+cx^2)}+\sqrt{(a+by+cy^2)}=(x-y)\sqrt{C};$$

che è l'integrale della equazione indicata al n. 590, posto sotto forma più semplice dell'altro (7) trovato qui sopra.

XI. L'integrazione delle equazioni del prim' ordine a due variabili i cui differenziali oltrepassano il primo grado.

595. Problema. *Integrare l'equazione*

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n+P\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1}+Q\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2}\ldots+T=0,$$

dove $P, Q, \ldots T$ sono funzioni di x ed y.

Supponendo che la proposta risoluta rispetto a $\frac{dy}{dx}$ ci dia $\frac{dy}{dx}=V_1, =V_2, \ldots = V_n$, $V_1, V_2, \ldots V_n$ essendo funzioni di x e y, avremo

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n+P\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1}\ldots+T=\left(\frac{dy}{dx}-V_1\right)\left(\frac{dy}{dx}-V_2\right)\ldots\left(\frac{dy}{dx}-V_n\right);$$

donde si vede che l'equazione data sarà soddisfatta tostochè sia soddisfatta una qualunque delle seguenti

$$\frac{dy}{dx}-V_1=0,\quad \frac{dy}{dx}-V_2=0,\ \ldots \frac{dy}{dx}-V_n=0;$$

per conseguenza il sarà da uno qualunque degl'integrali di esse.

Sieno siffatti integrali

$$U_1+c_1=0,\quad U_2+c_2=0,\ \ldots.\ U_n+c_n=0;$$

è facile il vedere che anco i prodotti di due qualunque di essi, di tre, ec., e se vuolsi di tutti, debbono soddisfare alla proposta:

imperocchè la derivata del prodotto $(U_1+c_1)(U_2+c_2)(U_3+c_3)\ldots$ essendo

$$U'_1(U_2+c_2)(U_3+c_3)\ldots+U'_2(U_1+c_1)(U_3+c_3)\ldots+U'_3(U_1+c_1)(U_2+c_2)\ldots$$

è forza che vada a zero, dovendo andare a zero ciascuno de'suoi termini. Dunque l'integrale più generale della proposta sarà il prodotto $(U_1+c_1)(U_2+c_2)\ldots(U_n+c_n)$, oppure $(U_1+c)(U_2+c)\ldots(U_n+c)$ perchè non si toglie nulla alla generalità di esso facendo $c=c_1=c_2=c_3\ldots=c_n$.

596. Corollario. Da ciò si raccoglie che ogni equazione differenziale del 1° ordine nella quale entra la potenza n^{ma} della derivata $\frac{dy}{dx}$, ha per integrale una equazione in cui la costante arbitraria si trova inalzata alla potenza n^{ma}.

Esempio. $dy^2-a^2dx^2=0$; si trova $\frac{dy}{dx}=\pm a$; donde si hanno i due integrali $y-ax+c_1=0$, $y+ax+c_2=0$, l'integrale più generale sarà $(y-ax+c_1)(y+ax+c_2)=0$, ovvero $(y-ax+c)(y+ax+c)=0$.

597. Scolio. Quando però la risoluzione algebrica della proposta riesce impossibile, l'esposto metodo non può usarsi, e ad ottener l'integrale sarà d'uopo aver ricorso ad artifizi particolari. Qui giova far conoscere quello che può usarsi allorquando la proposta è capace di prender la forma $y=\varphi(x,y')$. In tal caso sarà

$$y'=\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\varphi}{dy'}\frac{dy'}{dx},$$

equazione differenziale del 1° ordine fra y' ed x: questa equazione integrata darà una equazione fra x ed y'; laonde eliminando y' per mezzo della proposta avremo l'integrale richiesto.

Per esempio:

1° Sia $y=Mx+N$, M ed N essendo funzioni di y'; sarà

$$dy=Mdx+\left(x\frac{dM}{dy'}+\frac{dN}{dy'}\right)dy',\quad (M-y')dx+x\frac{dM}{dy'}dy'+\frac{dN}{dy'}dy'=0;\quad (1)$$

di qui mediante la formula (2) n. 576, avremo

$$x+e^{-\int\frac{dM}{M-y'}}\left[\int\frac{dN}{M-y'}e^{\int\frac{dM}{M-y'}}+C\right]=0,\quad (2)$$

ciò fatto dovrà eliminarsi y' per mezzo della proposta.

2° Sia $y = y'x + fy'$; sarà $M = y', N = fy'$ e l'eq. (1) diverrà

$$\left(x + \frac{dN}{dy'}\right)dy' = 0, \text{ donde } dy' = 0 \ (3), \text{ oppure } x + \frac{dN}{dy'} = 0; \quad (4)$$

ora la prima di queste due eq. ci darà $y' = c$, l'altra $y' = \xi x$: attenendoci ad $y' = c$, la proposta si cangerà in

$$y = cx + fc, \tag{5}$$

e questa eq. rappresenterà l'integrale generale della proposta; attenendoci poi al valore $y' = \xi x$, la proposta si cangerà in

$$y = x.\xi x + f(\xi x); \tag{6}$$

paragonando la (6) colla (5) si vedrà che esse differiscono solo per essere nella (6) la costante arbitraria che si trova nella (5) cangiata in una funzione della x; la relazione (6) non può adunque aversi come un integrale particolare; essa è una equazione finita la quale soddisfà all'equazione differenziale proposta $y = y'x + fy'$ senza essere compresa nell'integrale completo di essa $y = cx + fc$; imperocchè comprese nell'integrale completo sono soltanto quelle relazioni che possono ricavarsi dall'integrale completo medesimo attribuendo un valore particolare alla costante arbitraria.

Esempio. $ydx - xdy = a\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; cioè $y = y'x + a\sqrt{(1 + y'^2)}$.

Si trova $\frac{dN}{dy'} = \frac{ay'}{\sqrt{(1 + y'^2)}}$; così $dy' = 0$ ed $x + \frac{ay'}{\sqrt{(1 + y'^2)}} = 0$, sono le eq. che tengono il luogo della (3) e della (4); la prima ci dà l'integrale completo $y = cx + a\sqrt{(1 + c^2)}$; l'altra l'equazione $x^2 + y^2 = a^2$, la quale sebbene non si trovi compresa nell'integrale completo pure soddisfà alla proposta.

XII. Le soluzioni singolari delle equazioni differenziali del prim' ordine a due variabili.

598. Definizione. Dicesi *soluzione singolare* d'una equazione differenziale ogni equazione finita capace di soddisfare alla equazione differenziale medesima senza esser compresa nel suo integrale completo.

599. Scolio I. Abbiasi l'eq. differenziale $dy = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{(x^2 + y^2 - m^2)}}$; l'integrale completo di essa è $y + c = \sqrt{(x^2 + y^2 - m^2)}$, ovvero

$x^2 - 2cy - m^2 - c^2 = 0$, c essendo la costante arbitraria. Mediante i diversi valori che si possono attribuire a questa costante verremo a conoscere tutti gl'integrali particolari contenuti nell'integrale completo. Esiste però un'altra eq. finita, $x^2 + y^2 = m^2$, la quale soddisfà evidentemente alla equazione differenziale sebbene non sia compresa nell'integrale completo medesimo: imperocchè per nessun valore della costante l'equazione $x^2 + y^2 = m^2$ propria d'un circolo, potrà ricavarsi dall'equazione $x^2 - 2cy - m^2 - c^2 = 0$ rappresentante una parabola.

600. Scolio II. L'Eulero fu il primo a scuoprire le soluzioni singolari di certe eq. differenziali del 1° ordine, e ne fece menzione nel suo trattato di meccanica: quasi nello stesso tempo scrisse di esse anco il Clairaut. Prima del Lagrange per altro si è creduto che le soluzioni singolari fossero assolutamente indipendenti dall'integrale completo; egli provò che esse sono una immediata conseguenza delle regole generali d'integrazione, dimostrando, 1° come potevansi dedurre dall'integrale completo, 2° come dalla equazione differenziale.

601. Problema. *Trovare le soluzioni singolari d'una equazione differenziale $V = 0$ del prim'ordine a due variabili, deducendole dall'integrale completo di essa.*

Sia $f(x, y, c) = 0$ l'integrale completo della equazione differenziale proposta $V = 0$. Questa equazione sarà il risultato della eliminazione di c fra l'equazione $f(x, y, c) = 0$ e la sua differenziale immediata che supporremo essere $Pdx + Qdy = 0$. Ora se l'equazione $f(x, y, c) = 0$ si differenziasse rispetto ad x, y e c troveremmo $Pdx + Qdy + Rdc = 0$; donde si vede che eliminando c fra le equazioni $f(x, y, c) = 0$, $Pdx + Qdy + Rdc = 0$, giungeremmo sempre alla medesima equazione $V = 0$ ove però c fosse tale da rendere nullo il termine Rdc: dunque ogni valore di c atto a soddisfare alla equazione $Rdc = 0$, muterà l'equazione $f(x, y, c) = 0$ in una equazione $\xi(x, y) = 0$ che soddisfarà alla proposta $V = 0$ al pari della $f(x, y, c) = 0$. Ma l'equazione $Rdc = 0$ è sodisfatta da $dc = 0$ (che è quanto dire da c=costante), ed ancor da $R = 0$, dunque l'equazione $R = 0$ sarà quella donde dovremo ricavare i valori di c da sostituirsi in $f(x, y, c) = 0$ ad ottenere tutte le relazioni tra x e y, indipendenti dalla costante arbitraria, ed atte a soddisfare alla equazione $V = 0$.

602. Corollario I. Se l'equazione $R=0$, cioè $\frac{df}{dc} = 0$, sarà

priva della x e della y, c risulterà costante; in tal caso l'equazione $f(x,y,c)=0$ diverrà un integrale particolare, e non offrirà alcuna cosa meritevole di considerazione.

Se l'equazione $\frac{df}{dc}=0$ sarà priva della c, se avremo cioè $\frac{df}{dc}=\varphi(x,y)=M$, questo significherà che l'equazione $f(x,y,c)=0$ contiene la c al 1° grado soltanto, e che deve essere della forma $Mc+N=0$ (supponendo N al pari di M funzione di x ed y), ragione per cui l'eq. $V=0$ sarà quella che si ottiene eliminando c fra $Mc+N=0$ e $cdM+dN=0$, cioè $MdN-NdM=0$, la quale è soddisfatta appunto da $M=0$ ovvero da $\frac{df}{dc}=0$; nullameno $M=0$ non sarà una soluzione singolare, sibbene un integrale particolare corrispondente a $c=\infty$; infatti $M=-\frac{N}{c}$.

Se l'equazione $\frac{df}{dc}=0$ conterrà x, y e c, avremo c dato per una funzione di x e di y; laonde l'equazione $f(x,y,c)=0$ si muterà in $\xi(x,y)=0$, e questa sarà in generale una soluzione singolare della $V=0$, come quella che è stata desunta dalla $f(x,y,c)=0$ attribuendo a c (che in ogni integrale particolare è costante) un valore variabile.

Esempio. $xdx+ydy=dy\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}$; il cui integrale completo è $f=x^2-2cy-m^2-c^2=0$.

Avremo $\frac{df}{dc}=-2y-2c=0$, $c=-y$. Laonde sostituendo questo valore di c nell' integrale suddetto, si avrà la soluzione singolare $x^2+y^2=m^2$.

603. Corollario II. Supponiamo che l' eq. $f(x,y,c)=0$ risoluta rapporto a c dia $c=\varphi(x,y)$; ponendo $\varphi(x,y)$ in luogo di c la funzione $f(x,y,c)$ risulterà identica allo zero, e tali risulteranno pure le sue derivate parziali relative ad x e ad y; dunque avremo

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dc}\frac{dc}{dx}\geq 0,\qquad \frac{df}{dy}+\frac{df}{dc}\frac{dc}{dy}\geq 0,$$

$$\frac{dc}{dx}=-\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dc}},\qquad \frac{dc}{dy}=-\frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dc}};$$

or siccome $\frac{df}{dc}=0$ ci dà $\frac{dc}{dx}=\infty$, $\frac{dc}{dy}=\infty$, si conchiude che se $\varphi(x,y)=c$ sarà l'integrale completo d'una equazione differenziale $V=0$, tutte le relazioni di x e y capaci di rendere infinite le derivate parziali $\frac{d\varphi(x,y)}{dx}$, $\frac{d\varphi(x,y)}{dy}$, soddisfaranno alla equazione $V=0$. Di queste relazioni saranno poi soluzioni singolari quelle soltanto che combinate coll'integrale $f(x,y,c)=0$ non renderanno $\varphi(x,y)$ uguale ad una costante; le altre saranno integrali particolari.

Esempio. L'integrale posto qui sopra risoluto rispetto a c, dà $c=-y+\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}$; per cui avremo

$$\frac{dc}{dx}=\frac{d\varphi(x,y)}{dx}=\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}};$$

dunque la relazione $x^2+y^2=m^2$, come quella che rende infinita la derivata $\frac{d\varphi(x,y)}{dx}$, soddisfarà alla equazione differenziale $xdx+y\,dy=dy\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}$. Questa relazione poi è una soluzione singolare perchè combinata colla equazione

$$c=-y+\sqrt{(x^2+y^2-m^2)},$$

fa risultare c uguale ad una variabile, e non già costante.

604. Corollario III. Quando l'equazione $f(x,y,c)=0$ risoluta rispetto ad y prendesse la forma $y=F(x,c)$, avremmo

$$dy=\frac{dy}{dx}dx+\frac{dy}{dc}dc;$$

ed in questo caso il valore di c dovrebbe esser tale da soddisfare alla equazione $\frac{dy}{dc}=0$.

Se poi l'equazione suddetta risoluta rispetto ad x prendesse la forma $x=F_1(y,c)$, avremmo

$$dx=\frac{dx}{dy}dy+\frac{dx}{dc}dc;$$

e qui il valore di c dovrebbe esser tale da soddisfare alla equazione $\frac{dx}{dc}=0$.

Dunque tutti i valori di c pei quali può l'integrale $f(x,y,c)=0$

mutarsi in soluzione singolare, saranno dati dalle equazioni $\frac{dy}{dc}=0, \frac{dx}{dc}=0.$

Esempio. Abbiasi l'equazione $\frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{dy}{\sqrt{Y}}$, dove si suppone $X=a+bx+cx^2+ex^3+fx^4$, $Y=a+by+cy^2+ey^3+fy^4$;
posto
$$V=e(x+y)+f(x+y)^2$$
l'integrale di questa equazione sarà (n. 592),
$$\sqrt{X}+\sqrt{Y}=(x-y)\sqrt{(C+V)}.$$
Siccome V è funzione di $x+y$ sarà $\frac{dV}{dx}=\frac{dV}{dy}=V'$ (n. 184).

Differenziando l'integrale dato rapporto ad y e c, e supponendo x costante, avremo
$$\frac{Y'dy}{2\sqrt{Y}}=-dy\sqrt{(C+V)}+(x-y)\frac{dC+V'dy}{2\sqrt{(C+V)}},$$
$$Y'\sqrt{(C+V)}dy=-2dy(C+V)\sqrt{Y}+(x-y)(dC+V'dy)\sqrt{Y},$$
$$\frac{dy}{dC}=\frac{(x-y)\sqrt{Y}}{Y'\sqrt{(C+V)}-(x-y)V'\sqrt{Y}+2(C+V)\sqrt{Y}}.$$

Or si osservi che all'integrale suindicato può darsi ancò la forma seguente
$$\sqrt{X}+\sqrt{Y}=-(y-x)\sqrt{(C+V)};$$
allora si vedrà che ad avere il valore di $\frac{dx}{dC}$, potremo permutare nel valore di $\frac{dy}{dC}$, x in y e viceversa, e cangiare il segno di $\sqrt{(C+V)}$; cosicchè avremo
$$\frac{dx}{da}=\frac{(x-y)\sqrt{X}}{X'\sqrt{(C+V)}-(x-y)V'\sqrt{X}-2(C+V)\sqrt{Y}}.$$

Facendo $\frac{dy}{dC}=0$, troveremo $x-y=0$; ma siccome in questa equazione non è compresa la C, così essa non sarà una soluzione singolare, sibbene (come abbiamo dimostrato) un integrale particolare corrispondente ad $a=\infty$.

Per altro è da notare che $\frac{dy}{dC}$ riducesi a zero ponendo ancora

$Y=0$, purchè non abbiasi nello stesso tempo $Y'=0$, che in questo caso risulterebbe $\frac{dy}{dC}=\frac{0}{0}$. Ora

$$Y=a+by+cy^2+ey^3+fy^4=\frac{1}{f}(y-r_1)(y-r_2)(y-r_3)(y-r_4),$$

r_1, r_2, r_3, r_4 essendo le radici della equazione $Y=0$; dunque $y=r_1, y=r_2, y=r_3, y=r_4$ saranno altrettante soluzioni particolari della proposta, ove però queste radici sieno tutte disuguali fra loro, giacchè le uguali renderebbero nulla anche la derivata Y'.

Allo stesso risultato si giunge partendo dalla condizione $\frac{dx}{dC}=0$. Dunque tutte le soluzioni singolari della proposta sono comprese nelle formule $x=r, y=r$, prendendo per r una qualunque delle radici disuguali della equazione

$$a+br+cr^2+cr^3+fr^4=0.$$

605. Corollario III. Supponiamo che il valore di c desunto dall'integrale $f(x,y,c)=0$ per una delle regole anzidette, sia $c=\psi(x,y)$: se (rappresentando con a una costante) l'eq. $f(x,y,c)=0$ potrà mettersi sotto la forma $\chi(x,y)+[c-\psi(x,y)](c-a)=0$, la relazione che si troverà sostituendo a c la funzione $\psi(x,y)$ non sarà una soluzione singolare: infatti il porre $c=\psi(x,y)$, equivale a porre $c=a$, perchè l'equazione sì pel primo che pel secondo valore conduce al medesimo risultato. Dunque affinchè il valore di $c=\psi(x,y)$ faccia luogo ad una soluzione singolare bisogna che il sostituire in luogo di c la funzione $\psi(x,y)$ non equivalga a sostituire in luogo di c un valore costante.

Esempio I. Sia $(x^2-b)c^2+(x^2+y^2-b)(y^2-2cy)=0$; avremo $\frac{df}{dc}=2(x^2-b)c-2y(x^2+y^2-b)$; e quindi

$$c=\frac{y(x^2+y^2-b)}{x^2-b}.$$

Or si osservi che la proposta può mettersi sotto la forma

$$\frac{x^2+y^2-b}{x^2-b}y^2-c\left(\frac{2y(x^2+y^2-b)}{x^2-b}-c\right)=0;$$

e pel valore trovato di c diventa $\frac{(x^2+y^2-b)y^4}{(x^2-b)^2}=0$, ovvero $x^2+y^2=b$. Questa però non è una soluzione singolare, perchè

porre $c=\frac{y(x^2+y^2-b)}{x^2-b}$ equivale a porre $c=0$, come può facilmente vedersi; cosicchè $x^2+y^2=b$ è appunto un'integrale particolare corrispondente a $c=0$.

Esempio II. $y=x+(c-1)^2(c-x)^2$; avremo

$$\frac{df}{dc}=2(c-x)(c-1)(2c-x-1)=0;$$

questa equazione può essere soddisfatta da $c=1$, da $c=x$, e da $c=\frac{1}{2}(x+1)$.

Ora per $c=1$ si ottiene l'integrale particolare $y=x$. Per $c=x$ si ottiene lo stesso integrale particolare, sebbene c sia variabile; imperocchè porre $c=x$ equivale a porre $c=1$. Per $c=\frac{1}{2}(x+1)$ si ha la soluzione singolare $y=x-\frac{1}{16}(x-1)^4$.

606. Teorema. *Le soluzioni singolari d'una equazione differenziale* Pdx + Qdy = 0 *rendono infiniti i moltiplicatori pei quali questa equazione riesce integrabile.*

Supponiamo che l' integrale completo della equazione $Pdx+Qdy=0$ sia $\varphi(x,y)=c$, e che il moltiplicatore capace di rendere questa eq. integrabile sia M; $M(Pdx+Qdy)=0$ sarà la differenziale esatta e immediata di $\varphi(x,y)=c$. La soluzione singolare $\xi(x,y)=0$ non sarà compresa nella eq. $\varphi(x,y)=c$; conseguentemente il valore di y, per es. $y=\chi x$, tratto dall'equazione $\xi(x,y)=0$ non soddisfarà all'eq. $\varphi(x,y)=C$; ciò vuol dire che la quantità $\varphi(x,\chi x)$ non sarà costante, e che il differenziale immediato di $\varphi(x,y)$ cioè $M(Pdx+Qdy)$ non può essere reso nullo da $y=\chi x$. D'altra parte, perchè la soluzione singolare $\xi(x,y)=0$ soddisfà alla eq. $Pdx+Qdy=0$, il valore di $y=\chi x$ rende nulla la funzione $Pdx+Qdy$; dunque il moltiplicatore $M=\frac{M(Pdx+Qdy}{Pdx+Qdy}$ per $y=\chi x$, cioè in virtù della soluzione singolare $\xi(x,y)$, riuscirà infinito; il che è quanto dovevasi dimostrare.

Esempio. L'equazione $xdx+ydy=dy\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}$, si cangia in differenziale esatta moltiplicata che sia pel fattore $\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}}$, e diventa $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}}=dy$; diguisachè la relazione $x^2+y^2=m^2$, per la quale il moltiplicatore $\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2-m^2)}}$ riesce infinito, è una soluzione singolare della proposta.

XIII. L'integrazione delle equazioni a differenze ordinarie del primo ordine a tre variabili.

607. **Problema I.** *Trovare le condizioni cui debbono soddisfare le funzioni P, Q, R, acciocchè l'equazione $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ ammetta un'integrale.*

Quando il 1° membro della proposta risulterà dalla differenziazione immediata d'una equazione finita $\varphi(x, y, z) = 0$, la condizione cui dovranno soddisfare le funzioni P, Q, R saranno espresse dalle equazioni (2) n. 546. Quando poi la proposta risulterà dalla eliminazione d'una costante c fra l'equazione primitiva $\varphi(x, y, z) = 0$ e l'equazione differenziale immediata, o da alcun'altro calcolo posteriore alla differenziazione medesima, quale sarebbe per esempio la divisione d'un fattore comune a tutti i termini, allora essa non soddisfarà altrimenti alle condizioni generali suindicate. Contuttociò supponendo che x, y sieno indipendenti fra loro e z funzione di esse, e risolvendo la proposta rapporto a dz, la funzione $-\frac{P}{R}dx - \frac{Q}{R}dy$ appunto perchè x e y sono fra loro indipendenti, e perchè essendo uguale al differenziale dz deve essere una differenziale esatta, soddisfarà alla condizione (1) n. 546; dunque facendo

$$p = -\frac{P}{R}, \qquad q = -\frac{Q}{R},$$

ed osservando che p e q oltre contenere x e y contengono ancora z (funzione delle due variabili stesse x e y), avremo

$$\frac{dp}{dy} + \frac{dp}{dz}\frac{dz}{dy} = \frac{dq}{dx} + \frac{dq}{dz}\frac{dz}{dx};$$

sostituendo i valori di p e q, e facendo $\frac{dz}{dx} = -\frac{P}{R}$, $\frac{dz}{dy} = -\frac{Q}{R}$,

$$P\left(\frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy}\right) + Q\left(\frac{dR}{dx} - \frac{dP}{dz}\right) + R\left(\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}\right) = 0; \quad (1)$$

questa si è la condizione la quale esprime che z è funzione di due variabili indipendenti x e y cui è legata mediante una sola equazione; tal condizione dee verificarsi acciocchè la proposta sia integrabile.

Notisi che la condizione medesima avrebbe luogo quando avessero luogo le equazioni (2) n. 546, perchè ciascuno dei tre binomj che moltiplicano P, Q, R, saranno identicamente nulli.

608. **Problema II.** *Integrare l'eq.* $Pdx + Qdy + Rdz = 0$.

Se le funzioni P, Q, R, soddisfacessero alle condizioni (2) n. 546, l'integrale della proposta potrebbe aversi mediante la formula generale (6) n. 550; ma se in luogo delle condizioni medesime si verificherà la (1) n. 606, terremo il metodo seguente. Risolvendo l'equazione rapporto a dx si trova

$$dx = -\frac{Q}{P}dy - \frac{R}{P}dz;$$

or se si conoscesse il valore di x in y e z sostituendolo nei coefficienti $-\frac{Q}{P}, -\frac{R}{P}$, essi risulterebbero identicamente uguali alle derivate parziali di x prese l'una rispetto ad y l'altra rispetto a z. Dunque cercando la funzione più generale di y tale che la sua derivata rapporto ad y sia $-\frac{Q}{P}$, z essendo riputata costante, il valore richiesto di x sarà un caso particolare di essa. Integreremo adunque l'equazione $\frac{dx}{dy} = -\frac{Q}{P}$, ovvero $Pdx + Qdy = 0$, nella supposizione di z costante. Posto che l'integrale di essa sia $\xi(x, y, z) = Z$, è manifesto che la Z (rappresentante la costante arbitraria), dovrà essere indipendente da x e da y, ma potrà contenere la z. Differenziando questa equazione nella ipotesi di x, y, z tutte variabili, risulterà

$$\frac{d\xi}{dx}dx + \frac{d\xi}{dy}dy + \frac{d\xi}{dz}dz = dZ;$$

or se Z deve esser funzione della sola z, è manifesto che eliminando dal 1° membro il differenziale dx per mezzo della proposta, e la variabile x per mezzo della equazione $\xi(x, y, z) = Z$, l'altra variabile y dovrà necessariamente sparire; così avremo una equazione fra z e Z che integrata farà conoscere l'espressione di Z in z ponendo questa espressione in luogo di Z, l'equazione $\xi(x, y, z) = Z$ si muterà nell'integrale richiesto.

Esempio I. $(y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz = 0$.

L'integrale di questa equazione la quale soddisfà alle condizioni (2) n. 546, si trova mediante la formula (5) n. 550, ed è $xy + xz + zy = c$.

Esempio II. $(2xz+z^2)\,dx+2yz\,dy-2(x^2+y^2+a)\,dz=0$. Questa equazione soddisfà alla condizione (1) n. 606. Considerando z come costante essa si riduce a $(zx+z^2)dx+2ydy=0$,

il cui integrale è $\qquad x^2+y^2+xz^2=z;$

differenziando avremo $\quad (zx+z^2)\,dx+2y\,dy+2xz\,dz=dZ;$

ma in forza dell'ottenuto integrale si ha $y^2=Z-x^2-xz^2$, dunque sostituendo avremo $z(z+a)\,dz=zdZ$; questa si è l'eq. la quale non contiene che z; integrando sarà

$$cz^2=Z+a,\ Z=cz^2-a, \text{ ed } x^2+y^2+(x-c)z^2+a=0;$$

tale si è l'integrale della proposta.

Esempio III. Sia data l'equazione

$$(y^2+yz+z^2)\,dx+(x^2+xz+z^2)\,dy+(x^2+xy+y^2)\,dz=0;$$

essa soddisfà alla condizione (1) n. 607; posto $dz=0$ si trova

$$\frac{dx}{x^2+xz+z^2}+\frac{dy}{y^2+yz+z^2}=0:$$

ed or facendo $x=u-\frac{1}{2}z$, risulta

$$\int\frac{dx}{x^2+xz+z^2}=\int\frac{du}{u^2+\frac{3}{4}z^2}=\frac{2}{z\sqrt{3}}\operatorname{ar\,tang}\frac{2u}{z\sqrt{3}}=\frac{2}{z\sqrt{3}}\operatorname{ar\,tang}\frac{2x+z}{z\sqrt{3}};$$

e per la medesima ragione $\displaystyle\int\frac{dy}{y^2+yz+z^2}=\frac{2}{z\sqrt{3}}\operatorname{ar\,tang}\frac{2y+z}{z\sqrt{3}}$,

e siccome la formula $\displaystyle\operatorname{tang}(a+b)=\frac{\operatorname{tang}a+\operatorname{tang}b}{1-\operatorname{tang}a\operatorname{tang}b}$ fatto

$\operatorname{tang}a=m$, $\operatorname{tang}b=n$, ci dà $\displaystyle\operatorname{ar\,tang}m+\operatorname{ar\,tang}n=\operatorname{ar\,tang}\frac{m+n}{1-mn}$,

perciò sommando i due integrali trovati, avremo

$$\frac{2}{z\sqrt{3}}\operatorname{ar\,tang}\frac{(x+y+z)\,z\sqrt{3}}{z^2-zx-zy-2xy}=Z;$$

or se l'arco contenuto in questa equazione è uguale $\frac{1}{2}Zz\sqrt{3}$, funzione della sola z, dovrà anco la tangente di esso essere uguale ad una funzione di z, e potrà essa pure venire rappresentata da Z; dunque

$$\frac{2(x+y+z)}{z^2-xz-yz-2xy}=Z.$$

Differenziando questa eq. ed eliminando dx per mezzo della pro-

posta sparirà anco dy, ed otterremo

$$z(x^2+xy+y^2)zdz = -2(xz^2+yz^2+2xyz+x^2y+xy^2)\,dz$$
$$-(z^2-xz-yz-2xy)^2dZ;$$

trasportando tutti i termini nel primo membro, sviluppando e dividendo pel fattore $x+y+z$, otterremo

$$2(xy+yz+xz)\,Z^2dz+(x+y+z)\,z^2dZ=0;$$

e siccome dall'integrale suddetto si ha

$$xz+yz=\frac{(z^2-2xy)\,Z-z^2}{Z+1},$$

perciò $\quad \dfrac{dz}{z}=\dfrac{dZ}{Z}-\dfrac{dZ}{Z-1},\quad z=\dfrac{cZ}{Z-1},\quad Z=\dfrac{z}{z-c};$

ond'è che l'integrale della proposta sarà $xy+xz+yz=c(x+y+z)$.

XIV. L'integrazione delle equazioni differenziali a due variabili del 2° ordine.

609. I. Equazioni del 2° ordine prive della y. Mancando la y l'equazione da integrarsi sarà

$$f\left(x,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0;$$

la quale, ponendo $\dfrac{dy}{dx}=y'$, e perciò $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dy'}{dx}$, si cangerà in

$$f\left(x,y',\frac{dy'}{dx}\right)=0,$$

equazione del 1° ordine tra le variabili x e y'. Dunque quando manca la y la proposta può trasformarsi in una equazione del 1° ordine; questa integrata darà una equazione fra x, y' ed una costante arbitraria. Posto $\dfrac{dy}{dx}$ in luogo di y', per la susseguente integrazione avremo una equazione finita fra x, y e due costanti arbitrarie.

610. Problema I. *Integrare l'equazione* $dx^2+dxdy=\varphi x\,d^2y$.
Dividendo per dx^2 avremo

$$(1+y')\,dx=\varphi x\,dy',\qquad \frac{dy'}{1+y'}=\frac{dx}{\varphi x},$$

e integrando $l(1+y')=\int\frac{dx}{\varphi x}+lC;\ 1+y'=Ce^{\int\frac{dx}{\varphi x}}.$

Or ponendo $\frac{dy}{dx}$ in luogo di y' sarà

$$dy=Ce^{\int\frac{dx}{\varphi x}}dx-dx,\qquad y=C\int e^{\int\frac{dx}{\varphi x}}dx-x+C_1.$$

611. II. Equazioni del 2° ordine prive della x. Mancando la x l'equazione da integrarsi sarà

$$f\left(y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0;$$

ponendo come sopra $\frac{dy}{dx}=y'$, avremo $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'}{dx}=\frac{y'dy'}{y'dx}=\frac{y'dy'}{dy}$;

per cui la proposta si cangerà in

$$f\left(y,y',\frac{y'dy'}{dy}\right)=0,$$

equazione del 1° ordine fra le variabili y,y'. Dunque ove manchi la x potrà la proposta abbassarsi d'un ordine, e farsi poscia un calcolo in tutto somigliante a quello indicato sopra.

612. Problema II. *Integrare l'eq.* $d^2y+Adxdy+Bydx^2=0$, *essendo* A *e* B *costanti.*

Dividendo per dx^2 avremo l'equazione omogenea

$$y'dy'+Ay'dy+Bydy=0;$$

Laonde fatto $y'=uy,\ dy'=udy+ydu$, sarà

$$(u^2+Au+B)\,dy+uydu=0.$$

Rappresentando con a e b le radici della equazione $u^2+Au+B=0$, ed osservando che da $y'=uy$ si ha $dy=uydx$, otterremo

$$\frac{dy}{y}=-\frac{udu}{(u-a)(u-b)},\qquad dx=-\frac{du}{(u-a)(u-b)};$$

$$\frac{dy}{y}-adx=-\frac{du}{u-b},\qquad \frac{dy}{y}-bdx=-\frac{du}{u-a},$$

$$ly-ax=l\,\frac{c}{u-b},\qquad ly-bx=l\,\frac{c_1}{u-a},$$

$$ye^{-ax}=\frac{c}{u-b},\quad ye^{-bx}=\frac{c_1}{u-a},\quad u-b=\frac{c}{y}e^{ax},\quad u-a=\frac{c_1}{y}e^{bx};$$

$$y=\frac{c}{a-b}e^{ax}-\frac{c_1}{a-b}e^{bx},\quad \text{ovvero}\quad y=Ce^{ax}+C_1e^{bx}.$$

613. Corollario I. Se fosse $a=b$ avremmo $y=(C+C_1)e^{ax}$, il quale integrale perchè contiene una sola costante arbitraria $C+C_1$ non sarebbe completo. Ad avere l'integrale completo, torneremo alla proposta la quale darà

$$\frac{dy}{y}=-\frac{udu}{(u-a)^2}=-\frac{du}{(u-a)^2}-\frac{adu}{u-a},\ dx=-\frac{du}{(u-a)^2}$$

$$\text{l}y=\text{l}\frac{c}{u-a}+\frac{a}{u-a},\quad y(u-a)=ce^{\frac{a}{u-a}},\quad x=\frac{1}{u-a}-c_1,$$

$$y=ce^{ax+ac_1}(x+c_1)=e^{ax}(ce^{ac_1}x+cc_1e^{ac_1})=e^{ax}(cx+c_1).$$

614. Corollario II. Se fosse $a=m+n\sqrt{-1}$, $b=m-n\sqrt{-1}$, avremmo

$$y=e^{mx}(Ce^{nx\sqrt{-1}}+C_1e^{-nx\sqrt{-1}}).$$

Sostituendo ad $e^{\pm nx\sqrt{-1}}$ le espressioni (24) (25) n. 244, otterremo

$$y=e^{mx}[(C_1+C)\cos nx+(C_1-C)\sqrt{-1}\ \text{sen}\ nx];$$

e siccome possiamo disporre di C e C_1 a piacere nostro facendo $C_1=h+k\sqrt{-1}$, $C=h-k\sqrt{-1}$, sarà

$$C_1+C=2h=A,\quad (C_1-C)\sqrt{-1}=-2k=A_1,$$

$$y=e^{mx}(A\cos nx+A_1\ \text{sen}\ nx);$$

in fine facendo $A=C\ \text{sen}\ C_1$, $A_1=C\cos C_1$,

risulterà $$y=Ce^{mx}\ \text{sen}\ (nx+C_1).$$

615. III. Equazioni omogenee rispetto ad x, y, dx, dy, d²y.

Supponiamo che soddisfaccia a questa condizione l'equazione generale del 2° ordine

$$Pd^2y+Qdy^2+Rdxdy+Sdx^2=0,$$

nella quale equazione P, Q, R, S si suppongono funzioni di x e y. Dividendo per dx^2 avremo

$$Py''+Qy'^2+Ry'+S=0;$$

e siccome se dx, dy, d^2y valgono per una dimensione, è forza che y' sia della dimensione 0 ed y'' della dimensione -1, perciò ponendo $y''=\frac{z}{x}$, l'equazione risultante $\frac{P}{x}z+Qy'^2+Ry'+S=0$, sarà omogenea rispetto ad x, y; quindi facendo $y=ux$, tutti i termini di essa si troveranno moltiplicati per una medesima potenza di x, la quale mediante la divisione potrà eliminarsi. Di questa guisa otterremo una eq. fra y', u e z nella quale z sarà sempre al 1° grado; per lo che giungeremo sempre ad avere una eq. finita $z=f(u, y')$.

Ciò posto sarà cosa agevole il determinare l'integrale della proposta. Essendo $y=ux$ e $dy=y'dx$, avremo

$$y'dx=udx+xdu,\quad (y'-u)\,dx=xdu\,;\quad \frac{dx}{x}=\frac{du}{y'-u}\,;\qquad (1)$$

inoltre perchè $y''=\frac{z}{x}$, e $dy'=y''dx$, sarà $dy'=\frac{zdx}{x}$, $\frac{dx}{x}=\frac{dy'}{z}$;

per conseguenza

$$\frac{du}{y'-u}=\frac{dy'}{z}\,;\qquad (2)$$

da questa eq. potremo eliminare z mediante il valore $z=f(u, y')$ trovato sopra; e di questa guisa avremo una equazione del 1° ordine fra le due variabili y' ed u; e integrando ne risulterà l'equazione $\varphi(y', u, c)=0$, c essendo una costante arbitraria. Ponendo $\frac{dy}{dx}$ in luogo di y', ed $\frac{y}{x}$ in luogo di u, avremo una eq. del 1° ordine fra x ed y, e da essa ricaveremo l'integrale richiesto.

Esempio. $3ydx^2-3xdxdy+4y^2d^2y=0$: questa equazione è omogenea relativamente alle variabili ed ai loro differenziali. Dividendo per dx^2 si ottiene $3y-3xy'+4y^2y''=0$; e facendo $y=ux$, $y''=\frac{z}{x}$ sarà $3u-3y'+4u^2z=0$, $\quad z=\frac{3(y'-u)}{4u^2}$.

Posto siffatto valore nella equazione (2) si trova $4u^2dy'=3du$. Tale si è l'equazione differenziale fra u e y'; integrando sarà $y'=C-\frac{3}{4u}$. Or sostituendo questo valore di y' nella (1) avremo

$$\frac{dx}{x}=\frac{du}{C-\frac{3}{4u}-u}=\frac{-4udu}{3-4uC+4u^2}\,;$$

e supponendo che $a+2u$, $b+2u$ sieno i due fattori del trino-

mio $3 - 4uC + 4u^2$, sarà pure

$$\frac{dx}{x} = \frac{-4udu}{(a+2u)(b+2u)} = -\frac{2adu}{(a-b)(a+2u)} + \frac{2bdu}{(a-b)(b+2u)};$$

e integrando, $-\mathrm{l}c_1 + \mathrm{l}x = -\frac{a}{a-b}\mathrm{l}(a+2u) + \frac{b}{a-b}\mathrm{l}(b+2u)$;

e mutando i segni, $\frac{c_1}{x} = (a+2u)^{\frac{a}{a-b}} \times (b+2u)^{-\frac{b}{a-b}}$,

ovvero, cangiando la costante arbitraria,

$$C_1(bx+2y)^b = (ax+2y)^a;$$

questo sarà l'integrale richiesto; il quale è completo perchè una delle costanti arbitrarie è C_1, l'altra è C e si trova inclusa ne'valori di a e b.

616. IV. Equazioni omogenee rispetto ad y, dy, d^2y. Supponiamo che soddisfaccia a questa condizione l'equazione

$$Pd^2y + Qdy^2 + Rdxdy + Sdx^2 = 0,$$

nella quale P, Q, R, S si suppongono funzioni di x e y. Dividendo per dx^2, avremo come sopra

$$Py'' + Qy'^2 + Ry' + S = 0;$$

or questa equazione dovrà essere omogenea rispetto ad y, y' e y''; imperocchè la proposta se è omogenea rispetto ad y, dy, d^2y è forza che sia omogenea anco rispetto a y, $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ non volendosi dx contare per una dimensione. Dimanierachè se porremo $y' = uy, y'' = zy$ tutti i termini della equazione suddetta risulteranno moltiplicati per una medesima potenza di y, tolta la quale resterà una equazione finita fra u, z ed x che rappresenteremo così $\varphi(u, z, x) = 0$.

Ciò fatto sarà cosa agevole il determinar l'integrale della proposta. Essendo $dy' = y''dx$ otterremo $d.uy = zydx$ ovvero $udy + ydu = zydx$; e conseguentemente, perchè $dy = y'dx = uydx$,

$$u^2dx + du = zdx; \tag{3}$$

da questa equazione potremo eliminare z mediante la proposta ridotta a $\varphi(u, z, x) = 0$; il risultato sarà una equazione del 1° ordine fra u ed x, la quale integrata darà una equazione finita fra u, x ed una costante arbitraria C che rappresenteremo con $\psi(u, x, C) = 0$.

Tornando quindi alla equazione $dy = y'dx = uydx$ da cui si ha $\frac{dy}{y} = udx$, potremo da questa per mezzo della $\psi(u,x,C)=0$ eliminare la u; allora avremo una equazione del 1° ordine fra x e y, e integrando otterremo

$$ly = \int udx + lC_1, \qquad y = C_1 e^{\int udx}, \qquad (4)$$

cioè l'integrale completo della proposta.

Esempio. $yd^2y - dy^2 = Xydxdy$, dove X è funzione della x: questa equazione è omogenea rispetto ad y, dy, d^2y. Dividendo per dx^2 si ottiene $yy'' - y'^2 = Xyy'$, e facendo $y' = uy$, $y'' = zy$,

sarà $$zy^2 - u^2y^2 = Xuy^2, \text{ ovvero } z = u^2 + Xu.$$

Or pongasi questo valore di z nella equazione (3); avremo

$$\frac{du}{u} = Xdx, \quad u = Ce^{\int Xdx};$$

poscia per la (4) $$y = C_1 e^{C\int e^{\int Xdx} . dx}.$$

617. Scolio. Quanto all'integrazione dell' equazione generale lineare del 2° ordine vedasi il seguente articolo (n. 632).

XV. *L'integrazione delle equazioni lineari di qualunque ordine.*

618. Definizione. Una equazione si chiama *lineare* quando tutte le variabili in essa contenute eccettuata quella il cui differenziale primo è costante, e i loro differenziali non oltrepassano la prima dimensione.

619. Corollario. L'equazione generale lineare tra due variabili x, y sarà

$$y^{(n)} + Ay^{(n-1)} + By^{(n-2)} \dots + My' + Ny = X;$$

dove $A, B, \dots M, N$ sono funzioni di x. Il primo membro di questa equazione si dirà P; cosicchè l'equazione medesima si rappresenterà con $P = X$, ed allorquando sarà $X = 0$, con $P = 0$.

620. Teorema I. *La somma di un numero qualunque di funzioni della* x *capaci di soddisfare alla equazione* $P=0$, *soddisfarà anch'essa alla equazione medesima.*

Sieno $y_1, y_2, \ldots y_n$ più funzioni della x, cioè più valori di y, capaci di soddisfare alla equazione $P=0$; avremo

$$y_1^{(n)}+Ay_1^{(n-1)}\ldots\ldots+Ny_1 \gtrless 0,$$

$$y_2^{(n)}+Ay_2^{(n-1)}\ldots\ldots+Ny_2 \gtrless 0,$$

$$\ldots\ldots$$

sommando avremo quella medesima identità che otterremmo sostituendo ad y la somma $y_1+y_2\ldots\ldots+y_n$.

621. Corollario. Se della equazione $P=0$ conosceremo n integrali particolari, tali però che ciascuno di essi contenga una costante arbitraria, l' integrale completo sarà dato dalla loro somma.

622. Teorema II. *Se una funzione* y *della* x *soddisfarà alla eq.* $P=0$, *anco il prodotto di questa funzione per una costante* c *soddisfarà alla equazione medesima.*

Imperocchè essendo

$$y_1^{(n)}+Ay_1^{(n-1)}\ldots\ldots+Ny_1 \gtrless 0,$$

moltiplicando per c, sarà pure

$$cy_1^{(n)}+cAy_1^{(n-1)}\ldots\ldots+cNy_1 \gtrless 0;$$

il qual risultato è appunto quello che otterremmo sostituendo cy_1 ad y.

623. Corollario. Se n funzioni di x, cioè $y_1, y_2, \ldots y_n$, soddisfanno alla equazione $P=0$, l'integrale completo di questa equazione sarà

$$y=c_1 y_1+c_2 y_2\ldots\ldots+c_n y_n.$$

624. Teorema III. *L'equazione* $P=0$ *potrà sempre abbassarsi d'un ordine facendo* $y=e^{\int udx}$, *dove* u *rappresenta una funzione della* x.

Perchè essendo $y'=yu$, $y''=y(u^2+u')$, $y'''=y(u^3+3uu'+u'')$,... l'equazione $P=0$, si cangerà nella seguente

$$u^n+Au^{n-1}+Bu^{n-2}\ldots+N+Hu'+Iu''\ldots+Tu^{(n-1)}=0; \quad (1)$$

la quale non è lineare, sibbene d'un ordine inferiore d'una unità a quello della proposta.

625. Teorema IV. *L'integrale della equazione $P=0$ avrà necessariamente la forma $y=c_1 y_1+c_2 y_2 \ldots +c_n y_n$, dove $c_1, c_2, \ldots$ saranno n costanti arbitrarie, ed $y_1, y_2, \ldots$ n funzioni diverse della x.*

Infatti sia y_1 una funzione di x capace di soddisfare alla equazione $P=0$, e priva d'ogni costante arbitraria; il che può sempre supporsi, perchè se ne contenesse alcuna, essa potrebbe eliminarsi attribuendole un valore particolare. In forza del teor. II (n. 621), $y=by_1$ sarà un integrale particolare della eq. $P=0$. Or prendiamo a determinare le derivate di y. Nulla vieta che nella espressione di y la costante arbitraria b si consideri come una funzione della x, purchè tutti i termini provenienti dalla variazione di b si pongano uguali allo zero. Perciò avremo

(n. 143)
$$y'=by'_1+b'y_1,$$
$$y''=by_1''+2b'y'_1+b''y_1,$$
$$\cdots\cdots$$
$$y^{(n)}=by_1^{(n)}+nb'y_1^{(n-1)}\ldots+b^{(n)}y_1;$$

sostituendo queste espressioni nella equazione $P=0$, risulterà

$$b(y_1^{(n)}+Ay_1^{(n-1)}\ldots+Ny_1)+Hb^{(n)}+Tb^{(n-1)}\ldots+Pb'=0;$$

osservando che $y_1^{(n)}+Ay_1^{(n-1)}\ldots+Ny_1=0$, dividendo per H e facendo $b'=z$, avremo l'equazione lineare

$$z^{(n-1)}+Ky^{(n-2)}\ldots+Qz=0, \tag{2}$$

dove i coefficienti $K,\ldots Q$ saranno funzioni della x. Sia z una funzione della x capace di soddisfare a questa eq.; sarà $z=c_2 z_1$ un integrale particolare di essa; il perchè avremo

$$b'=c_2z_1,\quad b=c_1+c_2\int z_1dx,\quad y=by_1=c_1y_1+c_2y_1\int z_1dx;$$

cioè
$$y=c_1y_1+c_2y_2,$$

y_2 essendo una funzione differente da y.

Siccome questo risultato dee potersi applicare a qualunque equazione lineare, l'equazione lineare (2) ammetterà anch'essa al pari della eq. $P=0$, un'integrale della forma

$$z=c_1z_1+c_2z_2;$$

donde avremo $\quad b=c_1+c_2\int(c_1y_1+c_2y_2)\,dx;$

e quindi $\quad y=by_1=c_1y_1+c_1c_2y_1\int y_1dx+c_2c_2y_1\int y_2dx;$

ovvero $$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3.$$

Tornando all' equazione (2) potremo concedere che anch' essa abbia un integrale di questa forma; sicchè sarà dato continuare il ragionamento in questo modo fino a che abbiasi una espressione di y, la quale contenga n costanti arbitrarie.

626. Teorema V. *L'equazione lineare $P = 0$ non può ammettere alcuna soluzione singolare.*

Imperocchè supponendo che l'equazione $P = 0$ ammetta una soluzione singolare rappresentata da $y = y_1$, potremo col mezzo d'un ragionamento in tutto somigliante al precedente trovare un integrale completo di essa della forma $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 ... + c_n y_n$; ora y_1 si ottiene rendendo nulle tutte le costanti tranne c_1 e facendo $c_1 = 1$, dunque y_1 non è una soluzione singolare, ma sibbene un integrale particolare.

627. Teorema VI. *L'equazione $P = X$ potrà sempre integrarsi quando si conosceranno n integrali particolari della equazione $P = 0$.*

Supponendo che gli n integrali particolari della equazione $P = 0$ sieno $y_1, y_2, ... y_n$, l'integrale completo sarà

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 ... + c_n y_n. \tag{3}$$

Ciò posto prendiamo a provare che potranno sempre determinarsi le funzioni che si debbono sostituire alle costanti $c_1, c_2, ... c_n$, acciocchè siffatto integrale si muti in quello della equazione $P = X$. A tale uopo basterà dimostrare che sempre sarà dato di determinare n equazioni dalle quali potranno ricavarsi siffatte funzioni mediante l'eliminazione. Una di tali equazioni può dirsi data dalla proposta $P = X$, perchè dovendo le quantità $y, y', ... y^{(n)}$, desunte dalla espressione (3) nell'ipotesi di $c_1, c_2, ... c_n$ variabili, soddisfare alla proposta medesima, fatta la sostituzione avremo appunto una delle equazioni che trattasi di trovare. Or differenziando l'equazione (3), si trova

$$y' = c_1 y'_1 + c_2 y'_2 .... + c_n y'_n + y_1 c'_1 + y_2 c'_2 .... + y_n c'_n;$$

e siccome $c_1, c_2, ... c_n$ debbono esser subordinate alla condizione

$$y_1 c'_1 + y_2 c'_2 .... + y_n c'_n = 0;$$

questa sarà una delle equazioni che dovranno servire alla determinazione di $c_1, c_2, ... c_n$. Frattanto ne risulterà

$$y' = c_1 y'_1 + c_2 y'_2 .... + c_n y'_n.$$

Ciò fatto differenzieremo nuovamente questa eq. ed uguaglieremo a zero la somma dei termini contenenti le derivate c'_1, c'_2,... c'_n, e così continueremo fino all'espressione di $y^{(n-1)}$ inclusive; in tal guisa avremo $n-1$ equazioni fra le derivate $c'_1, c'_2, \ldots c'_n$ delle funzioni che si tratta di determinare ed altre funzioni cognite; alle quali $n-1$ equazioni è d'uopo aggiungere quella ancora che proviene dal sostituire nella eq. $P=X$, i valori di $y, y', \ldots y^{(n)}$ tratti dalla espressione (3), cioè

$$y' = c_1 y'_1 + d_2 y'_2 \ldots\ldots + c_n y'_n,$$

$$y'' = c_1 y''_1 + c_2 y''_2 \ldots\ldots + c_n y''_n,$$

$$\ldots\ldots$$

$$y^{(n-1)} = c_1 y_1^{(n-1)} + c_2 y_2^{(n-1)} \ldots + c_n y_n^{(n-1)},$$

$$y^{(n)} = c_1 y_1^{(n)} + c_2 y_2^{(n)} \ldots\ldots + c_n y_n^{(n)}$$
$$+ y_1^{(n-1)} c'_1 + y_1^{(n-1)} c'_2 \ldots + y_n^{(n-1)} c'_n.$$

Le n equazioni saranno perciò le seguenti

$$y_1 c'_1 + y_2 c'_2 \ldots\ldots\ldots + y_n c'_n = 0,$$

$$y'_1 c'_1 + y'_2 c'_2 \ldots\ldots + y'_n c'_n = 0,$$

$$\ldots\ldots$$

$$y_1^{(n-2)} c'_1 + y_2^{(n-2)} c'_2 \ldots + y_n^{(n-2)} c'_n = 0,$$

$$y_1^{(n-1)} c'_1 + y_2^{(n-1)} c'_2 \ldots + y_n^{(n-1)} c'_n = X;$$

Queste equazioni risolute rapporto a $c'_1, c'_2, \ldots c'_n$ daranno

$$c'_1 = X_1,\quad c'_2 = X_2,\quad \ldots c'_n = X_n,$$

dove con $X_1, X_2, \ldots, X_n$ si vogliono rappresentare n funzioni diverse della x. Talchè avremo

$$c_1 = \int X_1 dx + a_1,\quad c_2 = \int X_2 dx + a_2, \ldots;$$

e per conseguenza $y = y_1 (a_1 + \int X_1 dx) + y_2 (a_2 + \int X_2 dx) + \ldots$

sarà l'integrale della equazione $P = X$.

628. Problema I. *Integrare l'equazione lineare $P=0$, supponendo i coefficenti $A, B, \ldots N$ costanti.*

L'equazione (1) n. 623, sarà in questo caso soddisfatta da qualunque valore costante di u, purchè sia esso radice della eq.

$$u^n + Au^{n-1} + Bu^{n-2} \ldots + N = 0. \tag{4}$$

Sieno $a, b, \ldots t$ le radici di questa equazione; avremo

$$\int u dx = ax, = bx, \ldots = tx;$$

quindi

$$y = c_1 e^{ax}, = c_2 e^{bx}, \ldots = c_n e^{tx},$$

saranno n integrali particolari della proposta, ed

$$y = c_1 e^{ax} + c_2 e^{bx} \ldots. + c_n e^{tx}, \tag{5}$$

l'integrale completo.

629. Corollario I. Se l'equazione (4) avrà radici immaginarie l'integrale (5) riuscirà immaginario, ma sarà cosa agevole dargli forma reale. Imperocchè abbiasi

$$a = m + n\sqrt{-1},\ b = m - n\sqrt{-1};$$

i due primi termini della espressione (5) diverranno

$$c_1 e^{mx+nx\sqrt{-1}} + c_2 e^{mx-nx\sqrt{-1}} = e^{mx}\left(c_1 e^{nx\sqrt{-1}} + c_2 e^{-nx\sqrt{-1}}\right)$$

$$= e^{mx}(c_1 \cos nx + c_1\sqrt{-1} \operatorname{sen} nx + c_2 \cos nx - c_2\sqrt{-1} \operatorname{sen} nx);$$

or nulla vieta che alle costanti arbitrarie c_1 e c_2 si attribuiscano i valori che ci vengono dati di esse dalle due equazioni $c_1 + c_2 = E_1, (c_1 - c_2)\sqrt{-1} = E_2$, dove E_1, E_2 rappresentano pure due costanti arbitrarie; dunque in luogo della espressione suddetta avremo $e^{mx}(E_1 \cos nx + E_2 \operatorname{sen} nx)$; ovvero (facendo $E_1 = c \cos c_0, E_2 = c \operatorname{sen} c_0$) $ce^{mx} \operatorname{sen}(c_0 + nx)$.

630. Corollario II. Se l'equazione (4) avesse più radici uguali, per es. $a = b$, i termini corrispondenti dell'integrale si riunirebbero in un termine solo $(c_1 + c_2)e^{ax}$, che è quanto dire ce^{ax}; per la qual cosa l'integrale medesimo non contenendo altrimenti m costanti arbitrarie cesserebbe di esser completo: ma in questo caso l'integrale completo potrà trovarsi nel modo seguente.

Sieno m le radici uguali; e sia ce^{ax} il termine cui si riducono gli m primi termini dell'integrale (5): $y = ce^{ax}$ sarà un integrale particolare della proposta: dalla formula stabilita al n. 143 (la quale ci dà la derivata n^{ma} del prodotto uv), facendo $u = e^{ax}$, $v = c$, avremo

$$y^{(n)}=e^{ax}(ca^n+nca^{n-1}+\tfrac{1}{2}n(n-1)c''a^{n-2}\,\ldots\,+c^{(n)})$$
$$y^{(n-1)}=e^{ax}(ca^{n-1}+(n-1)c'a^{n-2}+\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)c''a^{n-3}\ldots+c^{(n-1)})$$
$$\cdots\cdots$$
$$y'=e^{ax}(ca+c')$$
$$y=e^{ax}.c.$$

Ora dovendo il valore $y=ce^{ax}$ soddisfare alla equazione proposta è manifesto che sostituendo in essa le suddette espressioni di $y, y', y'', \ldots y^{(n)}$, il risultato dovrà essere identicamente nullo; questo risultato metterà adunque in evidenza la forma di c acciocchè la funzione $y=ce^{ax}$ anco per c variabile non cessi di soddisfare alla equazione $P=0$. Ma fatta la sostituzione, la somma de' termini moltiplicati per c è nulla in forza della equazione (4) di cui a è radice, la somma de' termini moltiplicati per c' è anch'essa nulla, e tale si è quella ancora de' termini moltiplicati per c'', e così di seguito fino alla somma de' termini moltiplicati per $c^{(m-1)}$, essendochè a (come sappiamo dalla teoria delle equazioni) è pur radice delle $m-1$ prime derivate della equazione (4); dunque il risultato della sostituzione sarà una funzione differenziale di c nella quale l'ordine maggiore di c sarà n ed il minore m: tal funzione sarà della forma $pc^{(m)}+qc^{(m+1)}\ldots+sc^{(n)}$; ma come questa funzione istessa dev'esser nulla perciò porremo $c^{(m)}=0$, il che darà $c^{(m+1)}=0, c^{(m+2)}=0, \ldots c^{(n)}=0$, e l'eq. $P=0$ sarà soddisfatta. Frattanto dalla $c^{(m)}=0$, avremo [n.567, (2)]

$$c=c_1+c_2x+c_3x^2\ldots+c_mx^{m-1};$$

ond'è che l'integrale completo della proposta sarà

$$y=(c_1+c_2x+c_3x^2\ldots+c_mx^{m-1})e^{ax}+c_{m+1}e^{hx}+c_{m+2}e^{ix}\ldots+c_ne^{lx}.$$

631. Scolio. Se dovesse integrarsi l'equazione $P=X$, nella supposizione che i coefficenti di P sieno costanti, prima integreremmo l'equaz. $P=0$, quindi avremmo ricorso al teorema VI (n. 626), dimostrato sopra. La soluzione del seguente problema mostra l'andamento di tal calcolo.

632. Problema II. *Integrare l'equazione lineare del second'ordine $y''+Py'+Qy=X$, P e Q essendo costanti, ed X funzione della x.*

Indicando con a e b le radici della equazione

$$u^2+Pu+Q=0,$$

l'espressione generale di y sarà

$$y=c_1e^{ax}+c_2e^{bx};$$

e le funzioni incognite c_1 e c_2 dovranno soddisfare alle equazioni

$$c'_1e^{ax}+c'_2e^{bx}=0,\quad c'_1ae^{ax}+c'_2be^{bx}=X;$$

dalle quali per eliminazione si ha

$$c'_1=\frac{Xe^{-ax}}{a-b},\qquad c_2=\frac{Xe^{-bx}}{b-a};$$

di qui poi, integrando, si ricava

$$c_1=\frac{\int e^{-ax}Xdx}{b-a},\qquad c'_2=\frac{\int e^{-bx}Xdx}{a-b};$$

dimanierachè l'integrale completo sarà

$$y=\frac{e^{ax}\int e^{-ax}Xdx-e^{bx}\int e^{-bx}Xdx}{a-b};\tag{6}$$

supponendo però che ciascun integrale comprenda implicitamente la sua costante arbitraria.

633. Corollario I. Se le radici della equazione $u^2+Pu+Q=0$ fossero immaginarie, cioè da $m\pm n\sqrt{-1}$, sarebbe (n. 446)

$$y=e^{mx}E_1\cos nx+E_1\operatorname{sen} nx);$$

e le funzioni E_1, E_1, dovrebbero soddisfare alle due equazioni

$$E'_1e^{mx}\cos nx+E'_2e^{nx}\operatorname{sen} nx=0,$$

$$E'_1(me^{mx}\cos nx-ne^{mx}\operatorname{sen} nx)+E'_2(me^{mx}\operatorname{sen} nx+ne^{mx}\cos nx)=X;$$

donde si ha $E'_1=-\dfrac{Xe^{-mx}\operatorname{sen} nx}{n},\quad E'_1=\dfrac{Xe^{-mx}\cos nx}{n};$

e quindi $E_1=\dfrac{-\int Xe^{-mx}\operatorname{sen} nx.dx}{n},\ E_2=\dfrac{-\int Xe^{-mx}\cos nx.dx}{n};$

ragione per cui l'integrale completo sarà

$$y=e^{mx}\,\frac{-\int Xe^{-mx}\operatorname{sen} nx.dx\cos nx+\int Xe^{-nx}\cos nx.dx\operatorname{se} nx}{n}.$$

634. Corollario II. Se le radici della eq. $u^2+Pu+Q=0$ fossero uguali l'espressione (6) si ridurrebbe a $\frac{0}{0}$; laonde il valor vero della y si troverà in tal caso differenziando il numeratore e il denominatore rapporto ad a, oppure rap-

porto a b, e facendo nell' uno o nell' altro risultato $a=b$; così avremo

$$y=-e^{ax}\int e^{-ax}Xxdx+e^{ax}x\int e^{-ax}Xdx, \tag{7}$$

ovvero

$$y=e^{ax}\int dx\int e^{-ax}Xdx.$$

635. Scolio. Quando fosse $X=0$, i due integrali della (7) si ridurrebbero alle loro costanti arbitrarie, e l'integrale della proposta prenderebbe la forma $y=e^{ax}(cx+c_1)$, come trovammo al n. 530.

XVI. L'eliminazione delle variabili fra le equazioni lineari simultanee.

636. Problema I. *Date due equazioni $U=0$, $V=0$, l'una dell'ordine* m *l'altra dell'ordine* n *fra le variabili* x, y, t, *e i loro differenziali, eliminare la* t.

Due essendo, per es., le eq. e tre le variabili, potremo supporre una di tali variabili indipendente, e le altre funzioni di questa; la variabile indipendente sia la x; la funzione U potrà contenere

$$x, y, t, dx, dy, d^2y, \ldots d^my, dt, d^2t, \ldots d^mt,$$

e la V $\quad x, y, t, dx, dy, d^2y, \ldots d^ny, dt, d^2t, \ldots d^nt;$

differenziando n volte la $U=0$, ed m volte la $V=0$, avremo $m+n+2$ equazioni, ed $m+n+1$ quantità da eliminarsi, cioè $t, dt, \ldots d^{m+n}t$; colla eliminazione algebrica potremo adunque ottenere una equazione differenziale dell'ordine $m+n$ fra x e y, e priva della variabile t e de' suoi differenziali.

637. Scolio I. In questa operazione si richiede che la variabile indipendente sia una di quelle che non vengono eliminate; perocchè se t fosse la variabile indipendente, x ed y sarebbero funzioni della t, e i differenziali d^2x, d^2y, conterrebbero implicitamente la t.

638. Scolio II. In generale da m equazioni differenziali fra $m+1$ variabili, potremo sempre ricavare mediante l'eliminazione una equazione differenziale che conterrà due variabili sole; da questa poi avremo una equazione finita per mezzo della integrazione.

639. Problema II. *Date le due equazioni lineari*

$$Mdx + Ndy + (Px + Qy)\,dt = Vdt,$$

$$M_1dx + N_1dy + (P_1x + Q_1y)\,dt = V_1dt,$$

del 1° *ordine e fra le variabili* x, y, t, *eliminare una di esse.*

In queste eq., perchè sono lineari, tutte le variabili, tranne quella che si suppone indipendente, e le loro derivate non debbono oltrepassare il 1° grado: i coefficienti si suppongono funzioni della t. Ricavando da esse i valori di dx e dy, otterremo due equazioni della seguente forma

$$dx + (ax + by)\,dt = Tdt,$$

$$dy + (a_1x + b_1y)\,dt = T_1dt.$$

Si moltiplichi la 2ª per k, e poscia si aggiunga la 1ª, otterremo

$$dx + kdy + [(a + a_1k)\,x + (b + b_1k)\,y]\,dt = (T + T_1k)dt;$$

ponendo $x + ky = u$, sarà $dx + kdy = du - ydk$; e quindi

$$du + (a + a_1k)\,udt$$

$$-\,y\left\{(dk + [(a + a_1k)\,k - (b + b_1k]dt\right\} = (T + T_1k)\,dt;$$

e disponendo della funzione arbitraria k per modo che si annulli il moltiplicatore di y, avremo

$$du + (a + a_1k)\,udt = (T + T_1k)\,dt, \qquad (1)$$

$$dk + [(a + a_1k)\,k - (b + b_1k)]\,dt = 0; \qquad (2)$$

la (2) non contiene che k e t; quando adunque ci sarà dato di trovare un valore $k_0 = \psi t$ di k che soddisfaccia ad essa, ponendo questo valore nella (1) avremo una equazione fra u e t del primo ordine; e quindi per l'integrazione otterremo $u = ft + c$: un altro valore k_1 di k darebbe $u = \varphi t + c_1$; dimanierachè ne risulteranno le due equazioni finite

$$x + k_0y = ft + c, \quad x + k_1y = \varphi t + c_1,$$

fra x, y, t contenente ciascuna una costante arbitraria, e dalle quali potremo eliminare una delle tre variabili stesse.

640. Corollario. Se i coefficienti a, a_1, b, b_1, fossero costanti il valore di k capace di soddisfare alla equazione (2) sarebbe l'una o l'altra delle due radici k_1, k_2, della equazione seguente

$$(a + a_1k)\,k - (b + b_1k) = 0, \text{ ovvero } a_1k^2 + (a - b_1)\,k = b;$$

e siccome l'integrale dell'equazione (1), quando si faccia

$$a + a_1 k = m, \qquad T + kT_1 = S,$$

è espresso, in virtù della formula (2) n. 576, da

$$u = e^{-mt}\left(\int e^{mt} S dt + c\right),$$

perciò secondochè ci varremo del valore k_1, o del valore k_2 avremo

$$x + k_1 y = e^{-m_1 t}\left(\int e^{m_1 t} S^1 dt + c_1\right), \quad x + k_2 y = e^{-m_2 t}\left(\int e^{m_2 t} S_2 dt + c_2\right);$$

e queste sono le due equazioni finite da cui potremo eliminare una delle tre variabili x, y, t.

641. Scolio. Da ciò si raccoglie che per mezzo della integrazione simultanea delle equazioni date si risolve il problema proposto indipendentemente dalla eliminazione delle quantità differenziali come indicammo al n. 635.

642. Problema III. *Date le tre equazioni lineari*

$$Mdx + Ndy + Pdz + (Qx + Ry + Sz)\, dt = Vdt,$$

$$M_1 dx + N_1 dy + P_1 dz + (Q_1 x + R_1 y + S_1 z)\, dt = V_1 dt,$$

$$M_2 dx + N_2 dy + P_2 dz + (Q_2 x + R_2 y + S_2 z)\, dt = V_2 dt,$$

del 1° *ordine e fra le variabili* x, y, z, t, *eliminare una di esse.*

In queste eq. tutti i coefficienti sono funzioni della sola t. Ricavando da esse i valori di dx, dy, dz otterremo tre equazioni della forma seguente

$$dx + (ax + by + cz)\, dt = Tdt,$$

$$dy + (a_1 x + b_1 y + c_1 z)\, dt = T_1 dt,$$

$$dz + (a_2 x + b_2 y + c_2 z)\, dt = T_2 dt.$$

Si moltiplichi la 2ª di queste equazioni per k, la 3ª per h, e si aggiungano i due risultati alla 1ª; ponendo

$$x + ky + hz = u,$$

e per conseguenza $dx + kdy + hdz = u - ydk - zdh$,

ed $$x = u - ky - hz,$$

dipoi uguagliando a zero, fatte queste sostituzioni, i moltiplicatori della y e della z, avremo

$$du + (a + a_1k + a_2h)\,udt = (T + T_1k + T_2h)\,dt \qquad (3)$$

$$dk + [(a + a_1k + a_2h)\,k - (b + b_1k + b_2h)]\,dt = 0, \quad (4)$$

$$dh + [(a + a_1k + a_2h)\cdot h - (c + c_1k + c_2h)]\,dt = 0; \quad (5)$$

per cui si fa manifesto che trovati i valori di k ed h capaci di soddisfare alle equazioni (4) (5), la (1) contenendo le due sole variabili u e t si potrà integrare, e darà $u = e^{-mt}(\int e^{mt}\,Sdt + c)$ come agevolmente si vede [n. 576 (2)].

643. Corollario. Se i coefficienti $a, a_1, a_2, b, b_1\, b_2$ saranno costanti, i valori di k ed h capaci di soddisfare alle eq. (4) e (5) saranno costanti e dati dalle equazioni.

$$(a + a_1k + a_2h)\,k - (b + b_1k + b_2h) = 0,$$

$$(a + a_1k + a_2h)\,h - (c + c_1k + c_2h) = 0;$$

ovvero, facendo $\qquad a + a_1k + a_2h = m, \qquad (6)$

$$(m - b_1)\,k - b_2h = b, \quad (m - c_2)\,h - c_1k = c;$$

questi valori sostituiti nella (6) condurranno ad una equazione in cui la m salirà al 3° grado; e siccome a ciascun valore di m uno ne corrisponde per k ed uno per h, perciò quando si faccia $T + T_1k + T_2h = S$, avremo i tre sistemi di quantità

$$[k_1, h_1, m_1, S_1,]\ [k_2, h_2, m_2, S_2]\ [k_3, h_3, m_3, S_3]$$

i quali sostituiti in $u = e^{-mt}(\int e^{mt}Sdt + c)$ integrale della (3) daranno le tre equazioni finite

$$x + k_1y + h_1z = e^{-m_1t}\ (S_1dtc_1 + \int e^{m_1t}),$$

$$x + k_1y + h_2z = e^{-m_2t}\ (S_2dtc_2 + \int e^{m_2t}),$$

$$x + k_3y + h_3z = e^{-m_3t}\ (S_3dtc_3 + \int e^{m_3t}),$$

fra x, y, z, t, dalle quali equazioni potremo eliminare una qualunque delle variabili stesse.

644. Scolio. Il metodo d'integrazione suesposto può estendersi a qualsivoglia numero di equazioni lineari.

XVII. L'integrazione delle equazioni a differenze parziali.

645. Definizione. *Equazione a differenze* o *differenziali parziali* dicesi ogni equazione, la quale esprima una relazione di alcune o di tutte le derivate parziali d'una funzione, oppure una relazione di esse colle variabili da cui la funzione stessa dipende.

646. Scolio. Una eq. a differenze parziali del 1° ordine fra la funzione z e le variabili indipendenti x, y, sarà rappresentata da

$$F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right) = 0,$$

ovvero da
$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{1}$$

quando si ponga
$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q. \tag{2}$$

Una equazione a differenze parziali del 2° ordine fra la funzione z e le variabili x, y, sarà rappresentata da

$$F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dxdy}, \frac{d^2z}{dy^2}\right) = 0,$$

ovvero da
$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

quando si ponga congiuntamente alle (2)

$$r = \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dp}{dx}, s = \frac{d^2z}{dxdy} = \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}, t = \frac{d^2z}{dy^2} = \frac{dq}{dy}. \tag{3}$$

647. Teorema. *L'integrale completo d'una equazione a differenziali parziali dell'ordine* n *dee contenere* n *funzioni arbitrarie.*

Supponiamo in primo luogo che z sia funzione di due sole variabili indipendenti x, y; l'equazione a differenziali parziali dell'ordine n, cioè

$$F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \ldots \frac{d^nz}{dx^n}, \frac{dz}{dy}, \ldots \frac{d^nz}{dy}, \frac{d^2z}{dxdy}, \ldots \frac{d^nz}{dx^pdy^q}\right) = 0,$$

darà
$$\frac{d^nz}{dx^n} = f\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \ldots \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}, \frac{dz}{dy}, \ldots \frac{d^nz}{dy^n}, \frac{d^2z}{dxdy}, \ldots \frac{d^nz}{dx^pdy^q}\right),$$

nella qual funzione la derivata rispetto ad x non potrà superare l'ordine $n-1$. Differenziando questa funzione avremo le derivate $\frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}}, \frac{d^{n+2}z}{dx^{n+2}}, \ldots$ le quali mediante le successive sostituzioni si potranno, ridurre tutte ad essere funzioni delle medesime variabili e delle medesime derivate di cui è funzione $\frac{d^nz}{dx^n}$.

Ciò posto supponendo che per $x = 0$ la z e le sue derivate parziali rispetto ad x sino all'ordine $n-1$, si cangino nelle quantità $Y, Y_1, \ldots Y_{n-1}$ (le quali saranno tutte funzioni di y),

il valore di $\frac{d^n z}{dx^n}$ corrispondente ad $x=0$, sarà

$$\frac{d^n z}{dx^n}=f\left(y, Y, Y_1, \ldots Y_{n-1}, \frac{dY}{dy}, \ldots \frac{d^n Y}{dy^n}, \frac{dY_1}{dy}, \ldots \frac{d^q Y_p}{dy^q}\right);$$

cioè diverrà funzione di $Y, Y_1, Y_2, \ldots Y_{n-1}$; funzioni delle medesime quantità diverranno pure le derivate $\frac{d^{n+1}z}{dy^{n+1}}$, $\frac{d^{n+2}z}{dx^{n+2}}, \ldots$

Ciò posto supponiamo che $\varphi(x, y, z)=0$ sia l'integrale della proposta; i valori di $z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2 z}{dx^2}, \ldots \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}$ desunti da questa eq. e corrispondenti ad $x=0$ dovranno coincidere coi valori di $Y, Y_1, Y_2, \ldots Y_{n-1}$ desunti dalla equazione differenziale proposta. Dunque sviluppando il valore di z per mezzo del teorema del Maclaurin, l'integrale richiesto sarà necessariamente il seguente

$$z=Y_1\frac{x}{1}+Y_2\frac{x^2}{1.2}\ldots+Y_{n-1}\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}$$
$$+f(y, Y, Y_1, \ldots)\frac{x^n}{1.2\ldots n}+\ldots; \qquad (4)$$

e siccome le funzioni $Y, Y_1, Y_1, Y_2, \ldots Y_{n-1}$ rimangono indeterminate per ciò resta dimostrato, che questo integrale dee necessariamente contenente n funzioni arbitrarie della variabile y.

648. Scolio. Se le variabili indipendenti fossero in numero di n il ragionamento precedente non muterebbe; potremmo sempre supporre la funzione z sviluppata rapporto alle potenze della x; allora però le quantità $Y, Y_1, Y_2, \ldots Y_{n-1}$ in luogo di essere funzioni arbitrarie della y sarebbero funzioni arbitrarie di tutte le variabili da cui dipende la z tranne la x.

649. Problema I. *Integrare l'equazione* $F(x, y, z, p)=0$.

Risolvendo questa equazione rapporto a p avremo $\frac{dz}{dx}=\varphi(x,y,z)$; in questa equazione x ed y sono indipendenti; dunque integrare la proposta vuol dire trovare una funzione z di x e y la cui derivata parziale presa rispetto ad x sia $\varphi(x, y, z)$. Allorquando si prende questa derivata la y si suppone costante; dunque per determinare z integreremo l'equazione

$$\frac{dz}{dx}=\varphi(x, y, z), \quad \text{ovvero} \quad F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}\right)=0,$$

nella supposizione di y costante; cioè integreremo l'equazione a

differenze ordinarie $dz = \varphi(x, y, z)dx$, y essendo costante; allora in luogo di aggiungere all'integrale una costante arbitraria C, aggiungeremo una *funzione arbitraria* della y.

650. Problema II. *Integrare l'eq. lineare* $P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} = R$, *$P, Q, R$ essendo funzioni di x, y, z.*

Si tratta di trovare l'equazione la più generale fra x, y, z che soddisfaccia alla equazione proposta. Supponiamo che l'equazione incognita sia $U = f(x, y, z) = 0$; avremo

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dU}{dy} + \frac{dU}{dz}\frac{dz}{dy} = 0;$$

ricavando di qui i valori di $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, e sostituendoli nella proposta, avremo

$$P\frac{dU}{dx} + Q\frac{dU}{dy} + R\frac{dU}{dz} = 0; \tag{5}$$

d'altra parte differenziando completamente l'eq. $U = 0$, si trova

$$\frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dz}dz = 0;$$

cosicchè eliminando successivamente $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$, otterremo

$$(Pdy - Qdx)\frac{dU}{dy} + (Pdz - Rdx)\frac{dU}{dz} = 0, \tag{6}$$

$$(Pdy - Qdx)\frac{dU}{dx} + (Rdy - Qdz)\frac{dU}{dz} = 0. \tag{7}$$

Per soddisfare a tali equazioni non è necessario determinare l'equazione $U = 0$, perocchè basterà porre

$$Pdy - Qdx = 0, \quad Pdz - Rdx = 0, \quad Qdz - Rdy = 0, \tag{8}$$

che è quanto dire $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$; la qual cosa si farà ancor più manifesta osservando che queste equazioni a differenze ordinarie risultano necessariamente dalle equazioni (6) e (7), perchè dovendo la U contenere una funzione arbitraria delle variabili x, y, z è necessario che desse sieno soddisfatte qualunque sieno i valori di $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$, $\frac{dU}{dz}$.

Ciò posto vediamo come dalle equazioni (8) possa ricavarsi una equazione finita fra x, y, z. Si osservi che sostituendo nella

equazione $Pdy - Qdx = 0$ il valore di y tratto dalla $Pdz - Rdx = 0$, si trova una equazione del 2° ordine fra x, z; la quale integrata darà $z = \psi(x, a, b)$ (a e b essendo le costanti arbitrarie), e quindi $dz = \psi'(x, a, b)dx$, per cui l'eq. $Pdz - Rdx = 0$, si cangerà nella eq. finita $P = R\psi'(x, a, b)$. Frattanto le due eq. $z = \psi(x, a, b)$, $P = R\psi'(x, a, b)$ gioveranno a determinare il richiesto integrale. Eliminando a e b troveremo $M = a$, $N = b$, M ed N essendo funzioni di x, y, z; ed è manifesto che ciascuna delle due equazioni $M = a$, $N = b$ soddisfarà alla proposta, perchè soddisfà alla sua trasformata (6). Ma ad essa soddisfarà anco l'equazione $M + AN - B = 0$, A e B essendo costanti, perchè sostituendo $M + AN - B$ in luogo di u è forza che la trasformata e la proposta si mutino in identità, dappoichè esse si mutano in identità quando in luogo di u si pone $M - a$ o $N - b$. L'equazione $M + AN = B$ non è per altro che un integrale particolare, giacchè è privo della funzione arbitraria; ora ad averne l'integrale completo si potrà usare il metodo seguente.

Differenziando l'equazione $M + AN = B$, avremo $dM + AdN = 0$ questo risultato per altro può aversi ugualmente supponendo A e B variabili cioè funzioni di x, y, z, purchè i termini provenienti dalla loro variazione si annullino; or siccome differenziando secondo siffatta ipotesi abbiamo $dM + AdN + NdA = dB$, si vede manifestamente che dovrà aversi $NdA = dB$; se adunque si suppone che B sia una funzione arbitraria di A, $B = \varphi A$, l'integrale richiesto sarà dato dalle due equazioni

$$M + AN = \varphi A, \qquad N = \varphi' A.$$

Frattanto N sarà funz. arbitraria di A, e viceversa A funz. di N; ma $M = B - AN$; dunque anco M sarà funz. arbitraria di N: per conseguenza $M = \xi N$ sarà l'integrale completo richiesto.

651. Scolio I. Non è superfluo l'osservare che poste due delle tre eq. (8) la 3ª consegue di necessità ad esse. La formazione di queste equazioni è ben facile a comprendersi; esse si ottengono dividendo i differenziali dx, dy, dz per P, Q, R, ed uguagliando fra loro le tre frazioni che ne risultano.

652. Scolio II. Ponendo mente al modo col quale si ottengono le eq. finite $M = A$, $N = B$ è forza conchiudere che l'integrazione d'ogni equazione lineare a differenze parziali del 1° ordine fra x, y, z, si riduce alla integrazione d'una equazione del 2° ordine a differenze ordinarie.

Esempio I. $P\frac{dz}{dx}=R$. Le equazioni (8) si riducono a

$$dy=0,\qquad Pdz-Rdx=0;$$

la 1ª delle quali dà $y=a$; sicchè la 2ª dovrà essere integrata nella supposizione di y costante. Sia $M=b$ l'integrale di questa equazione; $M=\varphi y$ sarà l'integrale della proposta.

Esempio II. $P\frac{dz}{dx}+Q\frac{dz}{dy}=0$, P e Q essendo costanti. Le equazioni (8) si riducono a

$$Pdy-Qdx=0,\qquad Pdz=0;$$

dalle quali si ha $Py-Qx=a$, $z=b$; dunque $z=\varphi(Py-Qx)$ sarà l'integrale della proposta.

Esempio III. $P\frac{dz}{dx}+Q\frac{dz}{dy}=z$, P e Q essendo costanti. Le equazioni (8) si riducono a

$$Pdy-Qdx=0,\qquad Pdz-zdx=0,\qquad Qdz-ydy=0.$$

Secondochè prenderemo a integrare la 1ª e la 2ª, o la 1ª e la 3ª, o la 2ª e la 3ª, avremo

$$z=e^{\frac{x}{P}}\varphi(Py-Qx),\ \text{o}\ z=e^{\frac{y}{Q}}\psi(Py-Qx),\ \text{o}\ ze^{-\frac{y}{Q}}=\xi\left(ze^{-\frac{x}{P}}\right).$$

Esempio IV. $x\frac{dz}{dx}+y\frac{dz}{dy}=z$. Le eq. (8) si riducono a

$$xdy-ydx=0,\quad xdz-zdx=0,\quad ydz-zdy=0;$$

dunque l'integrale sarà

$$z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right),\quad \text{o}\quad z=y\psi\left(\frac{y}{x}\right),\quad \text{o}\quad z=x\xi\left(\frac{x}{y}\right).$$

Esempio V. $(y-bz)\frac{dz}{dx}-(x-az)\frac{dz}{dy}=bx-ay$. Le eq. (8) saranno

$$(x-az)\,dx+(y-bz)\,dy=0,$$
$$(bx-ay)\,dx-(y-bz)\,dz=0,$$
$$(bx-ay)\,dy+(x-az)\,dz=0;$$

eliminando z fra le due ultime, avremo

$$adx + bdy + dz = 0, \quad ax + by + z = c.$$

Cognita z in funzione di x e y potremmo eliminarla dalla 1ª e integrare l'equazione risultante: meglio sarà per altro moltiplicare la 2ª per x, la 3ª per y, e quindi sommare; soppresso il fattore $bx - ay$, il risultato sarà

$$xdx + ydy + zdz = 0, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = c_1;$$

perciò l'equazione $x^2 + y^2 + z^2 = \xi\,(z + ax + by)$ rappresenterà l'integrale richiesto.

653. Problema III. *Integrare l'eq.* $P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} + R\frac{dz}{du} = T$, *$P$, Q, R, T essendo funzioni di x, y, z, u.*

Sia l'integrale della proposta rappresentato dalla equazione $U = f(x, y, u, z) = 0$; avremo

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dU}{dy} + \frac{dU}{dz}\frac{dz}{dy} = 0, \quad \frac{dU}{du} + \frac{dU}{dz}\frac{dz}{du} = 0;$$

ricavando di qui i valori di $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{dz}{du}$ e sostituendoli nella proposta, otterremo

$$P\frac{dU}{dx} + Q\frac{dU}{dy} + R\frac{dU}{du} + T\frac{dU}{dz} = 0.$$

Oltracciò l'equazione $U = 0$ dà

$$\frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{du}du + \frac{dU}{dz}dz = 0;$$

eliminando $\frac{dU}{dx}$ si trova

$$(Pdy - Qdx)\frac{dU}{dy} + (Pdu - Rdx)\frac{dU}{du} + (Pdz - Tdx)\frac{dU}{dz} = 0; \qquad (9)$$

alla quale eq. si soddisfà senza determinare l'eq. $U = 0$ ponendo

$$Pdy - Qdx = 0, \quad Pdu - Rdx = 0, \quad Pdz - Tdx = 0, \qquad (10)$$

ovvero
$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{du}{R} = \frac{dz}{T}.$$

Cosicchè le tre equazioni (10) a differenze ordinarie ne formano veramente sei, le quali sono appunto tutte quelle che si otterrebbero eliminando $\frac{dU}{dy}, \frac{dU}{du}$ in luogo di eliminare $\frac{dU}{dx}$; per conseguenza tre qualunque di esse (da cui deriveranno sempre le

altre), saranno bastevoli a stabilire tra le variabili x, y, z, u le relazioni necessarie, acciocchè la trasformata della proposta cioè equazione (9), e perciò la proposta medesima, sia soddisfatta.

Supponiamo frattanto che dalle equazioni (10) o dalle altre tre che piacesse di considerare, si abbiano le equazioni finite $L = a, M = b, N = c$; siccome esse debbono soddisfare alla trasformata e perciò alla proposta, ne viene che anco l'equazione $L + AM + BN = C$ (A, B, C essendo costanti arbitrarie), soddisfarà alla trasformata, ed alla proposta medesima. Ora ad avere l'integrale completo, si differenzi l'integrale particolare già trovato; avremo $dL + AdM + MdA + BdN + NdB = dC$; perlochè sarà $MdA + NdB = dC$. Essendo il 2° membro di questa equazione una differenziale esatta tale dovrà essere il 1°; e perciò sarà necessario che M ed N sieno funzioni di A e B. Conseguentemente A e B si dovranno riputare funzioni di M ed N e la C stessa funzione essa pure di M ed N; ora $L = C - AM - BN$, dunque anco L dovrà esser funzione di M ed N; il che vuol dire che l'eq. $L = \varphi(M, N)$ sarà l'integrale richiesto.

ESEMPIO. $x\dfrac{dz}{dx} + (z+u)\dfrac{dz}{dy} + (z+y)\dfrac{dz}{du} = u + y.$

Le equazioni simultanee da integrarsi saranno

$$xdz - (u+y)dx = 0, \quad xdy - (z+u)\,dx = 0, \quad xdu - (z+y)\,dx = 0;$$

dalle quali si hanno le seguenti

$$xdz - xdy - ydx + zdx = 0,$$
$$xdy - xdu - udx + ydx = 0,$$
$$x(dz + dy + du) - 2\,(z + y + u)\,dx = 0;$$

queste integrate ci danno

$$xz - xy = a, \quad xy - xu = b, \quad z + y + u = cx^2;$$

dunque l'integrale richiesto è $x + y + z = x^2\varphi(xz - xy, xy - xu)$.

654. SCOLIO I. Proseguendo il medesimo ragionamento vedremo che ad ottenere l'integrale dell'equazione lineare

$$P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} + R\frac{dz}{du} + S\frac{dz}{dt} + \dots = V,$$

$P, Q, R, S, \dots V$ essendo funzioni di z, x, y, u, t; ec., dovremo formare le equazioni

$$Pdz - Vdx = 0,\ \ Pdy - Qdx = 0,\ \ Pdu - Rdx = 0, \text{ e. c}(11)$$

ovvero
$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{du}{R} = \frac{dt}{S} \ldots = \frac{dz}{V},$$

dalle quali avremo mediante l'integrazione, le equazioni finite $K = a$, $L = b$, $M = c$, $N = d$, ec.; e da queste l'integrale completo $K = \varphi(L, M, N$, ec.).

Esempio. $x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} + u\frac{dz}{du} + t\frac{dz}{dt} + \ldots = nz$; n essendo costante. Le equazioni (11) diverranno

$$xdz - nzdx = 0, xdy - ydx = 0, xdu - udx = 0, xdt - tdx = 0, \text{ec.};$$

ed integrate daranno $z = ax^n$, $y = bx$, $u = cx$, $t = gx$, ec.; dunque l'integrale della proposta sarà

$$z = x^n f\left(\frac{y}{x}, \frac{u}{x}, \frac{t}{x}, \ldots\right);$$

donde si raccoglie che z sarà una funzione omogenea di n dimensioni delle variabili x, y, u, t, ec., e di questa guisa si ritrova il teorema già dimostrato al n. 183 rispetto alle funzioni omogenee.

655. Scolio II. Notisi che dalla eq. $dz = pdx + qdy$ si ricava

$$d(z - px - qy) = -(xdp + ydq).$$

Or 1° se sarà data l'eq. $\frac{dz}{dy} = \varphi\frac{dz}{dx}$, cioè $q = \varphi p = P$, avremo

$$d(z - px - qy) = -(x + yP')dp;$$

e perchè il 1° membro è una differenziale esatta, tale dovrà essere ancora il 2°, e per conseguenza $x + yP'$ sarà funzione di p. Posto $x + yP' = F'p$, avremo $z - px - qy + Fp = 0$; queste due eq. comprenderanno l'integrale della proposta; cioè l'integrale nascerà da esse mediante l'eliminazione di p. Questa eliminazione per altro in generale non potrà farsi, se non dando de' valori particolari alla funzione Fp.

2° Se sarà data l'eq. $\frac{dz}{dx} = \psi\frac{dz}{dy}$, cioè $p = \psi q = Q$, avremo

$$d(z - px - qy) = -(y + xQ')dq.$$

Posto $y + xQ' = f'q$, avremo $z - px - qy + fq = 0$;

così l'integrale della proposta, il quale si trova compreso *in* queste due eq., si otterrà eliminando q da esse.

Esempio I. Abbiasi l'equazione $pq=1$, sarà $P=\frac{1}{p}$; e l'integrale sarà compreso nelle due equazioni

$$x-\frac{y}{p^2}=F'p, \qquad z-px-\frac{y}{p}+Fp=0;$$

ad ottenere un integrale particolare porremo $Fp=c$, c essendo costante, ed avremo

$$x-\frac{y}{p^2}=0, \qquad z-px-\frac{y}{p}+c=0;$$

ed eliminando p, $\qquad z=2\sqrt{xy}-a.$

Esempio II. Abbiasi l'equazione $p^2+q^2=1$; sarà

$$P=\sqrt{(1-p^2)}, \quad P'=-\frac{p}{\sqrt{(1-p^2)}}; \text{ e perciò}$$

$$x-\frac{py}{\sqrt{(1-p^2)}}=F'p, \quad z-px-y\sqrt{(1-p^2)}+Fp=0.$$

Ponendo $Fp=c$, otterremo

$$x-\frac{py}{\sqrt{(1-p^2)}}=0, \quad z-px-y\sqrt{(1-p^2)}+c=0;$$

e quindi, per l'eliminazione di p, l'integrale particolare

$$z=\sqrt{(x^2+y^2)}-c.$$

Esempio III. Abbiasi l'eq. $q=ap+b$, ove a e b sono quantità costanti, sarà $\qquad P=ap+b, \qquad P'=a;$

ed $\qquad x+ay=F'p, \qquad z-px-(ap+b)y+Fp=0.$

In questo caso si può eliminare generalmente la p; perchè essendo $x+ay$ funzione di p sarà viceversa p funzione di $x+ay$; ma $z=p(x+ay)-Fp+by$; dunque $z=by+\varphi(x+ay)$, sarà l'integrale della proposta.

656. Scolio III. L'integrazione della equazione $Pp+Qq=R$, si semplicizzerà grandemente quando essa sarà omogenea rispetto ad x, y, z. Perocchè facendo $x=tz, y=uz$, le funzioni P, Q, R si cangeranno respettivamente in P_1t^n, Q_1t^n, R_1t^n (n essendo le dimensioni di ciascun termine); laonde le equazioni

$Pdz - Rdx = 0$, $Qdz - Rdy = 0$ [(8), n. 650], daranno

$P_1 dz - R_1 (tdz - zdt) = 0$, $\quad Q_1 dz - R_1 (udz - zdu) = 0$, ovvero

$$(P_1 - tR_1)\, dz = zR_1 dt, \quad (12) \quad (Q_1 - uR_1)\, dz = zR_1 du, \quad (13)$$

e quindi, eliminando dz,

$$(P_1 - tR_1)\, du = (Q_1 - uR_1)\, dt; \tag{14}$$

questa equazione del 1° ordine tra le variabili u e t integrata che sia darà una equazione finita $\varphi(u, t) = a$ della quale ci potremo valere per eliminare u o t da una delle due precedenti; di questa guisa avremo un'altra equazione contenente due variabili sole, la quale integrata darà per esempio $\psi(z, t) = b$. Finalmente cangiando t ed u in $\frac{x}{z}$ ed $\frac{y}{z}$ otterremo i due integrali particolari $M = a$, $N = b$ da'quali risulta l'integrale completo $M = \xi N$.

Esempio. $pxz + qyz = x^2$. Sarà

$$P = tz^2, \quad Q = uz^2, \quad R = t^2z^2; \quad P_1 = t, \quad Q_1 = u, \quad R_1 = t^2.$$

Perlochè l'equazione (14) diverrà

$$(t - t^3)\, du = (u - ut^2)\, dt \quad \text{ovvero} \quad (tdu - udt)(1 - t^2) = 0;$$

la quale dà $tdu = udt$; $\quad \frac{t}{u} = a$.

Dalla (12), la quale si muta in $(1 - t^2)\, dz = ztdt$, abbiamo

$$z\sqrt{(1 - t^2)} = b.$$

Dimodochè avremo $\frac{x}{y} = a, \quad \sqrt{(z^2 - x^2)} = b$;

e quindi l'integrale completo $z^2 - x^2 = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$.

657. Scolio IV. Si osservi che le equazioni (1) danno

$$dp = rdx + sdy, \qquad dq = sdx + tdy. \tag{15}$$

658. Problema IV. *Integrare l'equazione* $\frac{d^2z}{dx^2} + P\frac{dz}{dx} + Q = 0$, *$P$ e Q essendo funzioni di x, y, z.*

Siccome le derivate parziali contenute in questa equazione si riferiscono alla sola x, perciò è manifesto che nella composi-

zione di essa la y non è andata soggetta ad alcuna variazione; conseguentemente la integrazione si farà supponendo solo la z e la x variabili; e perciò questa sarà l'integrazione d'una equazione del 2° ordine a differenze ordinarie. Le costanti da aggiungersi si cangeranno bensì in funzioni arbitrarie della y.

Esempio I. $\frac{d^2z}{dx^2}+P\frac{dz}{dx}+Q=0$, P e Q essendo funz. di x e y.

Avremo $dp+Ppdx+Qdx=0$; la quale, perchè y dee qui considerarsi come costante, darà (n. 585)

$$p=\frac{dz}{dx}=e^{-\int Pdx}[\varphi y-\int e^{\int Pdx}Qdx];$$

integrando di nuovo ed aggiungendo una seconda funzione arbitraria ψy, avremo l'integrale richiesto.

Esempio II. $\frac{d^2z}{dx^2}+Q=0,\quad z=-\int dx\int Qdx+x\varphi y+\psi y.$

659. Problema V. *Integrare l'equazione* $\frac{d^2z}{dy^2}+P\frac{dz}{dy}+Q=0$, *$P$, Q essendo funzioni di x, y, z.*

Ragionando come sopra troveremo

$$q=\frac{dz}{dy}=e^{-\int Pdy}[\varphi x-\int e^{\int Pdy}Qdy];$$

integrando di nuovo ed aggiungendo una seconda funz. arbitraria ψx, avremo l'integrale richiesto.

660. Problema VI. *Integrare l'eq.* $\frac{d^2z}{dxdy}+M\frac{dz}{dx}+N=0$; *$M$, N essendo funzioni di x ed y.*

Avremo $dp+Mpdy+Ndy=0$; e perciò

$$p=\frac{dz}{dx}=e^{-\int Mdy}[\varphi x-\int e^{\int Mdy}Ndy];$$

integrando di nuovo rapporto ad x, dovremo aggiungere una funzione arbitraria ψy.

Esempio. $\frac{d^2z}{dxdy}+N=0.\quad z=-\int dx\int Ndy+\varphi x+\psi y.$

661. Problema VII. *Integrare l'equazione* $\frac{d^2z}{dy^2}=a^2\frac{d^2z}{dx^2}$, dove a *è costante.*

La proposta può più brevemente scriversi così $t=a^2r$; laonde osservando che per le eq. (15) n. 657, abbiamo

$$dp = rdx + sdy\,, \quad \text{e} \quad dq = sdx + tdy = sdx + a^2 rdy;$$

sarà $$dq + adp = (ar + s)(dx + ady),$$

ovvero $$d(q + ap) = (ar + s)\, d(x + ay);$$

dunque dovrà $ar + s$ essere funzione di $x + ay$, senzadichè il 2° membro non potrebbe stimarsi differenziale esatta come lo è il 1°; perciò porremo

$$q + ap = F'(x + ay), \qquad q - ap = f'(x - ay),$$

perchè a può prendersi positiva e negativa. Ricavando di qui i valori di p e q, e ponendoli nella eq. $dz = pdx + qdy$, avremo

$$dz = \frac{1}{2a}(dx + ady)\, F'(x + ay) - \frac{1}{2a}(dx - ady)\, f'(x - ay);$$

$$z = \frac{1}{2a} F(x + ay) - \frac{1}{2a} f(x - ay) \text{ ovvero } z = F(x + ay) + f(x - ay).$$

662. Scolio I. Il metodo precedente si deve al D'Alembert; l'Eulero ad ottenere il medesimo integrale introduce in luogo delle variabili x e y due nuove variabili α e β tali che abbiasi $\alpha = x + by$, $\beta = x + cy$. Si ottiene allora

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx} + \frac{dz}{d\beta}\frac{d\beta}{dx} = \frac{dz}{d\alpha} + \frac{dz}{d\beta},$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy} + \frac{dz}{d\beta}\frac{d\beta}{dy} = b\frac{dz}{d\alpha} + c\frac{dz}{d\beta},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z}{d\alpha^2} + 2\frac{d^2z}{d\alpha d\beta} + \frac{d^2z}{d\beta^2}, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = b^2\frac{d^2z}{d\alpha^2} + 2bc\frac{d^2z}{d\alpha d\beta} + c^2\frac{d^2z}{d\beta^2};$$

sostituendo questi valori la proposta si cangerà nella seguente

$$(b^2 - a^2)\frac{d^2z}{d\alpha^2} + 2(bc - a^2)\frac{d^2z}{d\alpha d\beta} + (c^2 - a^2)\frac{d^2z}{d\beta^2} = 0.$$

Or facendo $b = a$, $c = -a$, avremo

$$\alpha = x + ay, \quad \beta = x - ay, \quad \frac{d^2z}{d\alpha d\beta} = 0, \quad z = f\alpha + f\beta, \quad \text{(n. 660)};$$

cioè $$z = F(x + ay) + f(x - ay).$$

663. Scolio II. Il Monge ad integrare le equazioni a differenze parziali del 2° ordine usa il metodo seguente, il quale è

analogo al metodo di cui si valse il Lagrange per l'integrazione di quelle del 1° ordine ed esposto di sopra (n. 650 e seg.).

664. Problema VIII. *Integ. l'eq.* $\frac{d^2z}{dx^2}+P\frac{d^2z}{dxdy}+Q\frac{d^2z}{dy^2}+R=0$ *P, Q, R essendo funzioni di x, y, z.*

L'equazione può scriversi più brevemente così

$$r+Ps+Qt+R=0;$$

ovvero sostituendo in essa i valori di r e t tratti dalle eq. (15) n.657,

$$dpdy+Qdq\,dx+Rdx\,dy-s(dy^2-Pdxdy+Qdx^2)=0.$$

Ciò posto poniamo mente alle due equazioni

$dpdy+Qdqdx+Rdxdy=0,$ (16) $dy^2-Pdxdy+Qdx^2=0;$ (17)

la (17), perchè si cangia in $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+P\frac{dy}{dx}+Q=0,$ (18)

darà $\frac{dy}{dx}=u, =v$; u e v essendo funzioni di x, y, z. Sicchè la (16), ponendo $dy=udx$, diverrà

$$udp+Qdq+Rudx=0;$$

ovvero, in forza delle eq. (15) n. 657,

$$(ur+Qs+Ru)\,dx+(us+Qt)\,dy=0, \tag{19}$$

questa eq. e la $dy-udx=0,$ (20)

altro non sono che due trasformate delle equazioni (16) e (17). Or supponiamo che possano trovarsi due funzioni m, n tali che

$$m[(ur+Qs+Ru)\,dx+(us+Qt)dy]+n\,[dy-udx]=0, \tag{21}$$

sia una differenziale esatta, e che questa differenziale provenga da una equazione $V=a$. Siccome l'equazione (21) può mettersi sotto la forma

$$[m(ur+Qs+Ru)-nu]\,dx+[m(us+Qt)+n]dy=0, \tag{22}$$

avremo

$$\frac{dV}{dx}=m\,(ur+Qs+Ru)-nu=0,\ \frac{dV}{dy}=m(us+Qt)+n=0,$$

di qui $r=\frac{n}{m}-\frac{Qs}{u}-R,\quad t=-\frac{n}{mQ}-\frac{su}{Q};$

e siccome per questi valori di r e t, la proposta si cangia in iden-

tità perciò è forza conchiudere che l'equazione $V=a$ dee considerarsi come un integrale della proposta medesima.

Se potremo trovare altri due valori m_1, n_1 come quelli supposti di sopra m, n, avremo un'altro integrale $U=b$; e quindi ancor $V+AU=B$; il quale pure, perchè soddisfà alla equazione $dV+AdU=0$, ovvero

$$(m+cm_1)[(ur+Qs+Ru)dx+(us+Qt)du]+(n+cn_1)[dy-udx]=0,$$

soddisfarà anco alla proposta; d'altra parte ciò potrebbe dimostrarsi con ragionamento analogo a quello che abbiamo usato di sopra per provare che $V=a$ è un'integrale della proposta medesima. Ed è da notare che l'eq. $V+AU=B$ dovrà considerarsi come un'integrale della proposta, ove anche A e B si reputino variabili, purchè si annullino i termini provenienti dalle variazioni di A e B; ora

$$dV+AdU+UdA=dB,\quad \text{dunque}\quad UdA=dB,\ \text{ed}\ U=\frac{dB}{dA};$$

il che mostra che B deve essere funzione di A; sia $B=fA$; l'integrale richiesto sarà dato dalle due equazioni

$$U=f'A,\qquad V+AU=fA;$$

ma dalla 1ª di esse si vede che A è funzione di U, e dalla 2ª che V ovvero $fA-AU$ è anch'essa per conseguenza funzione di U, dunque $V=\xi U$; questa equazione adunque soddisfarà alla proposta e siccome essa contiene una funzione arbitraria ne sarà necessariamente un integrale primo completo.

665. Problema IX. *Integ. l'eq.* $\frac{d^2z}{dx^2}+P\frac{d^2z}{dxdy}+Q\frac{d^2z}{dy^2}+R=0$; *$P$, Q, R essendo costanti.*

Le radici u, v della equazione (18) saranno costanti; laonde

dalle equazioni $\quad dy-udx=0,\quad dy-vdx=0,$

otterremo $\quad y-ux=a,\quad y-vx=a_1.$

Attenendoci alla prima, la (16) diverrà

$$udp+Qdq+Rudx=0,$$

che integrata dà $\quad up+Qq+Rux=b;$

quindi, perchè $y-ux=a$, avremo l'integrale completo

$$up+Qq+Rux=F(y-ux);\qquad (23)$$

quivi F sta in luogo di ξ. Or questa equazione può mutarsi in

$$u\frac{dz}{dx}+Q\frac{dz}{dy}=F'(y-ux)-Rux,$$

e integrarsi col metodo esposto sopra (n. 650); per cui avremo

$$udy-Qdx=0,\quad udz-F'(y-ux)\,dx+Ruxdx=0;$$

quindi $\qquad uy-Qx=c,\quad$ ovvero $\quad y-\frac{Q}{u}x=c,$

ed $\qquad uz-F(y-ux)+\frac{1}{2}Rux^2=f\left(y-\frac{Q}{u}x\right);$

osservando che $uv=Q$, risulterà in fine

$$z+\tfrac{1}{2}Rx^2=F(y-ux)+f\left(y-\frac{Q}{u}x\right)=F(y-ux)+f(y-vx). \quad (24)$$

Attenendoci poi all'altra eq. $y-vx=b$, avremo l'altro integrale primo $\qquad vp+Qq+Rvx=f'(y-vx);$ (25)

deducendo da questo l'integrale finito come abbiamo fatto sopra, troveremo un risultato identico al precedente (24). Potremmo pure ricavare dalle equazioni (23) (24) i valori

$$p=\frac{F'(y-ux)-f'(y-vx)}{u-v}-Rx,\quad q=\frac{uf'(y-vx)-vF'(y-ux)}{Q(u-v)},$$

sostituirli nella eq. $dz=pdx+qdy$, ed integrare il risultato; ciò darebbe

$$z=-\frac{2F(y-ux)}{u(u-v)}+\frac{f(y-vx)}{v(u-v)}-\tfrac{1}{2}Rx^2,$$

ovvero $\qquad z=-\frac{1}{2}Rx^2+F(y-ux)+f(y-vx),$

come abbiamo trovato precedentemente (24).

666. Problema X. *Integrare l'equazione*

$$\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\frac{d^2z}{dx^2}-2\frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy}\frac{d^2z}{dxdy}+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\frac{d^2z}{dy^2}=0.$$

Tale equazione può scriversi nel seguente modo

$$q^2r-2pqs+p^2t=0.$$

Avremo perciò $P=-\frac{2p}{q}$, $Q=\frac{p^2}{q^2}$, $R=0$; e quindi le due equazioni (16) e (17) diverranno

$$dpdy+\frac{p^2}{q^2}dqdx=0,\qquad dy^2+\frac{2p}{q}dxdy+\frac{p^2}{q^2}dx^2=0;$$

dalla 2ª abbiamo $(qdy + pdx)^2 = dz^2 = 0$, ovvero $z = a$. Sostituendo nella 1ª $-\frac{pdx}{q}$ in luogo di dy, essa si cangia in

$$qdp - pdq = 0;$$

la quale integrata dà $$p = qb;$$

per conseguenza $p = qFz$ sarà uno degl'integrali primi della proposta.

Or si moltiplichi l'equazione $qdp - pdq = 0$ per $\frac{x}{q^2}$, e l'equazione $qdy + pdx = 0$ per $\frac{1}{q}$, e si sommino i due risultati; avremo

$$\frac{x(qdp - pdq)}{q^2} + \frac{pdx}{q} + dy = 0;$$

e integrando $\frac{xp}{q} + y = fz$; questo sarà l'altro integrale primo.

Eliminando dai due integrali trovati $\frac{p}{q}$, avremo

$$xFz + y = fz,$$

che sarà l'integrale della proposta.

XVIII. L'integrazione delle equazioni per mezzo delle serie.

667. I. Equazioni a differenze ordinarie. Le formule (1) (2) n. 554 e 556, mentre servono a dimostrare l'esistenza dell'integrale di qualunque equazione differenziale tra due variabili, servono altresì a stabilire un metodo generale per ottenere l'integrale delle equazioni medesime sotto forma di serie. Vero è che pochi sono i casi ne'quali possono vincersi le difficoltà che s'incontrano nella determinazione delle derivate y', y'', y''', ec. e però talvolta ad aver queste serie si ha ricorso ai coefficienti indeterminati. Qui daremo esempi dell'uno e dell'altro metodo.

668. Problema I. *Integrare l'eq.* $xy'' + 2y' + nxy = 0$.

Differenziando si trova

$$xy''' + 3y'' + nxy' + ny = 0,$$
$$xy^{\text{iv}} + 4y''' + nxy'' + 2ny' = 0,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$xy^{(m+1)} + (m+1)\,y^{(m)} + nxy^{(m-1)} + (m-1)ny^{(m-2)} = 0;$$

facendo $x=0$, queste eq. daranno

$$A_1 = 0,\quad A_2 = -\tfrac{1}{3}nA,\quad A_3 = 0,\quad A_4 = \tfrac{1}{5}nA,\ \ldots.$$

cioè, m essendo dispari $\qquad A_m = 0;$

m essendo pari $\qquad A_m = \pm\dfrac{nA}{m+1},$

dove ha luogo il $+$ quando m è divisibile per 4, il $-$ quando non lo è.

Ciò fatto la formula (1) n. 554, darà

$$y = A\left(1 - \frac{nx^2}{1.2.3} + \frac{n^2x^4}{1.2.3.4.5} - \frac{n^3x^6}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots.\right)$$

ovvero $\qquad y = A\,\dfrac{\text{sen.}\,x\sqrt{n}}{x\sqrt{n}} = C\,\dfrac{\text{sen.}\,x\sqrt{n}}{x},$

C essendo al pari di A una costante arbitraria.

Siffatta funzione peraltro non racchiudendo che la sola costante arbitraria C è un integrale particolare. Or l'integrale completo si otterrà considerando C come funzione di x; perocchè sostituendo il valore di y nella proposta avremo

$$\frac{d^2C}{dx^2} + 2\sqrt{n}\,\frac{dC}{dx}\cot.\,x\sqrt{n} = 0;$$

facendo poi $\qquad \dfrac{dC}{dx} = C'$, si troverà $C' = \dfrac{C_1}{\text{sen.}^2\,x\sqrt{n}};$

donde si deduce $C = c_1 + c_2\cot x\sqrt{n}$, e quindi

$$y = \frac{c_1\,\text{sen.}\,x\sqrt{n} + c_2\cos.\,x\sqrt{n}}{x}, \tag{1}$$

c_1, c_2 essendo due costanti arbitrarie.

Facciamoci ora a integrare la medesima equazione per mezzo dei coefficienti indeterminati. Pongasi

$$y = a_1x^\alpha + a_2x^\beta + a_3x^\gamma + a_4x^\delta + \ldots.$$

e supponiamo che gli esponenti $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ sieno scritti secondo l'ordine di grandezze crescenti; avremo

$$ny = na_1x^{\alpha} + na_2x^{\beta} + na_3x^{\gamma} + \ldots$$

$$\frac{2}{x}y' = 2a_1\alpha x^{\alpha-2} + 2a_2\beta x^{\beta-2} + 2a_3\gamma x^{\gamma-2} + \ldots.$$

$$y'' = a_1\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + a_2\beta(\beta-1)x^{\beta-2} + a_3\gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2} + \ldots.$$

sostituendo queste espressioni e quella di y nella proposta osserveremo che il minore esponente è $\alpha - 2$, e che il coefficiente del termine moltiplicato per $x^{\alpha-2}$ porta a stabilire la condizione $\alpha(\alpha+1)=0$ cui si può soddisfare ponendo $\alpha = -1$, oppure $\alpha = 0$.

1° Sia $\alpha = -1$; il termine na_1x^{α} non potendo sparire da per sè, dovrà ridursi cogli altri; bisognerà adunque che α sia maggiore, oppure uguale a $\beta - 2$. Se poniamo $\alpha > \beta - 2$ dovremo inferirne $\beta(\beta+1) = 0$ senza di che i termini moltiplicati per $x^{\beta-2}$ non potrebbero distruggersi; ciò dà $\beta = 0$, oppure $\beta = -1$; ma il valore $\beta = -1$ è da escludersi perchè per ipotesi $\beta > \alpha$. Inoltre avremo $\gamma - 2 = \alpha$, $\delta - 2 = \beta$, ec.

I coefficienti daranno poi

$$a_3\gamma(\gamma+1) + na_1 = 0, \quad a_4\delta(\delta+1) + na_2 = 0, \quad \text{ec.}$$

Dunque $\quad \alpha = -1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 2, \quad$ ec.

$$a_3 = \frac{a_1n}{1.2}, a_5 = \frac{a_1n^2}{1.2.3.4}, \ldots. \; a_7 = -\frac{a^3n}{1.2.3}, a_6 = \frac{a_2n^2}{1.2.3.4.5}, \ldots.$$

$$y = a_1\left(\frac{1}{x} - \frac{nx}{1.2} + \frac{n^2x^3}{1.2.3.4} - \frac{n^3x^5}{1.2.3.4.5.6} + \ldots.\right)$$

$$+ a_2\left(1 - \frac{nx^2}{1.2.3} + \frac{n^2x^4}{1.2.3.4.5} - \ldots.\right)$$

ovvero
$$y = \frac{a_1\cos. x\sqrt{n} + \frac{a_2}{\sqrt{n}}\,\text{sen.}\, x\sqrt{n}}{x},$$

dove le quantità a_1 e a_2 rimanendo indeterminate fanno l'ufficio di due costanti arbitrarie. Questo valore di y cangiando opportunamente le costanti riesce identico a quello che abbiamo trovato qui sopra.

Se si facesse $\beta - 2 = \alpha$ ne risulterebbe

$$y = \frac{a_1\cos. x\sqrt{n}}{x}, \tag{2}$$

cioè un integrale particolare.

2° Sia $\alpha = 0$; in questo caso non potrà aversi $\beta - 2 < \alpha$, perchè il coefficiente di $x^{\beta - 2}$ dovrebbe esser nullo, il che darebbe $\beta(\beta + 1) = 0$; assurdo evidente, perchè dovendo essere $\beta > \alpha$ non può β essere $= 0$ nè $= -1$. Avremo dunque $\beta - 2 = \alpha$, e quindi $\gamma - 2 = \beta$, ec. Conseguentemente

$$\alpha = 0, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 4, \quad \text{ec.} \quad a_2 = -\frac{a_1 n}{1.2.3}, \; a_3 = \frac{a_1 n^2}{1.2.3.4.5}, \text{ ec.}$$

e quindi
$$y = \frac{\frac{a_1}{\sqrt{n}} \text{sen. } x\sqrt{n}}{x}; \qquad (3)$$

integrale particolare. Aggiungendo questo integrale all'altro (2) trovato sopra, otterremo l'integrale completo (1).

669. Problema II. *Integrare l'equazione* $y'' + xy = 0$.

Pongasi $y = a_0 x^\alpha + a_1 x^{\alpha+1} + a_2 x^{\alpha+2} + a_3 x^{\alpha+3} + \ldots.$

sostituendo questa espressione nella proposta, avremo

$$0 = a_0 \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} + a_1(\alpha + 1)\alpha x^{\alpha-1} + a_2(\alpha + 2)(\alpha + 1)x^\alpha$$

$$+ [a_3(\alpha + 3)(\alpha + 2) + a_0]x^{\alpha+1} + [a_4(\alpha + 4)(\alpha + 3) + a_1]x^{\alpha+2} + \ldots$$

ora è manifesto che i primi due termini di questa eq. si renderanno nulli supponendo $\alpha = 0$, e lasciando indeterminate le costanti a_0, a_1. Il terzo termine si annullerà supponendo $a_2 = 0$. Rispetto a'termini susseguenti è manifesto che essi diverranno nulli determinando convenientemente i coefficienti a_3, a_4, a_5, ec. valendosi dei tre primi. I valori di questi coefficienti saranno dati dalle equazioni seguenti

$$-a_3 = \frac{a_0}{2.3}, \; a_4 = -\frac{a_1}{3.4}, \; -a_5 = \frac{a_2}{4.5}, \; -a_6 = \frac{a_3}{5.6}, \; -a_7 = \frac{a_4}{6.7}, \; -a_8 = \frac{a_5}{7.8}, \text{ ec.}$$

dalle quali ricavasi

$$a_3 = -\frac{a_0}{2.3}, \quad a_4 = -\frac{a_1}{3.4}, \quad a_5 = 0, \quad a_6 = \frac{a_0}{2.3.5.6},$$

$$a_7 = \frac{a_1}{3.4.6.7}, \; a_8 = 0, \; a_9 = -\frac{a_0}{2.3.5.6.8.9}, \; a_{10} = \frac{a_1}{3.4.6.7.9.10}, \text{ ec.}$$

e per conseguenza risulta

$$y = a_0\left(1 - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^6}{2.3.5.6} - \frac{x^9}{2.3.5.6.8.9} + \ldots\right)$$
$$+ a_1\left(x - \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^7}{3.4.6.7} - \frac{x^{10}}{3.4.6.7.9.10} + \ldots\right.$$

nella quale espressione a_0 ed a_1 sono le due costanti arbitrarie.

670. Scolio. L'integrazione della equazione generale lineare del 2° ordine $y'' + Py' + Qy = X$, nella quale P, Q, X sono funzioni di x, dipende come sappiamo (n. 627) dalla integrazione della equazione lineare $y'' + Py' + Qy = 0$. Sia $y = z$ un'integrale particolare di questa equazione; e fatto $y = uz$ facciamoci a determinare u per modo che $y = uz$ diventi un'integrale della equazione $y'' + Py' + Qy = X$.

A tale uopo si osservi che

$$y' = uz' + zu', \quad y'' = uz'' + 2u'z' + u''z;$$

ragione per cui l'eq. suddetta si cangia in

$$u(z'' + Pz' + Qz) + 2u'z' + Pzu' + zu'' = X;$$

ma $z'' + Pz' + Qz = 0$, dunque

$$2u'z' + Pzu' + zu'' = X.$$

Or ad integrare questa eq. si faccia $du = tdx$ cioè $u' = t, u'' = \frac{dt}{dx}$;

avremo $$dt + \left(P + \frac{2dz}{zdx}\right) tdx = \frac{X}{z} dx;$$

la quale essendo una equazione lineare del 1° ordine tra le variabili t ed x, perchè z è funzione della x, si integrerà agevolmente e darà in virtù della formula (2) n. 576,

$$t = \frac{e^{-\int Pdx}}{z^2}\left[c_1 + \int e^{\int Pdx} Xzdx\right].$$

Ed essendo $u = c + \int tdx, y = uz = cz + z\int tdx$, avremo

$$y = cz + z\int \frac{e^{-\int Pdx}dx}{z^2}\left[c_1 + \int e^{\int Pdx} Xzdx\right]; \qquad (4)$$

questo sarà l'integrale completo della equazione $y'' + Py' + Qy = X$, nel quale non è ignoto che z. Or mostreremo come z, cioè un integrale particolare della equazione $y'' + Py' + Qy = 0$, possa in molti casi aversi espresso in serie.

A tale uopo prendiamo a provare che l'eq. $y''+Py'+Qy=0$ può sempre mettersi sotto la forma $y''+Ny=0$, N essendo funzione di x. Facciasi

$$y=Mz,\quad y'=Mz'+M'z,\quad y''=Mz''+2M'z'+zM'';$$

l'equazione $y''+Py'+Qy=0$, prenderà la forma

$$Mz''+(2M'+PM)z'+(M''+PM'+QM)z=0;$$

ora M, sin qui indeterminata, potrà determinarsi per modo da avere $2M'+PM=0$; allora sarà $M=e^{-\frac{1}{2}\int Pdx}$; inoltre avremo

$$z''+(Q-\tfrac{1}{4}P^2-\tfrac{1}{2}P')z=0\,,$$

cioè una equazione della forma $y''+Ny=0$. Questa equazione adunque è d'uopo prendere in ispeciale considerazione perchè da essa dipende l'integrazione dell'equazione lineare generale del 2° ordine $y''+Py'+Qy=X$. Già abbiamo assegnato l'integrale di essa nel caso di $N=x$; or supporremo $N=ax^m$.

671. Problema III. *Integrare l'eq.* $y''+ax^my=0$.

Poniamo $y=Ax^l+Bx^{l+p}+Cx^{l+2p}+Dx^{l+3p}+\ldots.;$ (5)

avremo
$$y''=l(l-1)Ax^{l-2}+(l+p)(l+p-1)Bx^{l+p-2}$$
$$+(l+2p)(l+2p-1)Cx^{l+2p-2}+(l+3p)(l+3p-1)Dx^{l+3p-2}+\ldots.;$$
$$ax^my=aAx^{l+m}+aBx^{l+p+m}+aCx^{l+2p+m}+aDx^{l+3p+m}+\ldots.;$$

uguagliando la somma di questi due risultati a zero si vedrà non esser possibile di far corrispondere il termine $l(l-1)Ax^{l-2}$ al termine Ax^{l+m}, considerando come uguali le due potenze x^{l-2}, x^{l+m}, perchè allora avremmo $l-2=l+m$ ovvero $m=-2$; sicchè tranne il caso di $m=-2$, i termini suddetti $l(l-1)Ax^{l-2}$, Ax^{l+m} non potrebbero riunirsi in uno solo. Laonde per provvedere anco ai casi in cui m abbia tutt'altro valore faremo sparire il primo termine $l(l-1)Ax^{l-2}$ uguagliando a zero il suo coefficiente; or ciò, lasciando indeterminata la A, può ottenersi in due modi, e facendo $l=0$, e facendo $l=1$. Allora per determinare p potremo uguagliare l'esponente del 2° termine di y'' coll'esponente del 1° termine di ax^my il che equivale ad uguagliare il 3° col 2°, il 4° al 3°, ec.; di questa guisa si ottiene

$$l+p-2=l+m,\quad l+2p-2=l+m+p,\quad l+3p-2=l+m+2p,\ \text{ec.}$$

ciascuna delle quali equazioni dà $p=m+2$; cosicchè avremo

$$[(l+m+2)(l+m+1)B+aA]x^{l+m}$$
$$+[(l+2m+4)(l+2m+3)C+aB]x^{l+2m+2}$$
$$+[(l+3m+6)(l+3m+5)D+aC]x^{l+3m+4}+\ldots.=0.$$

1° per $l=0$, sarà

$$[(m+2)(m+1)B+aA]x^{m}+[(2m+4)(2m+3)C+aB]x^{2m+2}$$
$$+[(3m+6)(3m+5)D+aC]x^{3m+4}+\ldots=0.$$

2° per $l=1$, sarà

$$[(m+3)(m+2)B+aA]x^{m+1}+[(2m+5)(2m+4)C+aB]x^{2m+3}$$
$$+[(3m+7)(3m+6)D+aC]x^{3m+5}+\ldots=0.$$

Nel 1° caso avremo adunque

$$(m+2)(m+1)B+aA=0,$$
$$(2m+4)(2m+3)C+aB=0,$$
$$(3m+6)(3m+5)D+aC=0,$$
$$\ldots\ldots$$

$$B=-\frac{aA}{(m+2)(m+1)},$$
$$C=-\frac{aB}{(2m+4)(2m+3)}=\frac{a^2A}{(m+1)(m+2)(2m+3)(2m+4)},$$
$$D=-\frac{aC}{(3m+6)(3m+5)}=$$
$$-\frac{a^3A}{(m+1)(m+2)(2m+3)(2m+4)(3m+5)(3m+6)},$$
$$\ldots\ldots$$

quindi sostituendo questi valori nella serie (2) e facendo nello stesso tempo $l=0, p=m+2$, otterremo

$$y=A-\frac{aAx^{m+2}}{(m+1)(m+2)}+\frac{a^2Ax^{2m+4}}{(m+1)(m+2)(2m+3)(2m+4)}$$
$$-\frac{a^3Ax^{3m+6}}{(m+1)(m+2)(2m+3)(2m+4)(3m+5)(3m+6)}+\ldots \quad (6)$$

Nel 2° caso poi, avremo

$$(m+3)(m+2)\,B+aA=0,$$
$$(2m+5)(2m+4)\,C+aB=0,$$
$$(3m+7)(3m+6)\,D+aC=0,$$
$$\cdots\cdot$$

$$B=-\frac{aA}{(m+3)(m+2)},$$

$$C=-\frac{aB}{(2m+5)(2m+4)}=\frac{a^2A}{(m+2)(m+3)(2m+4)(2m+5)},$$

$$D=-\frac{aC}{(3m+7)(3m+6)}=$$

$$-\frac{a^3A}{(m+2)(m+3)(2m+4)(2m+5)(3m+6)(3m+7)},$$

$$\cdots\cdots$$

quindi sostituendo questi valori nella serie (2) e facendo nello stesso tempo $l=1$, $p=m+2$, otterremo

$$y=A_1x-\frac{aA_1x^{m+3}}{(m+2)(m+3)}+\frac{a^2A_1x^{2m+5}}{(m+2)(m+3)(2m+4)(2m+5)}$$
$$-\frac{a^3A_1y^{3m+7}}{(m+2)(m+3)(2m+4)(2m+5)(3m+6)(3m+7)}+\ldots \quad (7)$$

Le espressioni (6) e (7) non sono che integrali particolari della proposta perchè contengono una sola costante arbitraria; ma scrivendo nella seconda A_1 invece di A come abbiamo fatto e sommando (n. 620), avremo l'integrale completo della proposta. Sieno pertanto $A, B, C,\ldots$ i coefficienti della (2), $A_1, B_1, C_1,\ldots$ quelli della (3), l'integrale completo sarà

$$y=A+A_1x+Bx^{m+2}+B_1x^{m+3}+Cx^{2m+4}+C_1x^{2m+5}+Dx^{3m+6}+\ldots \quad (8)$$

I divisori della serie (6) sono tutti compresi nelle formule $im+2i$, $im+2i-1$; i divisori della serie (7) sono tutti compresi nelle formule $im+2i$, $im+2i+1$: essendo i un numero intero qualunque. Diguisachè quando si avesse $im+2i=0$ ovvero $m=-2$, i termini di ambedue le serie riulterebbero uguali all'infinito, e quindi le serie medesime riuscirebbero inutili e illusorie. Quando si avesse $im+2i-1$ ovvero $m+2=\frac{1}{i}$, riuscirebbe illusoria

la (6), e si avrebbe un integrale particolare nella (7). Quando si avesse in fine $im + 2i + 1 = 0$ ovvero $m + 2 = -\frac{1}{i}$, riuscirebbe illusoria la (7), e si avrebbe un integrale particolare nella (6).

Or se la serie (8) non serve in questi diversi casi all'oggetto nostro è d'uopo vedere come vi si possa soddisfare per altra via.

1° Supponiamo in primo luogo che ambedue le serie divengano illusorie, cioè che abbiasi $m = -2$. Allora l'eq. $y'' + ax^m y = 0$ diverrà $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{ay}{x^2} = 0$. Facendo $y = x^n$ si ha $n(n-1)x^{n-2} + ax^{n-2} = 0$ ovvero $n^2 - n + a = 0$, ed $n = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4} - a)}$; e perchè la forma dell'integrale completo sappiamo essere la somma dei due integrali particolari; dunque avendosi $y = x^{\frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4} - a)}}$, $y = x^{\frac{1}{2} - \sqrt{(\frac{1}{4} - a)}}$, l'integrale completo sarà (n. 623)

$$y = cx^{\frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4} - a)}} + c_1 x^{\frac{1}{2} - \sqrt{(\frac{1}{4} - a)}}.$$

2° Supponiamo che una sola delle due serie (6) (7) divenga illusoria, che abbiasi cioè $m + 2 = \pm \frac{1}{i}$. Sia T la serie rimanente; sarà T un integrale particolare della eq. $y'' + ax^m y = 0$. Or conoscendosi un integrale particolare, potrà agevolmente aversene l'integrale completo per mezzo della (4) n. 670, facendo in essa $P = 0$, $Q = ax^m$, $z = T$, $X = 0$; il risultato sarà

$$y = cT + c_1 T \int \frac{dx}{T^2}.$$

Vero è che quando T avesse forma di serie malagevolmente si dedurrebbe da questa formula il valore di y; cioè bisognerebbe sviluppare in serie l'integrale in essa contenuto. Perciò l'Eulero trasforma l'eq. proposta ponendo $y = p + q\mathrm{l}x$; dalla qual condizione si ha

$$dy = dp + dq.\mathrm{l}x + \frac{qdx}{x},$$

e
$$d^2y = d^2p + d^2q.\mathrm{l}x + \frac{dqdx}{x} + \frac{dqdx}{x} - \frac{qdx^2}{x^2};$$

per cui la proposta diventa

$$\frac{d^2p}{dx^2} + \frac{2dq}{xdx} - \frac{q}{x^2} + ax^m p + \left(\frac{d^2q}{dx^2} + ax^m q\right)\mathrm{l}x = 0;$$

uguagliando a zero il binomio che moltiplica $\mathrm{l}x$, avremo

$$\frac{d^2q}{dx^2}+ax^mq=0,\ (9)\qquad \frac{d^2p}{dx^2}+ax^mp+\frac{2dq}{xdx}-\frac{q}{x^2}=0;\ (10)$$

or la (9) si verificherà subitochè q sarà un integrale della proposta; dunque quando q rappresenti quella delle due serie suddette che rimane, sostituendo questo valore nella (10) trarremo da essa il valore di p espresso in serie.

Esempio. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{ay}{x}=0$. Qui $m=-1$. Ora $m=-1$ è dato dalla formula $m+2=\frac{1}{i}$ quando si pone $i=1$; dunque in tal caso la serie utile sarà la (7); per cui facendo $y=p+qlx$, sarà

$$q=A_1\left(x-\frac{a}{2}x^2+\frac{a^2}{2^2.3}x^3-\frac{a^3}{2^2.3^2.4}x^4+\ldots\right);$$

p sarà dato dalla (10) la quale diventa nel caso attuale

$$\frac{d^2p}{dx^2}+\frac{a}{x}p+\frac{2dq}{xdx}-\frac{q}{x^2}=0. \qquad (11)$$

Facciasi $p=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+\ldots$

avremo $\frac{dp}{dx}=B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+5Fx^4+\ldots$

$$\frac{d^2p}{dx^2}=2C+6Dx+12Ex^2+20Fx^3+\ldots.$$

$$\frac{a}{x}p=\frac{Aa}{x}+aB+aCx+aDx^2+aEx^3+\ldots.$$

$$\frac{2dq}{xdx}=A_1\left(\frac{2}{x}-2a+\frac{a^2}{2}x-\frac{a^3}{2.3^2}x^2+\frac{a^4}{2.3^2.4^2}x^3+\ldots\right.$$

$$-\frac{q}{x^2}=A_1\left(-\frac{1}{x}+\frac{a}{2}-\frac{a^2}{2^2.3}x+\frac{a^3}{2^2.3^2.4}x^2-\frac{a^4}{2^2.3^2.4^2.5}x^3+\ldots\right)$$

sostituendo queste quattro ultime serie nella (11), e uguagliando ciascun coefficiente a zero sarà,

coeff. dell'x^{-1} $\qquad Aa+2A_1-A_1=0,$

coeff. dell'x^0 $\qquad 2C+aB+2aA_1+\frac{aA_1}{2}=0,$

coeff. dell'x^1 $\qquad 6D+aC+\frac{a^2A_1}{2}-\frac{a^2A_1}{2^2.3}=0,$

coeff. dell'x^2 $\quad 12E+aD-\dfrac{a^3A_I}{2.3^2}+\dfrac{a^3A_I}{2^2.3^2.4}=0,$

coeff. dell'x^3 $\quad 20F+aE+\dfrac{a^4A_I}{2.3^2.4^2}-\dfrac{a^4A_I}{2^2.3^2.4^2.5}=0,$

. . . . .

quindi avremo $A=-\dfrac{A_I}{2},\quad C=\dfrac{3aA_I}{2^2}-\dfrac{aB}{2},$

$$D=-\frac{5a^2A_I}{2^2.3^2}-\frac{aC}{2.3},\quad E=\frac{7a^3A_I}{2^2.3^2.4^2}-\frac{aD}{3.4},$$

$$F=-\frac{9a^4A_I}{2^2.3^2.4^2.5^2}-\frac{AE}{4.5},$$

. . . . .

ne'quali valori la quantità B resta indeterminata. Prendendo adunque per A, C, D, ec. i valori che dalle equazioni suddette risultano avremo

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots+A_I lx\left(x-\frac{a}{2}x^2+\frac{a^2}{2^2.3}x^3-\ldots\right)$$

il quale integrale è completo, perchè contiene due costanti arbitrarie A_I e B.

672. Scolio. All'eq. $y''+ax^my=0$ si può dare altra forma molto più vantaggiosa per lo sviluppo in serie; infatti si faccia

$$y=ze^{\int pdx};\ \text{sarà}\ \frac{d^2y}{dx^2}=e^{\int pdx}\left(\frac{d^2z}{dx^2}+2p\frac{dz}{dx}+z\frac{dp}{dx}+zp^2\right),$$

e la proposta diverrà $\dfrac{d^2z}{dx^2}+2p\dfrac{dz}{dx}+z\dfrac{dp}{dx}+zp^2+ax^mz=0;$ (12)

e siccome possiamo disporre della funzione p a piacer nostro, porremo $\quad p^2+ax^m=0,$ cioè $p=x^{\frac{m}{2}}\sqrt{-a},$

donde risulta $\quad y=ze^{\sqrt{-a}\int x^{\frac{m}{2}}dx}=ze^{\frac{2x^{\frac{m+2}{2}}\sqrt{-a}}{m+2}};$

dimodochè, facendo per brevità $\dfrac{m}{2}=n$, e $\sqrt{-a}=b$, sarà

$$p=bx^n,\quad y=ze^{\frac{bx^{n+1}}{n+1}}.$$

La funzione z sarà poi data dalla equazione

$$\frac{d^2z}{dx^2}+2p\frac{dz}{dx}+z\frac{dp}{dx}=0;$$

la quale ponendo $p=bx^n$, $\frac{dp}{dx}=nbx^{n-1}$, diventa

$$\frac{d^2z}{dx^2}+2bx^n\frac{dz}{dx}+nbx^{n-1}z=0. \tag{13}$$

Ciò fatto pongasi

$$z=Ax^l+Bx^{l+p}+Cx^{l+2p}+Dx^{l+3p}+\ldots.$$

$$\frac{dz}{dx}=lAx^{l-1}+(l+p)Bx^{l+p-1}+(l+2p)Cx^{l+2p-1}+\ldots.$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=l(l-1)Ax^{l-2}+(l+p-1)(l+p)Bx^{l+p-2}$$
$$+(l+2p-1)(l+2p)Cx^{l+2p-2}+\ldots;$$

fatte queste sostituzioni nella equazione (13) vedremo che i due termini $2blAx^{l+n-1}$, $nbAx^{l+n-1}$ non possono sommarsi col termine $l(l-1)Ax^{l-2}$ perchè allora dovremmo fare $l+n-1=l-2$ ovvero $n=-1$, ed assegnare in tal guisa un valore ad n. Quei due termini adunque si porranno insieme senza unirvene altri, e perciò uguagliando a zero il coefficiente della loro somma avremo

$$2l+n=0 \quad \text{ed} \quad l=-\frac{n}{2};$$

e per determinar p, verrà poi l'equazione

$$l-2=l+p+n-1, \quad \text{che dà } p=-n-1.$$

Allora la serie esprimente il valore di z sarà

$$z=Ax^{-\frac{n}{2}}+Bx^{-\frac{3n}{2}-1}+Cx^{-\frac{5n}{2}-2}+Dx^{-\frac{7n}{2}-3}+\ldots.$$

e per determinare i coeff. avremo le equazioni

$$(l-1)lA+2b(l+p)B+nbB=0,$$
$$(l+p-1)(l+p)B+2b(l+1p)C+nbC=0,$$
$$(l+2p-1)(l+2p)C+2b(l+3p)D+nbD=0,$$
$$\ldots\ldots$$

dalle quali si ha

$$bB = \frac{-l(l-1)A}{2(l+p)+n} = \frac{n(n+2)A}{4.2(n+1)},$$

$$bC = \frac{-(l+p-1)(l+p)B}{2(l+2p)+n} = \frac{(3n+2)(3n+4)B}{4.4(n+1)},$$

$$bD = \frac{-(l+2p-1)(l+3p)C}{2(l+3p)+n} = \frac{(5n+4)(5n+6)C}{4.6(n+1)},$$

. . . . .

e per conseguenza

$$B = \frac{n(n+2)A}{4.2(n+1)b},$$

$$C = \frac{n(n+2)(3n+2)(3n+4)A}{4^2.2.4(n+1)^2b^2},$$

$$D = \frac{n(n+2)(3n+2)(3n+4)(5n+4)(5n+6)A}{4^3.2.4.6(n+1)^3b^3},$$

$$E = \frac{n(n+2)(3n+2)(3n+4)(5n+4)(5n+6)(7n+6)(7n+8)A}{4^4.2.4.6.8(n+1)^4b^4},$$

. . . . .

dunque avremo

$$z = Ax^{-\frac{n}{2}} + \frac{n(n+2)A}{4.2(n+2)b}x^{-\frac{3n}{2}-1} + \frac{n(n+2)(3n+2)(3n+4)A}{4^2.2.4(n+1)^2b^2}x^{-\frac{5n}{2}-2}$$

$$+ \frac{n(n+2)(3n+2\ (3n+4)(5n+4)(5n+6)A}{4^3.2.4.6(n+1)^3b^3}x^{-\frac{7n}{2}-3}$$

$$+ \frac{n(n+2)(3n+2))(3n+4)(5n+4)(5n+6)(7n+6)(7n+8)A}{4^4.2.4.6.8\,(n+2)^4b^4}x^{-\frac{9n}{2}-4} + \dots$$

. . . . .

questa serie non contiene altra indeterminata che la A; perciò esprime un integrale particolare della proposta. L'integrale completo potrà aversi nel seguente modo.

I termini 2°, 4°, 6°, ... della serie suddetta contenenti potenze dispari di b si moltiplichino nel numeratore e nel denominatore per b; tutti i denominatori conterranno allora b con esponente pari. S'indichi con AM la somma di tutti i termini in posto dispari della serie, con ANb la somma di tutti i termini in posto pari; la serie stessa potrà allora rappresentarsi così $A(M+Nb)$. Ma

siccome b ovvero $\sqrt{-a}$ può avere tanto il segno $+$ che il segno $-$, perciò sostituendo $-b$ a b (il che non indurrà nessun cambiamento in M e in N) avremo $A(M-Nb)$ che sarà un altro valore di z; e in esso potremo mutare l'indeterminata A (la quale è capace di prender qualunque valore) in A_1. Dimanierachè avremo

$$z=A(M+Nb), \qquad z=A_1(M-Nb)$$

ed $$y=Ae^{\frac{bx^{n+1}}{n+1}}(M+Nb),\ y=A_1e^{-\frac{bx^{n+1}}{n+1}}(M-Nb);$$

per conseguenza l'integrale completo della proposta sarà

$$y=Ae^{\frac{bx^{n+1}}{n+1}}(M+Nb)+A_1e^{-\frac{bx^{n+1}}{n+1}}(M-Nb);\ \text{ovvero}$$

$$y=M\left(Ae^{\frac{bx^{n+1}}{n+1}}+A_1e^{-\frac{bx^{n+1}}{n+1}}\right)+Nb\left(Ae^{\frac{bx^{n+1}}{n+1}}-A_1e^{-\frac{bx^{n+1}}{n+1}}\right). \quad (14)$$

Questo integrale avrà una forma reale se a nella proposta sarà negativa, nel qual caso avremo $b=\sqrt{a}$, ed

$$y=M\left(Ae^{\frac{x^{n+1}}{n+1}\sqrt{a}}+A_1e^{-\frac{x^{n+1}}{n+1}\sqrt{a}}\right)+N\sqrt{a}\left(Ae^{\frac{x^{n+1}}{n+1}\sqrt{a}}-A_1e^{-\frac{x^{n+1}}{n+1}\sqrt{a}}\right);$$

se a sarà positiva avremo $b=\sqrt{-a}=\sqrt{a}\sqrt{-1}$ e l'integrale suddetto riuscirà immaginario; ponendo

$$\frac{b}{n+1}=\frac{\sqrt{a}}{n+1}\sqrt{-1}=\beta\sqrt{-1};$$

sarà $$y=M(Ae^{\beta\sqrt{-1}.x^{n+1}}+A_1e^{-\beta\sqrt{-1}.x^{n+1}})$$
$$+N\sqrt{a}\sqrt{-1}(Ae^{\beta\sqrt{-1}.x^{n+1}}-A_1e^{-\beta\sqrt{-1}.x^{n+1}}) \quad (15)$$

Or dalla formula $e^{\pm x\sqrt{-1}}=\cos x\pm\sqrt{-1}\,\text{sen}\,x$, si ha

$$Ae^{\beta\sqrt{-1}.x^{n+1}}=A\cos\beta x^{n+1}+\sqrt{-1}.A\,\text{sen}\,\beta x^{n+1},$$

$$A_1e^{-\beta\sqrt{-1}.x^{n+1}}=A_1\cos\beta x^{n+1}-\sqrt{-1}.A_1\,\text{sen}\,\beta x^{n+1};$$

dunque sostituendo, avremo

$$y=[(A+A_1)M+(A-A_1)N\sqrt{-1}\,\sqrt{a}]\cos\beta x^{n+1}$$
$$+[(A-A_1)M\sqrt{-1}-(A+A_1)N\sqrt{a}]\,\text{sen}\,\beta x^{n+1},$$

e facendo $A+A_1=C$, $(A+A_1)\sqrt{-1}=C_1$, risulterà in fine l'espressione seguente

$$y=(CM+C_1N\sqrt{a})\cos\frac{x^{n+1}\sqrt{a}}{n+1}+(C_1M-CN\sqrt{a})\,\text{sen}\,\frac{x^{n+1}\sqrt{a}}{n+1}, \quad (16)$$

ove C e C_1 sono due costanti arbitrarie.

Bisogna per altro osservare certi casi nei quali il valore di z si riduce ad un numero finito di termini. Ciascun fattore dei numeratori dei termini di z (tranne n) è un binomio di cui il secondo termine è sempre pari ed uguale al coefficiente del primo accresciuto o diminuito dell'unità; dunque tutti quei fattori si troveranno compresi nella formula $(2i\pm1)n+2i$.

Ciò posto se si avesse $(2i\pm1)n+2i=0$, ossia $n=-\dfrac{2i}{2i\pm1}$, la serie suddetta in quel termine ove questa condizione si verificasse avrebbe fine; perocchè il termine medesimo, e tutti i termini susseguenti risulterebbero nulli; perciò ogni qual volta avremo $m=-\dfrac{4i}{2i\pm1}$ sarà possibile avere un integrale particolare della proposta, dal quale potremo poi dedurre l'integrale completo, l'uno e l'altro espressi in formule finite.

La condizione $m=-\dfrac{4i}{2i\pm1}$ è quella stessa che esprimeva il criterio d'integrabilità della eq. del Riccati (n. 578); e difatti ponendo $y=e^{\int pdx}$, $\dfrac{dy}{dx}=e^{\int pdx}p$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=e^{\int pdx}\dfrac{dp}{dx}+e^{\int pdx}p^2$, la proposta diverrà $\dfrac{dp}{dx}+p^2+ax^m=0$ ovvero $dp+p^2dx=-ax^mdx$ che appunto è la forma della equazione contemplata al n. 578.

Reciprocamente da questa potremo risalire alla prima ponendo in luogo di p il suo valore $\dfrac{dy}{ydx}$. Adunque fra la proposta e l'eq. del Riccati esiste tal legame, che l'integrazione dell'una conduce a quella dell'altra. In qualunque caso, ove l'una s'integri, l'altra potrà pure integrarsi.

Esempio. $\frac{d^2y}{dx^2}+ayx^{-\frac{8}{3}}=0$. L'esponente $-\frac{8}{3}$ è compreso nella formula $m=-\frac{4i}{2i-1}$, perchè si ricava da essa facendo $i=2$; dunque la serie che esprime z deve necessariamente arrestarsi; e perchè $n=\frac{1}{2}m=-\frac{4}{3}$, ovvero $3n+4=0$, la serie suddetta conterrà solo il primo e il secondo termine, cioè avremo

$$z=Ax^{-\frac{n}{2}}+\frac{n(n+2)A}{4.2(n+1)b}x^{-\frac{3n}{2}-1} \text{ ovvero } x=Ax^{\frac{2}{3}}+\frac{Ab}{3b^2}x;$$

e quindi $\qquad AM=Ax^{\frac{2}{3}}, \qquad ANb=\frac{Abx}{3b^2};$

cioè $\qquad M=x^{\frac{2}{3}}, \quad N=\frac{x}{3b^2}=-\frac{x}{3a}, \quad n+1=-\frac{1}{3};$

dunque se a sarà nella proposta positiva l'integrale dato dalla formula (16) verrà così espresso

$$y=\left(cx^{\frac{2}{3}}-\frac{c_1x}{3\sqrt{a}}\right)\cos\left(3x^{-\frac{1}{3}}\sqrt{a}\right)-\left(c_1x^{\frac{2}{3}}+\frac{cx}{3\sqrt{a}}\right)\operatorname{sen}\left(3x^{-\frac{1}{3}}\sqrt{a}\right);$$

se poi a sarà negativa ci varremo dell' altra formula posta sopra, e propria di questo caso, per cui l'integrale sarà

$$y=x^{\frac{2}{3}}\left(Ae^{-3x^{-\frac{1}{3}}\sqrt{a}}+A_1e^{3x^{-\frac{1}{3}}\sqrt{a}}\right)+\frac{x}{3\sqrt{b}}\left(Ae^{-2x^{-\frac{1}{3}}\sqrt{a}}-A_1e^{3x^{-\frac{1}{3}}\sqrt{a}}\right).$$

Pongasi $p=\frac{dy}{ydx}$; p rappresenterà come abbiamo avvertito di sopra, l'integrale della eq. $dp+p^2dx+ax^{-\frac{8}{3}}dx=0$.

673. II. Equazioni a differenze parziali. La formula (4) n. 647, giova a stabilire un metodo generale per ottenere l'integrale delle equazioni a differenze parziali sotto forma di serie. Gravi in vero sono le difficoltà che talvolta si presentano nel calcolo, e questa si è la ragione per cui in molti casi si preferisce ricorrere al metodo dei coefficienti indeterminati. Noi daremo esempi di ambedue i modi.

674. Problema I. *Integrare l'equazione* $\frac{dz}{dx}=a\frac{dz}{dy}$.

Differenziando rapporto ad x, la proposta ci dà

$$\frac{d^2z}{dx^2} = a\frac{d^2z}{dxdy} = a\frac{d\frac{dz}{dx}}{dy} = a^2\frac{d^2z}{dy^2},$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = a^2\frac{d^3z}{dxdy^2} = a^2\frac{d\frac{d^2z}{dxdy}}{dy} = a^3\frac{d^3z}{dy^3},$$

$$\cdots\cdots$$

così lo sviluppo $z = Y + Y_1\frac{x}{1} + Y_2\frac{x^2}{1.2} + \ldots.$ [n. 647 (4)] (dove Y, Y_1, Y_2,... esprimono i valori che acquistano la funzione z e le sue successive derivate prese rapporto ad x per $x = 0$), darà

$$z = Y + \frac{dY}{dy}\frac{ax}{1} + \frac{d^2Y}{dy^2}\frac{a^2x^2}{1.2} + \ldots.$$

il quale non è altro che lo sviluppo della funzione arbitraria $\varphi(y + ax)$; e ciò può verificarsi per mezzo della serie del Taylor considerando $\varphi(y + ax)$ come lo stato variato d'una funzione $\varphi y = Y$ corrispondente all'accrescimento ax attribuito ad y. Conseguentemente $z = \varphi(y + ax)$ sarà l'integrale della proposta.

675. Problema II. *Integrare l'equazione* $\frac{d^2z}{dx^2} = a^2\frac{d^2z}{dy^2}$.

Differenziando rapporto ad x, la proposta ci dà

$$\frac{d^3z}{dx^3} = a^2\frac{d^3z}{dxdy^2} = a^2\frac{d^2\frac{dz}{dx}}{dy^2},$$

$$\frac{d^4z}{dx^4} = a^2\frac{d^4z}{dx^2dy^2} = a^2\frac{d^2\frac{d^2z}{dx^2}}{dy^2} = a^4\frac{d^4z}{dy^4},$$

$$\frac{d^5z}{dx^5} = a^2\frac{d^5z}{dx^3dy^2} = a^2\frac{d^2\frac{d^3z}{dx^3}}{dy^2} = a^4\frac{d^4\frac{dz}{dx}}{dy^4},$$

$$\cdots\cdots$$

e siccome la proposta lascia arbitrarie le funzioni Y ed Y_1, ponendo $Y = \varphi y$, $Y_1 = \psi y$, avremo

$$Y_2 = a^2\varphi''y,\quad Y_3 = a^2\psi''y,\quad Y_4 = a^4\varphi^{\text{IV}}y,\quad Y_5 = a^4\psi^{\text{IV}}y,\ \ldots$$

cioè $Y_n = a^n\varphi^{(n)}y$, $Y_{n+1} = a^n\psi^{(n)}y$, n essendo pari; e quindi

$$z = \varphi y + \psi y\frac{x}{1} + a^2\varphi''y\frac{x^2}{1.2} + a^2\psi''y\frac{x^3}{1.2.3} + a^4\varphi^{\text{IV}}y\frac{x^4}{1.2.3.4} + a^4\psi^{\text{IV}}y\frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots.$$

ma $\varphi(y+ax)=\varphi y+\varphi' y\,\frac{ax}{1}+\varphi'' y\,\frac{a^2x^2}{1.2}+\varphi''' y\,\frac{a^3x^3}{1.2.3}+\ldots$

$$\psi(y-ax)=\psi y-\psi' y\,\frac{ax}{1}+\psi'' y\,\frac{a^2x^2}{1.2}-\psi''' y\,\frac{a^3x^3}{1.2.3}+\ldots$$

dunque sommando e cambiando $\varphi y+\psi y$ in φy ed $a\varphi' y-a\psi' y$ in ψy otterremo l'eq. $z=\varphi(y+ax)+\psi(a-ax)$; questo è l'integrale della proposta identico a quello che trovammo al n. 661.

676. Problema III. *Integrare l'eq.* $\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2}+\frac{d^2z}{du^2}=0$.

Volendo usare ad integrare queste eq. il metodo dei coefficienti indeterminati, porremo z uguale ad una serie ordinata secondo le potenze di una delle tre variabili x, y, u; per esempio u; i coefficienti incogniti dovranno allora essere funzioni di x e y; ricaveremo da essa i valori delle derivate parziali di z e li sostituiremo nella proposta; quindi uguaglieremo separatamente a zero le quantità che moltiplicano le diverse potenze della variabile rispetto a cui è stata ordinata la serie. Sia

$$z=A+A_1u+A_2u^2+A_3u^3+\ldots.$$

$A, A_1, A_2, A_3, \ldots$ essendo tutte funzioni di x e y da determinarsi. Sostituendo nella proposta i valori di $\frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dy^2}, \frac{d^2z}{du^2}$, avremo

$$\frac{d^2A_1}{dx^2}+\frac{d^2A_1}{dy^2}+2A_3+\left(\frac{d^2A_2}{dx^2}+\frac{d^2A_2}{dy^2}+2.3\,A_4\right)u$$
$$+\left(\frac{d^2A_3}{dx^2}+\frac{d^2A_3}{dy^2}+3.4A_5\right)u^2+\ldots.=0$$

uguagliando a zero i coefficienti di u^0, u^1, u^2, ec. avremo

$$A_3=-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2A_1}{dx^2}+\frac{d^2A_1}{dy^2}\right),$$

$$A_4=-\frac{1}{2.3}\left(\frac{d^2A_2}{dx^2}+\frac{d^2A_2}{dy^2}\right),$$

$$A_5=-\frac{1}{3.4}\left(\frac{d^2A_3}{dx^2}+\frac{d^2A_3}{dy^2}\right)=\frac{1}{1.2.3.4}\left(\frac{d^4A_1}{dx^4}+2\,\frac{d^4A_1}{dx^2dy^2}+\frac{d^4A_1}{dy^4}\right),$$

$$\ldots\ldots$$

e quindi

$$z=A_1+A_2u-\left(\frac{d^2A_1}{dx^2}+\frac{d^2A_1}{dy^2}\right)\frac{u^2}{1.2}-\left(\frac{d^2A_2}{dx^2}+\frac{d^2A_2}{dy^2}\right)\frac{u^3}{1.2.3}+\ldots.$$

nella qual serie si contengono due funzioni arbitrarie A_1, A_2.

677. PROBLEMA IV. *Integrare l'equazione* $\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{dz}{dy}$.

Pongasi $z=Y+Y_1x+Y_2x^2+Y_3x^3+\ldots.$

$Y, Y_1, Y_2, \ldots$ essendo tutte funzioni di y; avremo

$$z=Y+Y_1\frac{x}{1}+\frac{dY}{dy}\frac{x^2}{1.2}+\frac{dY_1}{dy}\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{d^2Y}{dy^2}\frac{x^4}{1.2.3.4}+\frac{d^2Y_1}{dy^2}\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\ldots$$

dove Y, Y_1, saranno due funzioni arbitrarie della y.

Se ad avere l'integrale ordinato secondo le potenze di y si ponesse $z=X+X_1y+X_2y^2+X_3y^3+\ldots\ldots$

$X, X_1, X_2, X_3, \ldots$ essendo tutte funzioni di x, otterremmo

$$z=X+\frac{d^2X}{dx^2}\frac{y}{1}+\frac{d^4X}{dx^4}\frac{y^2}{1.2}+\frac{d^6X}{dx^6}\frac{y^3}{1.2.3}+\ldots..$$

dove X rappresenta una funzione arbitraria della x.

678. SCOLIO. È da notare che questo integrale contiene una sola funzione arbitraria mentre il precedente ne contiene due. Ciò ha luogo allorquando la proposta non comprende tutte le derivate dell'ordine più elevato rapporto ad ogni variabile, perocchè nella serie ordinata secondo le potenze della variabile rispetto a cui sono state fatte meno differenziazioni minore si è il numero dei termini che rimangono indeterminati e perciò arbitrarj. Del resto sarebbe facile il mostrare che il primo sviluppo può trasformarsi nel secondo.

XIX. *Le funzioni arbitrarie.*

679. DETERMINAZIONE DELLE FUNZIONI ARBITRARIE. Le funzioni arbitrarie che entrano negli integrali delle equazioni a differenze parziali possono determinarsi quando la funzione z prende una forma particolare e si assegna inoltre il legame fra le variabili da cui essa dipende. I seguenti esempi basteranno a mostrare come si debba procedere nel calcolo; le applicazioni poi mostreranno l'oggetto che questa operazione ha in mira.

ESEMPIO I. Essendo data l'eq. $\frac{y-b}{z-c}=\varphi\left(\frac{x-a}{z-c}\right)$ rappre-

sentante l'integrale dell'equazione $z-c=p(x-a)+q(y-b)$, determinare la funzione φ per modo che sia $z=0$ ed $x^2+y^2=r^2$.

Facciasi $\frac{x-a}{z-c}=t$; dalle tre equazioni

$$\frac{x-a}{z-c}=t,\quad z=0,\quad x^2+y^2=r^2,$$

ricaveremo i valori di x, y, z in funzione di t, e li sostituiremo nella equazione $\frac{y-b}{z-c}=\varphi t$; di questa guisa verremo a determinare la φ coerentemente alle condizioni imposte. Pertanto sarà

$$z=0,\quad x=a-ct,\quad y=\sqrt{[r^2-(a+ct)^2]},$$

$$\varphi t=\frac{b-\sqrt{[r^2-(a-ct)^2]}}{c};\ \varphi\left(\frac{x-a}{z-c}\right)=\frac{b(z-c)-\sqrt{[r^2(z-c)^2-(az-cx)^2]}}{c(z-c)}$$

e l'integrale dato diverrà $(cy-bz)^2+(az-cx)^2=r^2(z-c)^2$.

Esempio II. Essendo data l'eq. $1=M\varphi V$, dove M e V rappresentano due funz. date in x, y, z, determinare la funz. φ per modo che ponendo $F(x, y, z)=0$ abbiasi $f(x, y, z)=0$; designando F ed f due funzioni note.

Facciasi $V=t$; avremo le tre equazioni

$$V=t,\quad F(x,y,z)=0,\quad f(x,y,z)=0;$$

delle quali ci varremo per determinare i valori di x, y, z in funzione di t; sostituendo questi valori nella equazione $1=M\varphi t$, M si cangerà in una funzione θ di t ed avremo $\varphi t=\frac{1}{\theta}$; la funzione φ sarà per conseguenza determinata.

680. Eliminazione delle funzioni arbitrarie. I. Quando una equazione a tre variabili x, y, z racchiude m funzioni arbitrarie di x solo, ad eliminare queste funzioni basterà differenziare l'equazione m volte rapporto ad y considerando x come costante perocchè in tal guisa si avranno $m+1$ equazioni contenenti le m funzioni da eliminarsi. L'equazione finale sarà una equazione a differenze parziali dell'm^{mo} ordine.

681. II. Quando però le funzioni arbitrarie conterranno x, y, z non basterà differenziare rapporto ad una variabile sola; ed acciocchè l'eliminazione delle funzioni possa farsi sarà d'uopo che esse sieno funzioni arbitrarie di funzioni determinate di x, y, z. Abbiasi l'equazione $F(x, y, z, ft)=0$,

essendo $t = \varphi(x, y, z)$ cioè una funzione determinata di x, y, z. Differenziando l'equazione rapporto ad x e y, posto $ft = u$, avremo

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{dF}{du}\frac{du}{dt}\left(\frac{dt}{dx} + \frac{dt}{dz}\frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

$$\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy} + \frac{dF}{du}\frac{du}{dt}\left(\frac{dt}{dy} + \frac{dt}{dz}\frac{dz}{dy}\right) = 0.$$

Eliminando da queste equazioni congiunte alla proposta u e $\frac{du}{dt}$ il risultato conterrà le derivate $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$, sarà cioè una equazione a differenze parziali del 1° ordine nella quale non si vedrà alcun vestigio della funzione u: vuolsi però che t sia una funzione determinata e nota di x, y, e z acciocchè a $\frac{dt}{dx}$ e $\frac{dt}{dy}$ si possano sostituire i loro valori.

Esempio. Sia $z = F(ax + by)$; posto $ax + by = t$, avremo

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dF}{dt}\frac{dt}{dx}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{dF}{dt}\frac{dt}{dy}; \quad \text{ossia} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dF}{dt}a, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{dF}{dt}b;$$

quindi [n. 646 (2)] $$bp - aq = 0; \tag{1}$$

questa eq. sussiste per tutti i valori possibili di z che risulterebbero dalle diverse forme che si potrebbero attribuire alla funz. f.

682. Scolio. È da notare che l'eq. (1) racchiude la proprietà caratteristica sufficiente per riconoscere se una espressione proposta sia funzione veramente di $ax + by$; il che vuol dire che per mezzo della equazione (1) potremo vedere se una espressione data possa trasformarsi in un'altra contenente la sola variabile t quando si pone $ax + by = t$.

Esempio. Abbiasi il polinomio $z = a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2$; sarà $p = \frac{dz}{dx} = 2a^2x + 2aby$, $\quad q = \frac{dz}{dy} = 2abx + 2b^2y$;

ponendo questi valori nella equazione (1) essa si cangia in identità; dunque il polinomio z è una funzione di $ax + by$. Infatti

$$a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 = (ax + by)^2.$$

683. III. Se nella equazione data si troveranno due funzioni arbitrarie $fv, \psi w$, essendo v, w, due funzioni date di x, y, z, per le due prime differenziazioni avremo due equazioni contenenti le

derivate $\frac{df}{dv}$, $\frac{d\psi}{dw}$, diguisachè ad eliminare le funzioni f, ψ e le derivate $\frac{df}{dv}$, $\frac{d\psi}{dw}$ non potrebber bastare le tre eq. che si avrebbero.

Perciò dovremo determinare le equazioni a differenze parziali del 2° ordine; le quali conterranno le derivate $\frac{d^2f}{dv^2}$, $\frac{d^2\psi}{dw^2}$; e così avremo sei equazioni e sei quantità da eliminarsi; ciò mostra non essere questa eliminazione possibile.

Differenziando le equazioni del 2° ordine otterremo quattro eq. del 3°, le quali conterranno le derivate parziali $\frac{d^3f}{dv^3}$, $\frac{d^3\psi}{dw^3}$. Tre di queste eq. unite alle sei precedenti basteranno ad eliminare $f, \psi, \frac{df}{dv}, \frac{d\psi}{dw}, \frac{d^2f}{dv^2}, \frac{d^2\psi}{dw^2}, \frac{d^3f}{dv^3}, \frac{d^3\psi}{dw^3}$; l'equazione finale sarà una equazione a differenze parziali del 3° ordine, nella quale non si vedrà alcun vestigio delle funzioni f e ψ.

Esempio. Sia $z = xf\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$; posto $\frac{y}{x} = v$, $\frac{dfv}{dv} = f'v$, $\frac{d\psi v}{dv} = \psi' v$,

sarà $\quad p = fv - \frac{y}{x} f'v - \frac{y}{x^2}\psi' v, \quad q = f'v + \frac{1}{x}\psi' v;$

da queste si ha $\quad px + qy = xf\,v; \quad$ (2)

differenziando [n. 646 (3)], avremo

$$p + xr + ys = fv - f'v, \qquad xs + q + yt = fv;$$

e di qui $\quad px + qy + x^2r + 2xys + y^2t = xfv,$

ovvero, stante la (2), $\quad x^2r + 2xys + y^2t = 0; \quad$ (3)

questa equazione sussiste per tutti i valori possibili di z che risulterebbero dalle diverse forme che si potrebbero attribuire alle funzioni f e ψ.

684. IV. In generale se una equazione a tre variabili racchiuderà n funzioni arbitrarie di funzioni determinate di x, y, z, differenziandola successivamente rapporto ad x e y sino all'ordine m inclusive, otterremo $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ equazioni, ed $(m+1)n$ funzioni da eliminarsi. Ora acciocchè l'eliminazione possa farsi sarà d'uopo avere in generale $\frac{1}{2}(m+2) > n$ ovvero $m > 2(n-1)$; dunque l'ordine dell'equazione a differenze parziali cui giungeremo con questa operazione sarà $2n-1$.

LIBRO QUARTO

GLI USI ANALITICI E GEOMETRICI

DEL CALCOLO INTEGRALE

I. *Gli integrali definiti.*

685. Principio I. Abbiasi una funzione Fx continua per tutti i valori della x compresi fra due limiti; supponiamo che x_0 sia un valore maggiore del limite minore, ed x_0+h un valore minore del limite maggiore: immaginando h divisa in parti uguali o disuguali rappresentate da $h_0, h_1, h_2, \ldots h_n$, potremo supporre che la x varii dal valore x_0 al valore x_0+h passando rigorosamente per tutti i valori intermedj; allora i valori successivi della x saranno espressi da $x_0, x_0+h_0, x_0+h_0+h_1, \ldots x_0+h_0+h_1 \ldots + h_n$; ovvero da $x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots x_{n+1}$ quando si faccia $x_0+h_0=x_1$, $x_1+h_1=h_2, \ldots x_n+h_n=x_{n+1}$; l'ultimo valore della x cioè x_n+h_n sarà pure indicato da x_0+h perchè $h=h_0+h_1+h_2 \ldots + h_n$. Potremo supporre altresì che per questi valori della x la funzione Fx vada sempre crescendo o sempre decrescendo, che è quanto dire mantenersi $F'x$ sempre reale, e del medesimo segno; se ciò non avvenisse sarebbe sempre dato fare di h più parti finite ciascuna capace di soddisfare a questa condizione.

Or si pongano le seguenti identità

$$Fx_1 - Fx_0 = F(x_0 + h_0) - Fx_0,$$
$$Fx_2 - Fx_1 = F(x_1 + h_1) - Fx_1,$$
$$Fx_3 - Fx_2 = F(x_2 + h_2) - Fx_2,$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$Fx_n - Fx_{n-1} = F(x_{n-1} + h_{n-1}) - Fx_{n-1};$$

sommando avremo

$$Fx_n - Fx_0 = F(x_0 + h_0) - Fx_0 + F(x_1 + h_1) - Fx_1 \ldots + F(x_{n-1} + h_{n-1}) - Fx_{n-1};$$

laonde indicando con λ_0, λ_1, λ_1, ... λ_{n-1}, $n-1$ quantità capaci di convergere indefinitamente verso lo zero in pari tempo di h_0, h_1, h_2, ... h_{n-1} sarà (n. 55)

$$F(x_0 + h_0) - Fx_0 = h_0 F'x_0 + \lambda_0,$$
$$F(x_1 + h_1) - Fx_1 = h_1 F'x_1 + \lambda_1,$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$F(x_{n-1} + h_{n-1}) - Fx_{n-1} = h_{n-1} F'x_{n-1} + \lambda_{n-1};$$

dove nessuno dei valori $F'x_0, F'x_1, \ldots F'x_{n-1}$ sarà infinito nè immaginario; quindi avremo

$$Fx_n - Fx_0 = h_0 F'x_0 + h_1 F'x_1 \ldots + h_{n-1} F'x_{n-1} + \lambda_0 + \lambda_1 \ldots + \lambda_{n-1};$$

la quale equazione potrà pure trasformarsi nella seguente

$$Fx_n - Fx_0 = h_0 F'x_0 + h_1 F'x_1 \ldots + h_n F'x_n + \lambda_0 + \lambda_1 \ldots + \lambda_{n-1} - h_n F'x_n$$

e scriversi anche in questa guisa

$$Fx_n - Fx_0 = h_0 F'x_0 + h_1 F'x_1 \ldots + h_n F'x_n + I, \qquad (1)$$

ove I rappresenti una quantità capace di convergere verso lo zero a misura che convergeranno verso lo zero $h_0, h_1, h_2, \ldots h_n$. Questa equazione sussisterà qualunque sia il valore iniziale x_0 purchè si trovi fra i due limiti della x dentro i quali la funzione Fx si mantiene continua; dimanierachè $-Fx_0$ sarà una costante C che potremo riputare arbitraria: per cui avremo

$$Fx_n + C = h_0 F'x_0 + h_1 F'x_1 \ldots\ldots + h_n F'x_n + I.$$

Ciò posto si osservi che le parti h_0, $h_1, h_2, \ldots h_n$ in cui abbiamo divisa la n si può supporre che sieno divise anch'esse e suddivise all'infinito, per conseguenza le parti stesse h_0, h_1, h_2, ec. esprimenti gli accrescimenti successivi della variabile si potranno

riputare piccole quanto vogliamo. Oltredichè supponendo che la funzione si mantenga continua anche al di là del limite $x_n + h_n$ nulla vieta che dopo il valore x_n riceva successivamente altri valori x_{n+1}, x_{n+2}, ec.; ragione per cui indicando con x un valore qualunque della variabile avremo

$$Fx + C = \int F'xdx = h_0 F'x_0 + h_1 F'x_1 + h_2 F'x_2 \ldots + I; \qquad (2)$$

si conclude adunque che *la funzione* ∫F'xdx *è la somma dei valori che riceve il suo differenziale* F'xdx *quando la variabile partendo da un valore iniziale* x_0 *passa ai valori successivi per gradi uguali o disuguali che rappresentano di mano in mano il valor dell'accrescimento* dx, *più una funzione* I *capace di convergere verso lo zero a misura che convergono verso lo zero gli accrescimenti medesimi.*

686. Scolio I. Da ciò si vede come un integrale sia veramente la *somma* d'una serie indefinita di quantità differenziali; queste quantità differenziali sono i valori particolari che riceve la funzione $F'xdx$ allorquando si attribuiscono all'accrescimento dx i valori h_0, h_1, h_2, ec., e ad x i valori corrispondenti agli accrescimenti medesimi, i valori cioè che vengono rappresentati da

$$x_0, x_0 + h_0, x_0 + h_0 + h_1, x_0 + h_0 + h_1 + h_2, \text{ ec.}$$

687. Scolio II. Dalle cose esposte si vede che C nella espressione $Fx + C$ è il valore dell'integrale $\int F'xdx$ corrispondente al valore iniziale x_0; ove per altro siffatto valore dell'integrale prendasi con segno contrario.

688. Principio II. Siccome l'equazione (1) sussiste sempre ove anche le parti di h cioè $h_0, h_1, h_2 \ldots h_n$ crescendo di numero vadano indefinitamente impiccolendo, avremo al limite

$$F(x_0 + h) - Fx_0 = \mathfrak{L}[h_0 F'x_0 + h_1 F'x_1 \ldots + h_n F'x_n]; \quad (3)$$

ma il limite de' valori $x_0, x_1, x_2, \ldots$ della variabile x non è altro che il valore estremo di questa variabile cioè $x_0 + h$, dunque *l'accrescimento finito* $F(x_0 + h) - Fx_0$ *d'una funzione* Fx *corrispondente ad un accrescimento* h *della variabile può sempre considerarsi come il limite della somma dei valori che riceve il suo differenziale* F'xdx *quando la variabile* x *partendosi dal valore* x_0 *giunge al valore* $x_0 + h$ *passando rigorosamente per tutti i valori intermedj.*

689. Principio III. Osservando che stante il Teor. del n. 23,

$$\begin{aligned} h_0 F'x_0 + h_1 F'x_1 \ldots + h_n F'x_n &= hM[F'x_0, F'x_1, \ldots F'x_n] \\ &= hM[F'x_0, F'(x_0 + h - h_n)] \end{aligned}$$

avremo manifestamente

$$\Sigma\,[h_0 F'x_0 + h_1 F'x_1 \ldots + h_n F'x_n] = hM\,[F'x_0, F'(x_0+h)];$$

ora una media fra le quantità $F'x_0$ ed $F'(x_0+\theta h)$ può rappresentarsi con $F'(x_0+\theta h)$ ove si supponga $\theta < 1$, in conseguenza

$$\Sigma[h_0 F'x_0 + h_1 F'x_1 \ldots + h_n F'x_n] = h\,F'(x_0+\theta h); \qquad (4)$$

dunque *il limite della somma* $h_0F'x_0 + h_1F'x_1 + \ldots + h_nF'x_n$ *preso nella supposizione che* $h_0, h_1, h_2, \ldots h_n$ *convergano verso lo zero è eguale ad* h *moltiplicata per una media fra i valori che acquista la derivata* $F'x$ *ne' limiti* x_0 *ed* x_0+h *della variabile.*

690. Scolio I. Le due eq. (3) e (4) portano a stabilire l'eq.

$$F(x_0+h) - Fx_0 = hF'(x_0+\theta h); \qquad (5)$$

la quale coincide col Teorema III, n. 58.

691. Scolio II. L'accrescimento finito $F(x_0+h) - Fx_0$ della funzione Fx, la quale rappresenta l'integrale di $F'xdx$, si esprime in questa guisa

$$\int_{x_0}^{x_0+h} F'xdx,$$

e si dice *integrale indefinito esteso da* $x = x_0$ *ad* $x = x_0 + h$, perchè esso è il limite della somma dei valori particolari della funzione differenziale $F'xdx$ estesa da $x = x_0$ ad $x = x_0 + h$. I due valori x_0, x_0+h della variabile si dicono i limiti dell'integrale, perchè da essi si vede qual sia il termine iniziale di quella somma e l'ultimo; il primo di siffatti limiti è detto *limite inferiore* dell'integrale, il secondo *limite superiore.*

In forza di ciò l'equazione (3) si cangia nella seguente

$$F(x_0+h) - Fx_0 = \Sigma[h_0F'x_0 + h_1F'x_1 \ldots + h_nF'x_n] = \int_{x_0}^{x_0+h} F'xdx. \quad (6)$$

Quando a fosse il limite inferiore, b il limite superiore, il valore dell' integrale definito esteso da a a b sarebbe $Fb - Fa$; sicchè porremmo

$$Fb - Fa = \int_a^b F'xdx. \qquad (7)$$

692. Scolio III. Una funzione Fx cioè l'*espressione analitica di* y capace di soddisfare indipendentemente da qualunque valore particolare della x all' eq. $dy = fxdx$, suol chiamarsi *integrale indefinito* della funzione differenziale $fxdx$. L' espressione

più generale di questo integrale indefinito sarà $Fx+c$; la quale abbiamo già chiamata *integrale completo.*

Riassumendo diremo 1° che integrare una funzione differenziale data $fxdx$ significa determinare l'integrale indefinito di essa, cioè una funzione $y=Fx$ capace di soddisfare alla equazione $dy=fxdx$: 2° integrare nella ipotesi che a sia il *valore iniziale della x*, cioè l'*origine dell'integrale*, significa determinare l'integrale definito $\int_a^x fxdx = Fx - Fa$ per modo che il limite inferiore sia a e lasciando indeterminato il superiore: 3° finalmente *integrare fra due limiti dati a, b* vuol dire determinare l'integrale definito

$$\int_a^b fxdx = Fb - Fa, \tag{8}$$

cioè il valore numerico della somma de' valori di $fxdx$ presi dal valore a di x sino al valore b.

Laonde è manifesto che ogniqualvolta conosceremo un valor di y cioè una funzione Fx di x (sia pure un integrale particolare) capace di soddisfare all'equazione $dy=fxdx$ potremo immediatamente inferirne l'equazione seguente

$$\int_a^b fxdx = Fb - Fa. \tag{9}$$

Il che vuol dire che quando sarà dato sotto forma finita o in serie convergente l'integrale indefinito Fx completo o particolare d'una funzione differenziale $fxdx$, ad avere l'integrale definito di essa fra i limiti a e b, dovrà successivamente farsi $x=a$, $x=b$ nell'integrale medesimo, e sottrarre il secondo risultato dal primo. Vuolsi però che le funzioni fx ed Fx sieno rigorosamente continue ne' limiti a e b.

Esempio. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{ar tang}\, x$; le due funzioni $\frac{1}{1+x^2}$, ed ar tang x sono continue senza restrizione (n. 18); dunque

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi; \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{2}\pi; \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{4}\pi.$$

693. Scolio IV. Questa operazione non sempre è possibile stante le difficoltà che presenta la determinazione della espressione analitica dell'integrale d'una funzione differenziale; ma esistono metodi pei quali può in molti casi determinarsi il valore approssimativo dell'integrale definito d'una funzione indipendentemente dall'integrale indefinito della funzione medesima.

694. Corollario I. Quando l'integrale definito $\int_a^b fxdx$ fosse stato determinato senza attribuire a b un valore numerico, sicchè b avesse conservata in tutto l'andamento del calcolo la forma di quantità letterale, l'integrale indefinito medesimo sarebbe una funzione di b; suppongasi

$$\int_a^b fxdx = \varphi b\,;$$

è manifesto che in questo caso si potrà dall'integrale definito dedurre immediatamente l'indefinito completo cangiando b in x ed aggiungendo una costante arbitraria. Conseguentemente si potrà pure ottenere l'espressione del differenziale e della derivata di φx. Sicchè avremo

$$\int fxdx = \varphi x + c,$$

e di qui le seguenti

$$d\varphi x = fxdx, \qquad \varphi' x = fx.$$

695. Corollario II. È facile il comprendere che i limiti dell'integrale possono invertirsi rendendo superiore l'inferiore e viceversa, purchè si cambi il segno dell'integrale medesimo. Supponendo $\int fxdx = Fx + c$, avremo

$$\int_a^b fxdx = Fb - Fa, \qquad \int_b^a fxdx = Fa - Fb,$$

e quindi
$$\int_a^b fxdx = -\int_b^a fxdx.$$

696. Corollario III. Potrà sempre cangiarsi la variabile x della funz. posta sotto il segno d'un integrale definito, in altra variabile z avente colla prima una relazione $\xi(x, z) = 0$, purchè i limiti a e b della x si cangino respettivamente ne' valori di z dati dalle due equazioni $\xi(a, z) = 0$, $\xi(b, z) = 0$. Per esempio abbiasi $x = a + h - z$; sarà

$$\int_a^{a+h} fxdx = -\int_h^0 f(a + h - z)dz = \int_0^h f(a + h - z)dz\,;$$

perchè se nella equaz. $x = a + h - z$, porremo successivamente a ed $a + h$ in luogo di x, avremo $a = a + h - z$, $a + h = a + h - z$, e quindi $z = h$, $z = 0$.

697. TEOREMA. *Sia*

1° fx *una funzione continua da* $x = x_0$ *ad* $x = x_0 + h$;

2° $f(x_0 + h) = \Sigma[f(x_0 + h_0) + f(x_1 + h_1) + \ldots + f(x_n + h_n)]$;

3° $\underset{h=0}{\mathrm{L}} \dfrac{f(x+h)}{h} = \varphi x$; *sarà* $f(x_0 + h) = \int_{x_0}^{x_0+h} \varphi x dx$.

Sia α una funz. di h capace di andare a zero per $h = 0$;

sarà $\dfrac{f(x+h)}{h} = \varphi x + \alpha, \quad f(x+h) = h\varphi x + h\alpha$;

e quindi, stante la continuità della funzione fx,

$$f(x_0 + h_0) = h_0\varphi x_0 + h_0\alpha_0,\ f(x_1 + h_1) = h_1\varphi x_1 + h_1\alpha_1, \ldots f(x_n + h_n) = h_n\varphi_n + h_n\alpha_n;$$

e sommando

$$f(x_0 + h_0) + f(x_1 + h_1) \ldots + f(x_n + h_n) = h_0\varphi x_0 + h_1\varphi x_1 \ldots + h_n\varphi x_n + I,$$

I essendo una funzione convergente verso lo zero in pari tempo di $h_0, h_1, h_2 \ldots h_n$. Passando ai limiti sarà

$$\Sigma[f(x_0 + h_0) + f(x_1 + h_1) \ldots + f(x_n + h_n)] = \Sigma[h_0\varphi x_0 + h_1\varphi x_1 \ldots + h_n\varphi x_n];$$

sicchè in virtù del dato secondo e della eq. (6) otterremo

$$f(x_0 + h) = \int_{x_0}^{x_0+h} \varphi x dx.$$

II. Il termine complementario delle serie.

698. PROBLEMA I. *Determinare il termine complementario della serie del Taylor.*

In virtù di ciò che abbiamo stabilito di sopra, sarà

$$f(x+h) - fx = \int_x^{x+h} f'x dx = \int_0^h f'(a + h - z) dz,$$

essendo la relazione fra x e z data dall'equazione $x = a + h - z$.

Ora integrando per parti si trova

$$\int f'(a+h-z)\, dz = zf'(a+h-z) + \int f''(a+h-z) z dz,$$

$$\int f''(a+h-z)\, zdz = \frac{z^2}{2} f''(a+h-z) + \int f'''(a+h-z) \frac{z^2 dz}{2},$$

$$\int f'''(a+h-z) \frac{z^2 dz}{2} = \frac{z^3}{2.3} f'''(a+h-z) + \int f^{\text{IV}}(a+h-z) \frac{z^3 dz}{2.3}$$

. . . . .

e per conseguenza

$$\int f'(a+h-z)dz = zf'(a+h-z) + \frac{z^2}{2}f''(a+h-z) + \frac{z^3}{2.3}f'''(a+h-z) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{z^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a+h-z) + \int f^{(n)}(a+h-z)\frac{z^{n-1}dz}{2.3\ldots(n-1)}.$$

Talmentechè prendendo l'integrale fra i limiti $z=0, z=h$, sarà

$$\int f'(a+h-z)dz = hf'a + \frac{h^2}{1.2}f''a + \frac{h^3}{1.2.3}f'''a + \frac{h^4}{1.2.3.4}f^{\text{IV}}a + \ldots$$

$$\ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}a + \int_0^h \frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}(a+h-z)dz;$$

sostituendo questo risultato nella equazione (4) e cambiando a in x, avremo

$$f(x+h) = fx + hf'x + \frac{h^2}{1.2}f''x + \frac{h^3}{1.2.3}f'''x + \ldots$$

$$\ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}x + \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\int_0^h f^{(n)}(x+h-z)z^{n-1}dz;$$

questa serie quando l'ultimo termine contenente l'integrale definito decresce al crescer di n converge verso $f(x+h)$ e si cangia in una serie indefinita di cui $f(x+h)$ è la somma; allora essa è la serie del Taylor, ed

$$\frac{h^n}{1.2\ldots(n-1)}\int_0^h f^{(n)}(x+h-z)z^{n-1}dz,$$

ne è il *termine complementario* posto sotto la forma d'un integrale definito.

699. Corollario. Del resto è cosa agevole mostrare come questa espressione del termine complementario coincida con quella che stabilimmo al n. 227. Imperocchè l'integrale definito

$$\int_0^h f^{(n)}(x+h-z)z^{n-1}dz,$$

il quale si estende fra i limiti $z=0, z=h$, rappresenta il prodotto del limite della somma de' valori che acquista la funzione $z^{n-1}dz$ quando z (seguendo la legge di continuità) passa da 0 ad h, moltiplicato per una media presa fra i valori che acquista la funzione $f^{(n)}(x+h-z)$ ne' medesimi limiti di z; ora il limite della somma de' valori di $z^{n-1}dz$ estesa da $z=0$ a $z=h$, non è altro che l'in-

tegrale definito $\int_0^h z^{n-1}dz = \frac{h^n}{n}$, ed una media presa fra i valori che riceve la funzione $f^{(n)}(x+h-z)$ è rappresentata da $f^{(n)}(x+h-\theta h)$ posto $\theta < 1$, ovvero da $f^{(n)}(x+(1-\theta)h)$ che è quanto dire da $f^{(n)}(x+\theta h)$ perchè se $\theta < 1$ anco $1-\theta < 1$; dunque

$$\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\int_0^h f^{(n)}(x+h-z)z^{n-1}dz = \frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h).$$

Sostituendo ad $f^{(n)}(x+\theta h)$ il minore e il maggiore dei valori che acquista $f^{(n)}x$ nell'intervallo di x ad $x+h$ avremo dalla espressione $\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x+\theta h)$ i limiti dell'errore che si commette arrestando la serie al termine che ne ha n avanti di se (n. 228), mentrechè ricorrendo all'integrale indefinito otterremo il valore esatto di questo errore; è da avvertire però che in questo calcolo s'incontrano talvolta non lievi difficoltà inerenti alla integrazione.

700. Problema II. *Determinare il termine complementario della serie del Maclaurin.*

Facendo nella eq. (2) $x=0$ e cangiando h in x, avremo

$$fx = f0 + xf'0 + \frac{x^2}{1.2}f''0 + \frac{x^3}{1.2.3}f'''0 + \ldots .$$

$$\ldots + \frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}0 + \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\int_0^h f^{(n)}(x-z)z^{n-1}dz;$$

questa serie quando l'ultimo termine contenente l'integrale definito decresce al crescer di n, converge verso fx, e si cangia in una serie infinita di cui fx esprime la somma; allora essa non è altro che la serie del Maclaurin, ed

$$\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\int_0^h f^{(n)}(x-z)z^{n-1}dz$$

ne è il *termine complementario* posto sotto la forma d' un integrale definito.

701. Corollario. L'espressione del termine complementario suindicato coincide colla espressione che stabilimmo al n. 298. Infatti l'integrale definito

$$\int_0^h f^{(n)}(x-z)z^{n-1}dz,$$

il quale si estende fra i limiti $z=0, z=h$, non è altro che il

termine del limite della somma de' valori che acquista la funzione $z^{n-1}dz$ quando z (seguendo la legge di continuità) passa da 0 ad h, moltiplicato per una media presa fra i valori che acquista la funzione $f^{(n)}(x-z)$ ne' medesimi limiti; e tal prodotto è manifestamente $\frac{h^n}{n}f^{(n)}(\theta h)$; dunque

$$\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\int_0^h f^{(n)}(x-z)z^{n-1}dz=\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(\theta h).$$

III. La quadratura delle superficie piane.

702. Problema. *Determinare l'area d'una superficie piana compresa fra un arco, le due ordinate corrispondenti alle sue estremità, e l'asse delle ascisse.*

Le ascisse delle estremità dell'arco MT (fig. 26) sieno $OA=x_0$, $OK=x_0+h$; supporremo che per tutta la lunghezza dell'arco MT compreso fra le ordinate corrispondenti AM, KT le ordinate vadano gradatamente crescendo o gradatamente decrescendo; la quale ipotesi non toglie nulla alla generalità della soluzione, perocchè l'arco potrebbe sempre dividersi in due parti, in tre, ec. per modo da renderla sempre vera. L'area di che si tratta dipendendo dall'ascissa $OA=x_0$ e dall'incremento $AK=h$ è manifestamente una funzione continua di $x+h$ espressa da $f(x+h)$. Ciò posto facendo

$$h=h_0+h_1+h_2\ldots.+h_n,$$

cioè
$$AK=AB+BC+CD\ldots.+TK,$$

e tirando le ordinate $AM, BN, CP, \ldots. TS$, risulterà

$$\text{area } AMTK=\text{area } AMNB+\text{area } BNPC\ldots.+\text{area } ISTK;$$

ovvero $f(x_0+h)=\int[f(x_0+h_0)+f(x_1+h_1)\ldots.+f(x_n+h_n)]$.

Or si conducano le rette MW, TL parallele all'asse delle x;

siccome
$$\text{area } AMTK=M[AMWK, ALTK],$$

sarà
$$f(x_0+h)=M[h\varphi x,\ h\varphi(x+h)],$$

per tutti i valori di x compresi fra x_0 ed x_0+h; ma

$$\int_{h=0}\frac{f(x+h)}{h}=\int_{h=0}\varphi x=\int_{h=0}\varphi(x+h)=\varphi x,$$

dunque la funzione $f(x_0+h)$ soddisfà a tutte le condizioni richieste dal teorema del n. 697, e per conseguenza si trova

$$\text{area } AMTK = \int_{x_0}^{x_0+h} \varphi x dx.$$

703. Scolio I. Pongasi l'area $AMTK = t$; in virtù della osservazione fatta al n. 694, avremo

$$t = \int \varphi x dx = \int y dx; \quad dt = y dx;$$

cioè il differenziale dell'area che già trovammo al n. 369.

704. Scolio II. Il calcolo fatto per risolvere il precedente problema dimostra che ad ottener l'area d'una superficie piana non è necessario conoscerne il differenziale.

705. Corollario I. Parabola. $y^2 = 2px$; $y = \sqrt{2px}$. Perciò

$$t = \sqrt{2p}\int_0^x x^{\frac{1}{2}} dx; \qquad t = \tfrac{2}{3}\sqrt{2px^3} = \tfrac{2}{3}xy; \tag{1}$$

raddoppiando questa quantità avremo $\frac{2}{3}x.2y$ cioè l'espressione del segmento parabolico compreso fra la corda $2y$ e l'arco corrispondente; dunque *il segmento di parabola compreso fra una corda perpendicolare al suo asse e l'arco corrispondente è uguale ai due terzi della superficie del rettangolo circoscritto.*

706. Corollario II. Ellisse. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}$;

$$t = \frac{b}{a}\int_0^x dx\sqrt{(a^2-x^2)}.$$

Integrando per parti si trova

$$\int dx\sqrt{(a^2-x^2)} = x\sqrt{(a^2-x^2)} + \int \frac{x^2dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}; \tag{2}$$

e siccome

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \int \frac{(x^2-a^2)dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} + \int \frac{a^2dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = a^2 \text{ ar sen}\frac{x}{a} - \int dx\sqrt{(a^2-x^2)},$$

sarà $\int dx\sqrt{(a^2-x^2)} = x\sqrt{(a^2-x^2)} + a^2 \text{ ar sen}\dfrac{x}{a} - \int dx\sqrt{(a^2-x^2)}$,

ovvero $\int dx\sqrt{(a^2-x^2)} = \frac{1}{2}x\sqrt{(a^2-x^2)} + a^2 \text{ ar sen}\dfrac{x}{a} + C$;

e quindi $\int_0^x dx\sqrt{(a^2-x^2)} = \frac{1}{2}x\sqrt{(a^2-x^2)} + a^2 \operatorname{ar\,sen} \frac{x}{a}$.

per conseguenza $t = \frac{bx}{2a}\sqrt{(a^2-x^2)} + \frac{ab}{2} \operatorname{ar\,sen} \frac{x}{a}$,

ovvero
$$t = \tfrac{1}{2}xy + \tfrac{1}{2}ab \operatorname{ar\,sen} \frac{x}{a}. \tag{3}$$

Facendo $x = a$ avremo $t = \frac{1}{4}\pi ab$; questo sarà il valore della quarta parte dell'ellisse. L'area totale ellittica sarà adunque πab; e l'area del circolo avente il raggio a sarà πa^2.

Osservando che l'area del triangolo OMP (fig. 26) è data dal prodotto $\frac{1}{2}xy$ potremo inferire che l'area del settore ellittico OMB è espressa da

$$t - \tfrac{1}{2}xy = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{ar\,sen} \frac{x}{a}.$$

707. Corollario III. Iperbola. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ y = \frac{b}{a}\sqrt{(x^2-a^2)}$;

$$t = \frac{b}{a}\int_a^x dx\sqrt{(x^2-a^2)}.$$

Or per un calcolo analogo al già fatto sulla ellisse, sarà

$$\int dx\sqrt{(x^2-a^2)} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{(x^2-a^2)} - \tfrac{1}{2}a^2 \mathrm{l}[x+\sqrt{(x^2-a^2)}] + C;$$

e quindi $\int_a^x dx\sqrt{(x^2-a^2)} = \frac{1}{2}x\sqrt{(x^2-a^2)} - \frac{1}{2}a^2 \mathrm{l}\,\frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}$;

dunque $t = \frac{bx}{2a}\sqrt{(x^2-a^2)} - \frac{ab}{2}\,\mathrm{l}\,\frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}$;

ovvero
$$t = \tfrac{1}{2}xy - \tfrac{1}{2}ab\,\mathrm{l}\,\frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}.$$

Da ciò s'inferisce che l'area del settore OMA (fig. 28), compreso fra l'asse traverso, l'arco AM dell'iperbola, e la retta tirata dal centro O all'estremità M di questo arco è espressa da

$$\tfrac{1}{2}xy - t = \tfrac{1}{2}ab\,\mathrm{l}\,\frac{x+\sqrt{(x^2-a^2}}{a}. \tag{4}$$

708. Corollario IV. Iperbola equilatera. L'eq. di questa curva riferita agli asintoti è $xy = a^2$; donde si ha $y = \frac{a^2}{x}$; e

quindi $t = a^2\int_{x_0}^x \frac{dx}{x}$ ovvero $t = a^2 \mathrm{l}\,\frac{x}{x_0}$.

Facendo $a=1$ risulta $t=l\frac{x}{x_0}$; ed ove l'area debba cominciare dall'ordinata che passa pel vertice sarà $x_0=a=1$, e $t=lx$; cioè le aree saranno i logaritmi neperiani de' numeri esprimenti le ascisse. Questa si è la ragione per cui i logaritmi neperiani sono pur detti *logaritmi iperbolici*.

709. Corollario V. Cicloide. L'eq. differenziale della cicloide $\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{2r-y}{y}}$ (n. 341), si cangerà in

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{y}{2r-y}}=\frac{y}{\sqrt{(2ry-y^2)}},$$

quando si sostituisca $-(y-2r)$ ad y ed $x-2\pi r$ ad x, il che vuol dire considerar la cicloide quale si vede nella figura 29. Conseguentemente l'espressione dell'area AMP sarà

$$t=\int_0^x y=dx\int_0^y dy\sqrt{(2xy-y^2)};\qquad(1)$$

ma questa è pur l'espressione dell'area del semi-segmento circolare AHK; dunque area $AMP=$ area AHK, area $ADF=\frac{1}{2}\pi r^2$.

Ora area $CDFE=CD.AB=2\pi r\times 2r=4\pi r^2$,

perciò si conchiude che l'area totale $EAFB$ terminata dalla cicloide EAF sarà uguale a $3\pi r^2$, cioè uguale al triplo di quella del circolo generatore.

Si osservi che $\int dy\sqrt{(2ry-y^2)}=\int dy\sqrt{(r^2-(y-r)^2)}$; laonde ponendo nella formula (2) n. 704, $y-r$ in luogo di x, e cangiando a in r avremo

$$\int dy\sqrt{(2ry-y^2)}=\tfrac{1}{2}(y-r)\sqrt{(2ry-y^2)}+\tfrac{1}{2}x^2\operatorname{ar\,sen}\frac{y-x}{x}+C.$$

e quindi

$$\text{area } AMP=\int_0^y dy\sqrt{(2ry-y^2)}=\tfrac{1}{2}(y-r)\sqrt{(2ry-y)}+\tfrac{1}{2}r^2\operatorname{ar\,sen}\frac{y-r}{r},$$

$$\text{area } ADF=\int_0^{2r} dy\sqrt{(2ry-y^2)}=\tfrac{1}{4}\pi r^2+\tfrac{1}{4}\pi r^2=\tfrac{1}{2}\pi r^2,$$

come abbiamo trovato sopra.

710. Problema II. *Determinare l'area d'un settore compreso fra un arco qualunque e i due raggi vettori tirati alle sue estremità.*

Sia MOM' (fig. 30) il settore di cui vuolsi l'area; esso è com-

preso fra i due raggi vettori OM, OM' e l'arco MM'; il quale arco è una parte della curva $AMM'U$ che supporremo riferita alle coordinate polari e rappresentata dalla eq. $f(r, \omega) = 0$. Supporremo che i raggi vettori OA, OM, OM', ec. vadano tutti gradatamente crescendo o tutti gradatamente decrescendo; la quale ipotesi non toglie nulla alla generalità della soluzione, perocchè l'arco potrà sempre dividersi in più parti finite per modo da renderla vera. Or l'area d'un settore qualunque MOM' dipende dall'angolo $AOM = \omega_0$, dal suo accrescimento $MOM' = \Delta\omega = h$ e insieme dai raggi vettori $OM = r$, $OM' = r + \Delta r$, ma come r è dato per l'equazione della curva in funzione di ω, perciò può dirsi essere il settore MOM' una funzione di ω e del suo accrescimento h; porremo adunque area $MOM' = \varphi(\omega + h)$. Facendo $h = h_0 + h_1 + h_2 \ldots + h_n$, risulterà

$$\text{area } MOM' = \text{area } MOB + \text{area } BOC \ldots + \text{area } TOM',$$

cioè $$f(\omega_0 + h) = [f(\omega_0 + h_0) + f(\omega_1 + h_1) \ldots + f(\omega_n + h_n)].$$

Ciò posto si prolunghi OM, e si conducano gli archi di circolo MN, $M'N'$ l'uno col raggio OM, l'altro col raggio OM', avremo $$\text{area } MOM' = M[\text{area } MON, \text{ area } M'ON'] .$$

Ora

$$\text{area } MON = \tfrac{1}{2} OM.NM = \tfrac{1}{2} r.rh, \text{ area } M'ON' = \tfrac{1}{2} OM'.N'M' = \tfrac{1}{2}(r + \Delta r)(r + \Delta r)h,$$

dunque $$f(\omega_0 + h) = \text{area } MOM' = M[\tfrac{1}{2} r^2 h, \ \tfrac{1}{2}(r + \Delta r)^2 h] ;$$

per tutti i valori di ω compresi fra ω_0 ed $\omega_0 + h$; ma

$$\Big\lceil \frac{f(\omega_0 + h)}{h}\Big\rfloor_{h=0} = \Big\lceil \tfrac{1}{2} r^2 \Big\rfloor_{h=0} = \Big\lceil \tfrac{1}{2}(r + \Delta r)^2 \Big\rfloor_{h=0} = \tfrac{1}{2} r^2,$$

perchè $h = 0$ ci dà $\Delta r = 0$, dunque (n. 697)

$$\text{area } MOM' = \int_{\omega_0}^{\omega_0 + h} \tfrac{1}{2} r^2 d\omega .$$

711. Scolio. Pongasi l'area $MOM' = S$, avremo (n. 694)

$$S = \tfrac{1}{2} \int r^2 d\omega, \quad dS = \tfrac{1}{2} r^2 d\omega,$$

come già trovammo al numero 452.

712. Corollario. Spirale logaritmica. Siccome l'eq. polare di questa curva è $r = e^{m\omega}$, l'area compresa fra i due raggi vettori corrispondenti agli angoli ω_0 ed ω, sarà

$$S=\tfrac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\omega} e^{2m\omega}\,d\omega=\frac{1}{4m}\left(e^{2m\omega}-e^{2m\omega_0}\right)=\frac{r^2-r_0^2}{4m}.$$

IV. *La rettificazione degli archi piani.*

713. Problema I. *Trovare la lunghezza d'un arco compreso fra due ordinate corrispondenti a due date ascisse x_0, x_0+h.*

Sia $OA=x_0$, $OK=x_0+h$ (fig. 26); supporremo che per tutta la lunghezza dell'arco MT compreso fra le ordinate corrispondenti AM, RT, le ordinate vadano tutte gradatamente crescendo o tutte gradatamente decrescendo; Sia $y=\varphi x$ l'eq. dell' arco riferito, come la fig. suppone, a coordinate ortogonali. La lunghezza d'un arco qualunque MT dipendendo dall'ascissa OA e dall'accrescimento $AK=h$ si può ben dire che sia una funzione continua di x_0+h espressa da $f(x_0+h)$. Or facendo

$$h=h_0+h_1+h_2\ldots\ldots+h_n,$$

che è quanto dire $\quad AK=AB+BC+CE\ldots\ldots+TK,$

e conducendo le ordinate $AM, BN, CP, \ldots . TS$, risulterà

$$\text{arco } MT=\text{arco } MN+\text{arco } NP\ldots.+\text{arco } ST,$$

cioè $f(x_0+h)=\int[f(x_0+h_0)+f(x_1+h_1)\ldots.+f(x_n+h_n)]$.

Ciò posto si conducano le tangenti MV, TU alle estremità dell' arco MT; siccome

arco $MT=M[MV$, corda $MT]$ sarà pure arco $MT=M[MV, TU]$,

perchè essendo le ordinate crescenti conducendo TL parallela all'asse della x, il punto U non potrà oltrepassare il punto L. Ora

$$MV=\sqrt{(h^2+h^2\overline{\varphi' x}^2)}=h\sqrt{(1+\overline{\varphi' x}^2)},TU=\sqrt{(h^2+h^2\overline{\varphi'(x+h)}^2)}=h\sqrt{(1+\overline{\varphi'(x+h)}^2)};$$

dunque $f(x+h)=\text{arco}MT=M[h\sqrt{(1+\overline{\varphi' x}^2)}, h\sqrt{(1+\overline{\varphi'(x+h)}^2}]$

per tutti i valori di x compresi fra x_0 ed x_0+h; ma

$$\Big\{\frac{f(x+h)}{h}\Big\}_{h=0}=\Big\{\sqrt{[1+\overline{\varphi' x}^2]}\Big\}_{h=0}=\Big\{\sqrt{[1+\overline{\varphi'(x+h)}^2]}\Big\}_{h=0}=\sqrt{(1+\overline{\varphi' x}^2)},$$

dunque la funzione $f(x+h)$ soddisfà a tutte le condizioni richieste dal teorema dimostrato al n. 694, e per conseguenza

$$\text{arco } MT = \int_{x_0}^{x_0+h} dx \sqrt{(1+\overline{\varphi' x}^2)}.$$

714. Scolio I. Pongasi l'arco $MT = s$; stante l'osservazione fatta al n. 694, avremo

$$s = \int dx\sqrt{(1+\overline{\varphi' x}^2)},\ ds = dx\sqrt{(1+y'^2)} = \sqrt{(dx^2+dy^2)},$$

cioè il differenziale dell'arco che già trovammo al n. 368.

715. Scolio II. Il calcolo che abbiam fatto per risolvere il precedente problema dimostra che la rettificazione dell'arco non esige che si conosca l'espressione analitica del suo differenziale.

716. Corollario I. Parabola. $y^2 = 2px$, $y = \sqrt{2px}$, ed $\frac{dy}{dx} = \varphi' x = \sqrt{\frac{p}{2x}}$; laonde l'arco esteso dal vertice ad un punto qualunque la cui ascissa sia x sarà

$$s = \int_0^x dx \sqrt{1+\frac{p}{2x}}.$$

Or si esservi che ponendo $\sqrt{1+\frac{p}{2x}} = z$, si ha $x = \frac{p}{z(z^2-1)}$;

quindi $$\int z dz = zx - \int x dz = zx - \tfrac{1}{2}p\int\frac{dz}{z^2-1}$$

$$= zx - \tfrac{1}{4}p\int\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-1}\right)dz = zx - \tfrac{1}{4}pl\frac{z-1}{z+1} + C;$$

ed $$\int dx\sqrt{\left(1+\frac{p}{2x}\right)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4x^2+2px)} - \tfrac{1}{4}pl\frac{\sqrt{(4x^2+2px)}-2x}{\sqrt{(4x^2+2px)}+2x} + C;$$

e conseguentemente

$$s = \int_0^x dx\sqrt{\left(1+\frac{p}{2x}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{(4x^2+2px)} + \frac{1}{4}pl\frac{\sqrt{(4x^2+2px)}-2x}{\sqrt{(4x^2+2px)}-2x}.$$

717. Corollario II. Ellisse. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; di qui si ha

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)},\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)}},$$

conseguentemente

$$s=\int_0^x dx\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\frac{x^2}{a^2-x^2}}=\int_0^x dx\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}},$$

e tale sarà l'espressione dell'arco preso dal vertice della curva sino ad un punto di essa che abbia per ascissa x. Or ponendo $a^2-b^2=a^2e^2$, risulterà

$$s=\int_0^x dx\sqrt{\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}}.$$

Siffatto integrale non può aversi in termini finiti; vari sono bensì gli artifizj analitici pei quali esso può svilupparsi in serie convergente, ed uno di questi è il seguente. Siccome x è sempre minore di a porremo $x=a\cos\varphi$, donde si ha $dx=-a\,\mathrm{sen}\,\varphi d\varphi$, ed

$$s=-a\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\varphi} d\varphi\sqrt{(1-e^2\cos^2\varphi)}\,;$$

ovvero, sviluppando $(1-e^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$,

$$s=a(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi)+a\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\varphi}d\varphi\left(\frac{e^2}{2}\cos^2\varphi+\frac{1.e^4}{2.4}\cos^4\varphi+\frac{1.3e^6}{2.4.6}\cos^6\varphi+\frac{1.3.5e^8}{2.4.6.8}\cos^8\varphi+\ldots\right).$$

Ciò posto si osservi che in virtù della formula (17) n.518, si ha

$$\int\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi+\frac{1}{2}\varphi+c,$$

$$\int\cos^4\varphi\,d\varphi=\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos^3\varphi+\frac{1.3}{2.4}\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi+\frac{1.3}{2.4}\varphi+c,$$

$$\int\cos^6\varphi d\varphi=\frac{1}{6}\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos^5\varphi+\frac{1.5}{4.6}\mathrm{sen}\varphi\cos^3\varphi+\frac{1.3.5}{2.4.6}\mathrm{sen}\varphi\cos\varphi+\frac{1.3.5}{2.4.6}\varphi+c,$$

$$\int\cos^8\varphi\,d\varphi=\frac{1}{8}\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos^7\varphi+\frac{1.7}{6.8}\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos^5\varphi+\frac{1.5.7}{4.6.8}\mathrm{sen}\varphi\cos^3\varphi$$
$$+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\varphi+c,$$

. . . . .

ed ove gl'integrali si estendano da $\varphi=\frac{1}{2}\pi$ fino a qualsivoglia altro valore di φ, avremo

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\varphi}\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi-\frac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi\right),$$

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\varphi}\cos^4\varphi\,d\varphi=\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos^3\varphi+\frac{1.3}{2.4}\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi-\frac{1.3}{2.4}\left(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi\right),$$

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\varphi}\cos^6\varphi\,d\varphi=\frac{1}{6}\mathrm{sen}\varphi\cos^5\varphi+\frac{1.5}{4.6}\mathrm{sen}\varphi\cos^3\varphi+\frac{1.3.5}{2.4.5}\mathrm{sen}\varphi\cos\varphi-\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi\right)$$

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\varphi}\cos^8\varphi\,d\varphi=\frac{1}{8}\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos^7\varphi+\frac{1.7}{6.8}\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos^5\varphi+\frac{1.5.7}{4.6.8}\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos^3\varphi$$
$$+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi-\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\left(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi\right),$$

. . . . .

le quali formule giovano a dare i valori dei termini della serie precedente.

Facendo $x=a$, e per conseguenza $\cos\varphi=1$ ovvero $\varphi=0$, s verrà a rappresentare la lunghezza della 4^{ta} parte del perimetro dell'ellisse, e sarà

$$s=\frac{\pi a}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}e\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2-\frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2-\frac{1}{7}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}e^4\right)^2-\ldots\right].$$

718. Corollario III. Iperbola. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, di qui si ha

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{(x^2-a^2)},\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{(x^2-a^2)}};\quad \text{laonde}$$

$$s=\int_a^x dx\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\frac{x^2}{x^2-a^2}}=\int_a^x dx\sqrt{\frac{(a^2+b^2)x^2-a^4}{a^2(x^2-a^2)}};$$

e ponendo $a^2+b^2=a^2e^2$, risulterà $s=\int_a^x dx\sqrt{\frac{e^2x^2-a^2}{x^2-a^2}}$;

la qual formula darà la lunghezza di s presa dal vertice della curva fino al punto di cui x è l'ascissa. Or siccome si ha sempre $x>a$ potremo porre $x=\frac{a}{\cos\varphi}$, per cui sarà $dx=\frac{a\,\mathrm{sen}\,\varphi d\varphi}{\cos^2\varphi}$, ed

$$s=a\int_0^x\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{(e^2-\cos^2\varphi)}=a\int_0^\varphi dx\frac{e}{\cos^2\varphi}\sqrt{\left(1+\frac{\cos^2\varphi}{e^2}\right)};$$

e sviluppando $\left(1-\frac{\cos^2\varphi}{e^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, otterremo

$$s = a\int_0^\varphi d\varphi\,\frac{e}{\cos^2\varphi}\Big(1 - \frac{1}{2e^2}\cos^2\varphi - \frac{1.1}{2.4\,e^4}\cos^4\varphi$$
$$-\frac{1.3.1}{2.4.6e^6}\cos^6\varphi - \frac{1.3.5.1}{2.4.6.8e^8}\cos^8\varphi - \ldots\Big),$$

ovvero $$s = ae\,\mathrm{tang}\,\varphi - \frac{a}{2e}\varphi - a\int_0^\varphi d\varphi\Big(\frac{1.1}{2.4\,e^3}\cos^2\varphi$$
$$+\frac{1.3.1}{2.4.6\,e^5}\cos^4\varphi + \frac{1.3.5.1}{2.4.6.8e^7}\cos^6\varphi + \ldots\Big);$$

ed è manifesto che il valore de'termini della serie si ricaveranno dalle espressioni di $\int\cos^2\varphi\,d\varphi$, $\int\cos^4\varphi\,d\varphi$, ... date qui sopra (n. 717) supponendo la costante arbitraria $c = 0$.

Di qui si vede che crescendo x indefinitamente, l'arco φ converge verso $\frac{1}{2}\pi$ ed s cresce senza limite. Ma ove si cerchi la differenza K fra l'arco s e la parte i dell'asintoto compresa tra il centro della curva ed il punto corrispondente all'ascissa della estremità dell'arco istesso, vedremo che questa differenza converge verso un limite di cui può aversi l'espressione analitica. In fatti la quantità i è data dalla proporzione $a : x :: \sqrt{(a^2+b^2)} : i$; or siccome $\sqrt{(a^2+b^2)} = ae$ ed $x = \dfrac{a}{\cos\varphi}$, si trova $i = \dfrac{ae}{\cos\varphi}$, e

$$K = i - s = ae\,\frac{1-\mathrm{sen}\,\varphi}{\cos\varphi} + \frac{a}{2e}\varphi + a\int_0^\varphi d\varphi\Big(\frac{1.1}{2.4\,e^3}\cos^2\varphi$$
$$+\frac{1.3.1}{2.4.6\,e^5}\cos^4\varphi + \frac{1.3.5.1}{2.4.6.8\,e^7}\cos^6\varphi + \ldots\Big)$$

Supponendo $x = \infty$ cioè $\cos\varphi = 0$, che è quanto dire $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, questa formula darà il limite k verso il quale converge K a misura che cresce la x, e sarà (perchè quando $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ risulta manifestamente $\dfrac{1-\mathrm{sen}\,\varphi}{\cos\varphi} = \dfrac{\cos\varphi}{1+\mathrm{sen}\,\varphi} = 0$),

$$k = \frac{\pi a}{4e}\Big[1 + \frac{1}{2}\Big(\frac{1.1}{2.\,e}\Big)^2 + \frac{1}{3}\Big(\frac{1.3.1}{2.3\,e^2}\Big)^2 + \frac{1}{4}\Big(\frac{1.3.5.1}{2.4.6\,e^3}\Big)^2 + \ldots\Big]$$

719. Corollario IV. Cicloide. L'equazione differenziale della cicloide vedemmo essere (n. 341) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{\dfrac{2r-y}{y}}$; or siccome

$$s = \int_0^x dx\sqrt{(1+\varphi' x^2)} = \int_0^y dy\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}},$$

sarà
$$s = \sqrt{2r}\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(2r-y)}}$$

la lunghezza dell'arco compreso fra l'origine della curva ed il punto di cui y è l'ordinata. Ora

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(2r-y)}} = -2\sqrt{(2r-y)}+c,$$

dunque
$$s = 4r - 2\sqrt{2r}\sqrt{(2r-y)}.$$

Facendo $y=2r$ avremo la lunghezza della metà della curva; la lunghezza della semi-cicloide è adunque uguale a $4r$ come vedemmo al n. 438. Trasportando l'origine in A (fig. 29) e prendendo le ordinate in senso contrario a quello che la precedente equazione della curva suppone, dovremo porre nel risultato ottenuto $2r-y$ in luogo di y e $4r-s$ in luogo s; e ciò darà

$$s = 2\sqrt{2ry}.$$

720. Corollario V. Spirale logaritmica. L'eq. di questa curva riferita alle coordinate polari sappiamo essere $r=e^{m\omega}$. Ora è da notare che la formula

$$s = \int_{x_0}^{x_0+h} dx\sqrt{(1+\varphi' x^2)} + \int_{x_0}^{x_0+h}\sqrt{(dx^2+dy^2)}$$

quando si faccia $x = r\cos\omega$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\omega$, e perciò

$$dx = \cos\omega dr - r\,\mathrm{sen}\,\omega d\omega,\quad dy = \mathrm{sen}\,\omega dr + r\cos\omega d\omega,$$

si cangia nella seguente

$$s = \int_{\omega_0}^{\omega}\sqrt{(dr^2+r^2d\omega^2)} = \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega\sqrt{r^2+\frac{dr^2}{d\omega^2}};$$

Or siccome dalla eq. della spirale logaritmica si ha $\frac{dr}{d\omega}=me^{m\omega}=mr$,

sarà
$$s = \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega\sqrt{(r^2+mr^2)} = \sqrt{(1+m^2)}\int_{\omega_0}^{\omega} e^{m\omega}d\omega,$$

ovvero
$$s = \frac{\sqrt{(1+m^2)}}{m}(r-r_0);$$

e questa espressione indicherà la lunghezza dell'arco compreso

fra i due punti della curva cui appartengono i raggi vettori r, r_0. L'espressione stessa mostra che il rapporto della lunghezza dell'arco alla differenza de'raggi vettori condotti alle sue estremità è costante ed espresso da $\frac{\sqrt{(1+m^2)}}{m}$.

Fatto $m=1$, l'eq. della spirale logaritmica sarà $r=e^{\omega}$, ed

$$s=r\sqrt{2}-r_0\sqrt{2};$$

dimanierachè la lunghezza dell'arco compreso fra due punti qualunque della curva sarà la differenza delle diagonali dei quadrati costrutti su i raggi vettori condotti a questi punti istessi.

V. La rettificazione degli archi a doppia curvatura.

721. Problema. *Determinare la lunghezza d'un arco* S *a doppia curvatura.*

Immaginiamo che la superficie cilindrica $MM'mm'$ su la quale trovansi l'arco $S=MM'$ (fig. 31) e la sua projezione $s=mm'$ fatta sul piano xy sia distesa sul piano che passa per la retta Mm e per la tangente condotta all'estremità m dell'arco s. In virtù di tale operazione l'arco S diventerà, senza mutar di lunghezza, un arco di curva piana; l'arco s senza mutar neppur esso di lunghezza si cangerà in una porzione di linea retta la quale potrà prendersi per asse delle ascisse, z essendo quello delle ordinate; adunque supponendo che l'arco S sia dato dalle eq. $y=\varphi x$, $z=\psi x$, avremo

$$s=\int_{x_0}^{x_0+h} dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}; \qquad ds=dx^2+dy^2;$$

$$S=\int_{x_0}^{x_0+h} ds\sqrt{1+\frac{dz^2}{ds^2}}=\int_{x_0}^{x_0+h}\sqrt{(ds^2+dz^2)}=\int_{x_0}^{x_0+h}\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)};$$

$$S=\int_{x_0}^{x_0+h} dx\sqrt{(1+\overline{\varphi' x}^2+\overline{\psi' x}^2)}.$$

722. Scolio. Per l'osservazione fatta al n. 694, sarà

$$s=\int dx\sqrt{(1+\overline{\varphi' x}^2+\overline{\psi' x}^2)},\ ds=dx\sqrt{(1+\overline{\varphi' x}^2+\overline{\psi' x}^2)};$$

ovvero $$ds=\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}.$$

723. Corollario. Elice. Sia questa curva data dalle equazioni

$$x=r\cos\omega, \qquad y=r\operatorname{sen}\omega, \qquad z=ar\omega;$$

sarà $\quad dx=-r\operatorname{sen}\omega d\omega, \quad dy=r\cos\omega d\omega, \quad dz=ard\omega,$

e quindi $\varphi' x = \frac{dy}{dx} = -\cot\omega, \quad \psi' x = \frac{dz}{dx} = -\frac{a}{\operatorname{sen}\omega};$

$$S = r\sqrt{1+a^2}\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = r\sqrt{1+a^2}\,(\omega-\omega_0).$$

VI. La cubatura dei solidi di rivoluzione.

724. Problema. *Determinare il volume d'un solido di rivoluzione.*

Supporremo che il solido di rivoluzione sia generato dal trapezio mistilineo $AMTK$ (fig. 26) girevole intorno all'asse Ox; supporremo inoltre che per tutta la lunghezza di questo arco le ordinate sieno gradatamente crescenti o gradatamente decrescenti. Il volume del solido di che si tratta dipendendo dall'ascissa $OA = x_0$ e dall'incremento $AK = h$ è manifestamente una funzione continua di $x_0 + h$ espressa da $f(x_0 + h)$. Facendo

$h = h_0 + h_1 + h_2 \ldots + h_n$, cioè $AK = AB + BC + CD \ldots + IK$,

tirando le ordinate AM, BN, $CP, \ldots IS$, e rappresentando con vol $AMTK$ il volume del solido generato dalla superficie $AMTK$,

avremo vol $AMTK =$ vol $AMNB +$ vol $BNPC \ldots\ldots +$ vol $ISTK$;

$$f(x_0 + h) = \Sigma[f(x_0 + h_0) + f(x_1 + h_1) \ldots + f(x_n + h_n)].$$

Or si tirino le rette MW, TL parallele all'asse delle x; siccome

$$\text{vol}\, AMTK = M[\text{vol}\, AMWK, \text{vol}\, ALTK],$$

sarà $$f(x_0 + h) = M[\pi h\overline{\varphi x}^2, \pi h\varphi\overline{(x+h)}^2]$$

per tutti i valori di x compresi fra x_0 ed $x_0 + h$; ma

$$\left\{\frac{f(x+h)}{h}\right\}_{h=0} = \left\{\pi\overline{\varphi x}^2\right\}_{h=0} = \left\{\pi\varphi\overline{(x+h)}^2\right\}_{h=0} = \pi\overline{\varphi x}^2,$$

dunque la funzione $f(x_0 + h)$ soddisfà a tutte le condizioni richieste dal teorema del n. 697, e conseguentemente si ha

$$\text{vol}\, AMTK = \pi\int_{x_0}^{x_0+h}\overline{\varphi x}^2 dx.$$

725. Scolio. Pongasi vol $AMTK = v$; sarà (n. 694)

$$v=\pi\int\overline{\varphi x}^2dx,\quad dv=\pi y^2dx,\quad v'=\pi y^2;$$

queste sono le espressioni analitiche del differenziale e della derivata di v, cioè del volume di un solido di rivoluzione.

726. Corollario I. Elissoide. Supponiamo che la curva generatrice della superficie di tal solido sia una ellisse girevole intorno ad uno de' suoi assi, per esempio intorno all' asse $2a$; l'eq. di tal curva, posto l'origine al centro, sarà $y=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$; laonde avremo

$$v=\pi\frac{b^2}{a^2}\int_0^x dx\,(a^2-x^2);$$

e siffatta espressione rappresenterà quella parte del volume del solido che si trova compresa fra il piano perpendicolare all'asse che passa pel centro ed un piano ad esso parallelo condotto alla distanza x. Eseguendo l'integrazione otterremo

$$v=\pi\frac{b^2}{a^2}(a^2x-\tfrac{1}{3}x^3);$$

ed estendendo l'integrale sino ad $x=a$ avremo $v=\frac{2}{3}\pi ab^2$; questo sarà il volume della metà dell'ellissoide di rivoluzione: adunque il volume intero verrà espresso da $\frac{4}{3}\pi ab^2$.

Facendo $a=b$ l'ellissoide si cangerà in una sfera avente il raggio a; e $\frac{4}{3}\pi a^3$ sarà il volume di essa.

727. Scolio. Frattanto sarà facile determinare il volume del solido generato da una figura piana qualunque $MM'NM''$ (fig. 32) girevole intorno ad una retta Ox posta nel piano di essa. Si prenda questa retta per asse delle x, e si rappresentino con x_0, x_1 il più piccolo valore OP ed il più grande valore OQ della x; PM e QN sieno le ordinate corrispondenti alle ascisse istesse OP e OQ; inoltre sieno $y_1=P'M', y_2=P'M''$ due ordinate delle curve $MM'N, MM''N$ corrispondenti alla medesima ascissa OP'; avremo

$$\text{vol}\,MPP'M'=\pi\int_{x_0}^{x_0+h}y_1^2dx,\quad \text{vol}\,MPP'M''=\pi\int_{x_0}^{x_0+h}y_2^2dx;$$

per conseguenza $\quad \text{vol}\,M'MM''=\pi\int_{x_0}^{x_0+h}(y_1^2-y_2^2)dx.$

Or supponiamo che la curva generatrice del solido sia il circolo $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$; sarà $y=\beta\pm\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}$,

$$y_1=\beta+\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2},\qquad y_2=\beta-\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2};$$

laonde il volume richiesto sarà espresso dall'integrale definito

$$4\pi\beta\int_{x_0}^{x_0+h} dx\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}:$$

ora è da osservare che l'area del segmento circolare $MM'M'' =$

$PMM'P' - PMM''P'$ è data dall'integrale $2\int_{x_0}^{x_0+h} dx\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}$,

dunque vol $MM'M'' = 2\pi\beta$ area $MM'M'' =$ circ $\beta \times$ area $MM'M''$;

e vol $MM'NM'' =$ circ $\beta \times$ area $MM'NM'' = 2\pi^2\beta r^2$;

da ciò si raccoglie che il volume del solido anullare generato da qualsivoglia circolo girevole intorno ad una retta condotta nel piano di esso è uguale al prodotto dell'area di questo circolo istesso moltiplicata per la circonferenza descritta dal suo centro.

VII. *La quadratura delle superficie di rivoluzione.*

728. Problema. *Determinare l'area d'una superficie di rivoluzione.*

Supporremo la superficie data prodotta dall'arco MT (fig. 26) girevole intorno all'asse Ox; supporremo inoltre che per tutta la lunghezza di questo arco le ordinate sieno gradatamente crescenti o gradatamente decrescenti. L'area della superficie di che si tratta dipendendo dall'ascissa $OA = x_0$ e dell'incremento $AK = h$ è manifestamente una funzione continua di $x_0 + h$ espressa da $f(x_0 + h)$. Ciò posto facendo

$$h = h_0 + h_1 + h_2 \ldots. + h_n,\ \text{cioè}\ AK = AB + BC + CD \ldots. + TK,$$

tirando le ordinate AM, BN, CP, ... IS, e rappresentando con area MT l'area della superficie generata dalla curva MT, avremo

$$\text{area } MT = \text{area } MN + \text{area } NP + \text{area } PQ \ldots. + \text{area } ST$$

ed $$f(x_0 + h) = \Sigma[f(x_0 + h_0) + f(x_1 + h_1) \ldots. + f(x_n + h_n)].$$

Ciò posto si conducano le tangenti MV, TU alle estremità dell'arco MT; supponendo che anch'esse si aggirino coll'arco istesso intorno all'asse Ox sarà l'area generata dall'arco MT mi-

nore dell'area generata da MV e maggiore di quella generata dalla corda MT; il che facilmente si vede supponendo che a destra della TK si ripeta la medesima figura che si vede a sinistra, e che intorno all' asse delle x si aggirino in luogo delle linee MV, arco MT, corda MT, i doppi loro cioè le tre linee $MV + VM'$, arco $MT +$ arco TM', corda $MT +$ corda TM'; porremo frattanto

$$\text{area } MT = M[\text{area } MV, \text{ area } TU]; \qquad (1)$$

e siccome $\quad$ area $MV = \pi(MA + VK) \times MV$,

ed $\quad$ area corda $MT = \pi(MA + TK) \times$ corda MT,

perciò osservando che corda $MT > TU$ avremo (n. 713)

$$\text{area } MT = \pi M\Big[(MA + VK) \times MV, \ (MA + TK) \times TU\Big],$$

ovvero (n. 713)

$$\text{area } MT = \pi M\Big\{(2\varphi x + h\overline{\varphi' x^2})h\sqrt{(1 + \overline{\varphi' x^2})}, [\varphi x + \varphi(x+h)]h\sqrt{(1 + \overline{\varphi'(x+h)^2})}\Big\},$$

e di qui

$$\text{area } MT = 2\pi\int_{x_0}^{x_0+h} \varphi x\sqrt{(1 + \overline{\varphi' x^2})}dx.$$

729. Scolio. Facciasi l' area $MT = u$; avremo (n. 694)

$$u = 2\pi\int \varphi x\sqrt{(1 + \overline{\varphi' x^2})}dx, du = 2\pi y\sqrt{(1 + y'^2)}dx, u' = 2\pi y\sqrt{(1 + y'^2)}.$$

730. Corollario. Elissoide. Sia l'elissoide quella istessa che abbiamo considerata al n. 726; avremo

$$u = 2\pi\,\frac{b}{a}\int_0^x dx\sqrt{a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2}.$$

Or sia $a > b$, cioè supponiamo l'ellisse girevole intorno al suo asse maggiore, e poniamo $a^2 - b^2 = a^2e^2$; otterremo

$$u = 2\pi\frac{b}{a}\int_0^x dx\sqrt{(a^2 - e^2x^2)} = 2\pi\,\frac{b}{ae}\int_0^x d(ex)\sqrt{(a^2 - e^2x^2)},$$

e quindi $\quad u = \pi b\left(x\sqrt{1 - \frac{e^2x^2}{a^2}} + \frac{a}{e}\text{ ar sen }\frac{ex}{a}\right).$

Facendo $x = a$, avremo l'area della metà della superficie elissoidale, e quest'area sarà espressa da

$$\pi\left(b^2 + \frac{ab}{e}\text{ ar sen } e\right).$$

Ed ove si avesse $a = b$, sarebbe $e = 0$ ed $\frac{\text{ar sen } e}{e} = 1$; laonde la

detta espressione si cangerebbe in $2\pi a^2$ e rappresenterebbe l'area dell'emisfero avente il raggio a.

Sia in secondo luogo $a < b$, cioè supponiamo l'ellisse girevole intorno al suo asse minore, e poniamo $b^2 - a^2 = b^2e^2$; avremo

$$u = 2\pi \frac{b}{a} \int_0^x dx \sqrt{a^2 + \frac{b^2e^2x^2}{a^2}} = \frac{2\pi}{e} \int_0^x d\left(\frac{bex}{a}\right) \sqrt{a^2 + \frac{b^2e^2x^2}{a^2}};$$

e posto $\frac{bex}{a} = z$, si troverà

$$\int dz \sqrt{(a^2 + z^2)} = C + \frac{1}{2} z \sqrt{(a^2 + z^2)} + \frac{a^2}{2} \mathrm{l}\,[z + \sqrt{(a^2 + z^2)}],$$

$$\int_0^x d\left(\frac{bex}{a}\right) \sqrt{a^2 + \frac{b^2e^2x^2}{a^2}} = \frac{bex}{2a} \sqrt{a^2 + \frac{b^2e^2x^2}{a^2}} + \frac{a^2}{2} \mathrm{l}\, \frac{bex}{a^2} \sqrt{a^2 + \frac{b^2e^2x^2}{a}}$$

$$u = \pi b \left[x \sqrt{1 + \frac{b^2e^2x^2}{a^4}} + \frac{a^2}{be} \mathrm{l} \left(\frac{bex}{a^2} + \sqrt{1 + \frac{b^2e^2x^2}{a^4}} \right) \right].$$

Facendo $x = a$, otterremo l'area della metà della superficie elissoidale, e sarà

$$\pi b \sqrt{(a^2 + b^2e^2)} + \frac{\pi a}{e} \mathrm{l}\, \frac{be + \sqrt{(a^2 + b^2e^2)}}{a};$$

ma $b^2e^2 = b^2 - a^2$ ed $\frac{a^2}{b^2} = (1 + e)(1 - e)$, perciò la detta espressione potrà prender la forma

$$\pi \left[b^2 + \frac{a^2}{e} \mathrm{l}\, \frac{b}{a} (1 + e) \right] \quad \text{ovvero} \quad \pi \left[b^2 + \frac{a^2}{2e} \mathrm{l}\, \frac{1 + e}{1 + e} \right].$$

E quando fosse $a = b$ ed $e = 0$ risulterebbe $\frac{1}{e} \mathrm{l}\, \frac{1 + e}{1 - e} = 2$, ed il valore di questa quantità sarebbe $2\pi a^2$ come abbiamo trovato sopra.

731. Scolio. Sarà cosa agevole il vedere che l'area del solido di rivoluzione considerato al n. 727 viene espressa da

$$2\pi \int_{x_0}^x dx \left[y_1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2} - y_2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy_2}{dx}\right)^2} \right].$$

Da questa formula potrà aversi l'area della superficie del solido generato dal segmento circolare $MM'M''$ (fig. 33) già considerato al n. 727, ed anche l'area della superficie totale di siffatto solido; la quale si troverà uguale a $4\pi^2\beta r$, cioè uguale al prodotto

della circonferenza generatrice $2\pi r$ moltiplicata per la circonferenza descritta dal suo centro.

VIII. *Nozioni su gl' integrali doppi.*

732. Principio. Abbiasi una funzione $F(x, y)$ delle due variabili x, y indipendenti; e sia essa continua per tutti i valori della x estesi da x_0 ad $x_0 + h$ e per quelli altresì della y estesi da y_0 ad $y_0 + k$; immaginando h e k divise in parti uguali o disuguali cioè $h = h_0 + h_1 + h_2 .... + h_n$, e $k = k_0 + k_1 + k_2 .... + k_m$, potremo supporre che la x varj da x_0 ad $x_0 + h$ passando rigorosamente per tutti i valori intermedj, e la y da y_0 ad $y_0 + k_0$; allora i valori successivi della x saranno espressi da

$$x_0,\ x_0 + h_0 = x_1,\ x_1 + h_1 = x_2 .... x_n + h_n = x_0 + h,$$

e quelli della y da

$$y_0,\ y_0 + k_0 = y_1,\ y_1 + k_1 = y_2, ... y_m + k_m = y_0 + k;$$

dove è da notare che le parti di h cioè $h_0, h_1, h_2 ... h_n$ si potranno supporre tanto più piccole quanto più sarà grande n, e quelle di k cioè $k_0, k_1, k_2, ... k_m$ tanto più piccole anch'esse quanto più sarà grande m; or siccome i numeri n ed m possono riuscire grandissimi, sarà dato riputare le parti di h e di k infinitesime. Frattanto coerentemente ai principj esposti (n. 691) avremo

$$\Sigma[h_0F(x_0,y) + h_1F(x_1,y) + h_2F(x_2,y) ... + h_nF(x_n,y)] = \int_{x_0}^{x_0+h} F(x,y)dx;$$

e questo integrale definito sarà una funzione di y e h che potremo rappresentare con $f(y, h)$. Per gli stessi principj avremo ancora

$$\Sigma[k_0f(y_0, h) + k_1 f(y_1, h) + k_2 f(y_2, h) ... + k_m f(y_m, h)] = \int_{y_0}^{y_0+k} f(y,h)\, dy,$$

dove si suppone che la h riceva successivamente tutti i suoi valori da h_0 ad h. Sostituendo alla funzione $f(y, h)$ l'integrale che essa rappresenta, potrà il risultato precedente esprimersi così

$$\int_{y_0}^{y_0+k} \left(\int_{x_0}^{x_0+h} F(x,y)dx\right)dy;$$

oppure, sopprimendo le parentesi per brevità di scrittura, potrà esprimersi ancora nel seguente modo

$$\int_{y_0}^{y_0+k} dy \int_{x_0}^{x_0+h} F(x,y)\,dx \text{ ovvero } \int_{y_0}^{y_0+k}\int_{x_0}^{x_0+h} F(x,y)\,dx\,dy; \quad (1)$$

questo è un *integrale definito doppio;* il quale esprime il limite della somma di tutti i valori che può ricevere la funzione $F(x,y)dxdy$, che è quanto dire $F(x,y)hk$, ossia $F(x,y)\Delta x\Delta y$, quando le variabili x, y partendo dai valori iniziali x_0, y_0 passano ai valori successivi per gradi uguali o disuguali che rappresentano di mano in mano il valore degli accrescimenti dx, dy. Da ciò si raccoglie che l'*integrale* (1) *è il limite verso cui converge la somma di tutti i valori che riceve la funzione* $F(x, y)\Delta x\Delta y$ *combinando tutti i valori* $x_0 + \Delta x$ *che riceve la* x *quando si fa* $\Delta x = h_0, = h_1, = h_2 \ldots = h_n$, *con tutti i valori* $y_0 + \Delta y$ *che riceve la* y *quando si fa* $\Delta y = k_0, = k_1, = k_2, \ldots = k_m$, *nella ipotesi per altro che* n *ed* m *crescano indefinitamente, cioè che le differenze* $h_0, h_1, h_2, \ldots k_0, k_1, k_2, \ldots$ *convergano indefinitamente verso lo zero.*

733. Scolio I. È manifesto frattanto che il valore dell'integrale (1) è in questo caso indipendente dall'ordine delle due integrazioni, e che perciò

$$\int_{y_0}^{y_0+k}\int_{x_0}^{x_0+h} F(x,y)dxdy = \int_{x_0}^{x_0+h}\int_{y_0}^{y_0+k} F(x,y)dydx.$$

734. Scolio II. In luogo di $x_0 + h$, $y_0 + k$ porremo in seguito per maggior brevità x e y.

Notisi che

$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} dydx = (x - x_0)(y - y_0).$$

735. Scolio III. Eseguite le due integrazioni indicate dalla espressione

$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} F(x,y)\,dydx,$$

il risultato sarà una funzione dei limiti superiori x, y; che potrà essere rappresentata da $f(x,y)$; perlochè in virtù della osservazione che facemmo al n. 694, avremo

$$\frac{df(x,y)}{dx} = \int_{y_0}^{y} F(x,y)dy, \quad \frac{df(x,y)}{dy} = \int_{x_0}^{x} F(x,y)dx,$$

$$\frac{d^2f(x,y)}{dxdy} = \frac{d^2f(x,y)}{dydx} = F(x,y). \quad (2)$$

Se data la funzione $F(x,y)$ si potesse trovare una funzione

$f(x, y)$ capace di soddisfare alla equazione (2) qualunque altra funzione della forma $f(x, y) + \varphi x + \xi y$ (φ e ξ essendo due funzioni arbitrarie) soddisfarebbe essa pure alla equazione istessa.

Or per trovare una funzione $f(x, y)$ che soddisfaccia alla equazione (2), potrà determinarsi in primo luogo l'integrale indefinito della funzione differenziale

$$\int F(x, y)dx$$

considerando y come costante, e dopo avere moltiplicato per dy il risultato, potrà prendersi l'integrale indefinito della funzione differenziale

$$dy \int F(x, y)\, dx$$

riputando x costante e y variabile. La funzione risultante da queste operazioni rappresentata dalla espressione $\int dy \int F(x, y)dx$ ovvero da $\int\int F(x, y)dydx$ dicesi *integrale indefinito doppio.*

Se le due integrazioni fossero state fatte in ordine inverso al precedente, considerando prima x costante e y variabile, poscia x variabile ed y costante saremmo giunti al medesimo risultato.

736. Scolio IV. Ponendo $z = F(x, y)$ avremo una equazione a tre variabili x, y, z, la quale rappresenterà una superficie riferita a coordinate ortogonali; e l'espressione $F(x, y)\Delta y \Delta x$ ovvero il prodotto $z\Delta y \Delta x$ rappresenterà il volume d'un parallelepipedo avente per base il rettangolo $\Delta y \Delta x$ e per altezza l'ordinata z. Le intersezioni delle facce laterali di siffatto parallelepipedo colla superficie $z = F(x, y)$ determinano un quadrilatero curvilineo la cui proiezione sul piano xy è il rettangolo $\Delta x \Delta y$. Ora il solido V compreso fra le facce laterali del parallelepipedo, la sua base e il quadrilatero curvilineo differirà dal parallelepipedo $z\Delta y \Delta x$ d'una quantità minore di $\theta \Delta y \Delta x$, essendo θ la differenza del maggiore e minor valore di z ne'limiti del quadrilatero curvilineo suindicato.

IX. *La cubatura di qualunque solido.*

737. Problema. *Determinare il volume d'un solido qualunque.*

Sia $z = F(x, y)$ l'equazione della superficie del solido riferita a coordinate ortogonali. Immaginiamo questo solido tagliato dal piano xy e da quattro piani parallelli due a due ai piani xz e yz; otterremo in questa guisa un solido V (fig. 34), porzione del solido dato, di forma prismatica, il quale avrà tutte le sue facce piane

tranne quella opposta al piano xy che sarà curvilinea. Or facendoci a determinare il volume di siffatto solido prismatico, supporremo che le distanze delle due facce di esso dal piano yz sieno $x_0, x_0+\Delta x$ e che le distanze delle altre due facce dal piano xz sieno $y_0, y_0+\Delta y$.

Fatto Δx ovvero $h = h_0 + h_1 + h_2 + \ldots + h_n$, e Δy ovvero $k = k_0 + k_1 + k_2 \ldots + k_m$ si conducano $n-1$ piani paralleli al piano yz, tali che le loro distanze da questo sieno $x_0 + h_0$, $x_1 + h_1, \ldots x_n$, e quindi $m-1$ piani paralleli al piano xz tali che le loro distanze da questo sieno $y_0 + k_0$, $y_1 + k_1, \ldots . y_n$. Il solido V risulterà diviso in più parti tutte consimili ad esso, cioè non differenti da V che nelle dimensioni; ragione per cui il solido V si dovrà considerare come il limite della somma di tutti i valori che acquista il prodotto $z\Delta y\Delta x$ quando si attribuiscono successivamente a Δx e Δy i suddetti valori, e si pone $z = z_0 + i_0$, $= z_0 + i_0 + i_1$, $= \ldots .$ essendo $i_0, i_1, i_2, \ldots$ gli accrescimenti della funzione z corrispondenti agli accrescimenti di x e y: or questo limite abbiamo veduto essere l'integrale (1), dunque

$$V = \int_{x_0}^{x_0+h} \int_{y_0}^{y_0+k} F(x, y) dx dy.$$

738. Corollario. Elissoide. Sieno a, b, c i tre assi disuguali dell'elissoide; l'equazione della superficie di questo solido, ove si riferisca al suo centro ed agli assi suddetti, sarà

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \text{ di qui } z = \pm \frac{c}{b} \sqrt{\frac{b^2(a^2 - x^2)}{a^2} - y^2}.$$

L'equazione della sezione della superficie col piano xy è

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)};$$

dunque ponendo $$\frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)} = u,$$

il segmento dell'elissoide compreso fra due piani paralleli al piano yz, e corrispondenti alle ascisse x_0, x_1, avrà per valore

$$V = \frac{2c}{b} \int_{x_0}^{x} \int_{-u}^{u} \sqrt{(u^2 - y^2)}\, dy dx.$$

Ora $$\int_{-u}^{u} \sqrt{(u^2 - y^2)}\, dy = \tfrac{1}{2} \pi u^2 = \tfrac{1}{2} \pi \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

dunque $$V = \pi \frac{bc}{a^2} \int_{x_0}^{x} (a^2 - x^2) dx = \pi bc \left[x - x_0 - \frac{1}{3a^2}(x^3 - x_0^3) \right]$$

Ponendo $x_0 = -a, x = a$ avremo $V = \frac{4}{3}\pi abc$; e questa espressione rappresenterà il volume del solido intero.

X. La quadratura di qualunque superficie.

739. Lemma I. *L'area d'una superficie qualunque* A *è uguale all'area della proiezione* P *di essa fatta sopra un piano divisa pel coseno dell'angolo che questo piano forma colla superficie istessa.*

Abbiasi la superficie $BMCN$ (fig. 35); la sua proiezione sia $BM'CN'$; preso il piano di questa proiezione per il piano delle xy e la retta BC che faccia angolo retto colle linee proiettanti per asse delle x, avremo, ponendo $BC = a$,

$$BMC = \int_0^a AMdx, \quad BM'C = \int_0^a AM'dx;$$

ma $AM' = AM\cos\alpha$, α essendo l'angolo che la superficie data fa col piano xy, dunque $BM'C = \cos\alpha\int_0^a AMdx$ e conseguentemente $BMC = \frac{BM'C}{\cos\alpha}$, $BMCN = \frac{BM'CN'}{\cos\alpha}$ ovvero $A = \frac{P}{\cos\alpha}$ come dovevasi dimostrare.

740. Corollario. Dalla geometria analitica sappiamo che $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)}}$, essendo $z = ax + by + c$ l'equazione del piano su cui trovasi la superficie A, dunque

$$A = P\sqrt{(1 + a^2 + b^2)};$$

a e b sono le tangenti trigonometriche degli angoli che fanno cogli assi delle x e delle y le intersezioni del piano su cui trovasi la superficie A coi piani xz e yz.

Se il piano medesimo passasse per un punto (x_0, y_0, z_0), l'eq. di esso sarebbe $z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$.

Ciò posto pel punto (x_0, y_0, z_0) s'immagini condotta una tangente ad una curva descritta su la superficie rappresentata dalla equazione $z = f(x, y)$; le equazioni di siffatta tangente saranno quelle delle tangenti delle proiezioni della curva istessa fatte su i piani xz, yz, cioè (n. 330)

$$x - x_0 = \frac{dx}{dz}(z - z_0), \quad y - y_0 = \frac{dy}{dz}(z - z_0).$$

Ora stante l'equazione $z = f(x, y)$ abbiamo $dz = pdx + qdy$,

p e q essendo le derivate parziali di z l'una presa rapporto ad x, l'altra rapporto ad y; il che significa che fra le due quantità $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ dee sussistere il legame

$$p\frac{dx}{dz}+q\frac{dy}{dz}=1;$$

eliminando le due quantità medesime dalle tre equazioni suddette, l'equazione risultante sarà

$$z-z_0=p(x-x_0)+q(y-y_0);$$

la quale essendo indipendente dalle quantità eliminate $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ rappresenterà il luogo geometrico di tutte le tangenti condotte pel punto (x_0, y_0, z_0) alle curve che passano per esso, e si trovano descritte su la superficie data $z=f(x, y)$. E siccome siffatta equazione è quella d'un piano, si conchiude che tutte le tangenti condotte dal punto (x_0, y_0, z_0) alle curve che passano per questo punto istesso e descritte su la superficie data sono tutte situate sopra uno stesso piano. Questo piano dicesi *piano tangente* della superficie nel punto (x_0, y_0, z_0).

Osservando che rispetto al piano tangente abbiamo $a=p$, $b=q$, concluderemo che l'angolo α formato dal piano istesso con quello delle xy è dato dalla formula

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}.$$

741. Lemma II. *Proiettando sopra un piano* (fig. 36) *una porzione* Mabc $=$ a *di superficie curva tale che le sue dimensioni possano riuscir piccole quanto vuolsi, e prolungando il cilindro proiettante finchè incontri il piano tangente condotto alla superficie curva per un punto del perimetro dell'elemento* a *il rapporto di siffatto elemento alla piccola area* a' *determinata in questa guisa sul piano tangente, avrà per limite l'unità.*

Pel punto di contatto del piano tangente coll'elemento a, si faccia passare un piano; esso taglierà le superficie a ed a_1 secondo due linee che saranno due dimensioni corrispondenti di queste superficie; ora il rapporto di tali linee (una delle quali è la tangente rettilinea dell'altra), come si dimostrerebbe con ragionamento analogo a quello fatto al n. 713, ha per limite

l'unità; d'altra parte due superficie le cui dimensioni corrispondenti abbiano per limite l'unità, debbono avere esse pure per limite l'unità, dunque $\left\{\frac{a}{a_1}=1.\right.$

742. Corollario. Sia a_2 la proiezione comune delle aree a, a_1 sul piano xy, ed α sia l'angolo del piano tangente col piano xy; avremo $a_2=a_1\cos\alpha$ (n. 739), e quindi

$$\left\{\frac{a\cos\alpha}{a_2}=1 \quad \text{ovvero} \quad \left\{\frac{a}{a_2}=\frac{1}{\cos\alpha}\right.\right..$$

Da ciò s'inferisce l'eq. $\frac{a}{a_2}=\frac{1}{\cos\alpha}+i$; i essendo una quantità capace di riuscire sempre più piccola a misura che và impiccolendo l'elemento curvilineo a.

Si trova pure $a=\frac{a_2}{\cos\alpha}+a_2 i$, che è quanto dire

$$a=\frac{a_2}{\cos\alpha}+i=a_2\sqrt{(1+p^2+q^2)}+i.$$

743. Problema. *Determinare l'area d'una superficie qualunque.*

Sia $z=F(x,y)$ l'eq. d'una data superficie. Consideriamo una parte di essa, per es. $MBCD$ (fig. 34), che si trovi intercetta fra quattro piani paralleli due a due ai piani coordinati; facendoci a determinarne l'area supporremo che le distanze dei due piani paralleli al piano delle yz da questo piano istesso sieno respettivamente x_0 ed x_0+h, e che le distanze dei due paralleli al piano delle xz da questo medesimo piano sieno y_0 ed y_0+k.

Ciò posto dividasi la superficie $MBCD$ che diremo A, in n parti mediante $n-1$ piani paralleli al piano yz, e le loro respettive distanze da questo piano sieno $x_0+h_0, x_1+h_1, x_2+h_2$, ec.; supponendo k costante è evidente che l'area A dipenderà dai valori di x_0 e dell'accrescimento h; essa adunque sarà una funzione di x_0+h, e potremo porre

$$A=f(x_0+h)=\textstyle\sum[f(x_0+h_0)+f(x_1+h_1)\,....+f(x_n+h_n)].$$

Quindi passiamo a dividere A in m parti mediante $m-1$ piani paralleli al piano xz, e le loro distanze da questo piano sieno $y_0+k_0, y_1+k_1, y_2+k_2$, ec.; la superficie $MBB'c$ risulterà divisa in m quadrilateri curvilinei, il primo dei quali sarà $Mbcd$;

l'area di questo quadrilatero (supposto h costante) dipenderà dai valori di y_0 e di k_0 e potrà rappresentarsi con $\varphi(y_0+k_0)$; i successivi quadrilateri saranno rappresentati da $\varphi(y_1+k_1), \varphi(y_2+k_2), \ldots$; talchè avremo

$$f(x_0+h_0)=\Sigma[\varphi(y_0+k_0)+(y_1+k_1)\ldots+\varphi(y_m+k_m)];$$

$\varphi(y_0+k_0)$, che è quanto dire il quadrilatero curvilineo *Mbcd*, sappiamo essere espresso da $\frac{h_0 k_0}{\cos\alpha}+i_0$ (n. 741) dove h_0 si ha per quantità costante, e dove $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$ si considera come una funzione di x e y che potremo rappresentare con $\psi(x,y)$, ben inteso che alle variabili x e y si debbono attribuire i valori x_0 e y_0; or siccome la quantità i_0 è forza che nel limite sia nulla, perciò porremo $\frac{k_0}{\cos\alpha}=\psi(x_0,y_0)$, ed otterremo

$$f(x_0+h_0)=\Sigma[h_0(k_0\,\psi(x_0,y_0)+k_1\,\psi(x_0,y_1)\ldots+k_m\,\psi(x_0,y_m))]$$

ossia
$$f(x_0+h_0)=h_0\int_{y^0}^{y_0+k}\psi(x_0,y)dy;$$

quindi
$$f(x_1+h_1)=h_1\int_{y_0}^{y_0+k}\psi(x_1,y)dy,$$

$$f(x_2+h_2)=h_2\int_{y_0}^{y_0+k}\psi(x_2,y)dy,$$

. . . . .

$$f(x_n+h_n)=h_n\int_{y_0}^{y_0k}\psi(x_n,y)dy;$$

sostituendo tali espressioni nella equazione (1), avremo in virtù della equazione (6) n. 691,

$$A=f(x_0+h)=\int_{x_0}^{x_0+h}dx\int_{y_0}^{y_0+k}\psi(x,y)dy,$$

ovvero
$$A=\int_{x_0}^{x_0+h}\int_{y_0}^{y_0+k}\frac{dxdy}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}};$$

nella qual formula dovranno a p e q sostituirsi le loro espressioni tratte dalla equazione $z=f(x,y)$ della superficie data.

Esempio. Sfera. L'equazione della sfera avente l'origine delle coordinate nel centro, sarà

$x^2+y^2+z^2=r^2$, donde avremo $p=-\frac{x}{z}, q=-\frac{y}{z}$;

$$A=\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} dxdy\sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}=\frac{rdxdy}{\sqrt{(r^2-x^2-y^2)}};$$

si osservi che

$$\int\frac{dy}{\sqrt{(r^2-x^2-y^2)}}=\text{ar sen}\frac{y}{\sqrt{(r^2-x^2)}};$$

e siccome i limiti di y sono in questo caso $-\sqrt{r^2-x^2}$ e $+\sqrt{r^2-x^2}$, perciò

$$\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\sqrt{(r^2-x^2-y^2)}}=\pi;$$

passando alla seconda integrazione, la quale si deve estendere da $x=-r$ ad $x=r$, avremo

$$A=\int_{-r}^{+r}\pi r dx=2\pi r^2;$$

questa sarà l'area di un'emisfero; conseguentemente l'espressione dell'area totale della sfera sarà $4\pi r^2$.

XI. *Il calcolo delle variazioni.*

744. Principio. Sia V una funzione delle variabili x, y e dei loro differenziali, cioè sia

$$V=f(x, y, dx, dy, d^2x, d^2y, \ldots),$$

e immaginiamo che questa funzione provenga dalla funzione finita $U=F(x,y)$. Se x, y si cangeranno in $x+\Delta x, y+\Delta y$, la V e la U si cangeranno in $V+\Delta V$, $U+\Delta U$. La U può considerarsi come l'ordinata d'una superficie curva corrispondente alle altre due coordinate x, y; $U+\Delta U$ come l'ordinata d'un altro punto di quella superficie medesima corrispondente alle coordinate $x+\Delta x$, $y+\Delta y$. Questo suppone per altro che non varino le costanti contenute in $U=F(x,y)$, nè che vari il legame di x, y; perchè nel primo caso varierebbero i parametri ovvero le dimensioni delle superficie, nel secondo potrebbe eziandio variare la sua natura; nullameno noi vogliamo por mente anco ai cangiamenti che av-

vengono in V e in U per il variare delle costanti o del legame esistente fra x e y; ed a distinguere sì l'uno che l'altro di questi casi dal precedente designeremo con $x+\delta x, y+\delta y$ gli stati variati (considerati sotto questo punto di vista più generale) di x e di y, e con $V+\delta V$, $U+\delta U$ gli stati variati corrispondenti di V e di U. Le quantità $\Delta x, \Delta y, \Delta V, \Delta U$ si dicono *differenze finite* di x, y, V, U; $\delta x, \delta y, \delta V, \delta U$ si chiamano *variazioni* di x, y, V, U. Dopo ciò è manifesto che *il passare da* x, y, U *ad* $x+\delta x, y+\delta y$, $U+\delta U$ *vuol dire passare da un punto della superficie* $U=F(x,y)$, *ad un punto di un'altra superficie, la quale sarà nota tostochè sarà noto il nuovo legame fra* x *e* y.

745. Corollario. Si vede frattanto che la variazione d'una funzione u si potrà tosto determinare quando si conosceranno le variazioni delle variabili da cui essa dipende; l'operazione sarà quella stessa che si fa per determinare la differenza finita; perocchè avendosi $u=F(x,y,z,...)$ sarà

$$\delta u = F(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, \ldots) - F(x, y, z, \ldots);$$

la diversità fra Δu e δu risulterà dalla sostituzione dei valori di δx, δy, ec. Or $\Delta u = du + \lambda$ (n. 169); dunque supponendo che $\delta x, \delta y, \delta z, \ldots$ sieno per natura loro capaci di convergere indefinitamente verso lo zero avremo $\delta u = du$, purchè però nella espressione di du pongansi $\delta x, \delta y, \delta z, \ldots$ in luogo di $dx, dy, dz, \ldots$

Risulta da ciò che in generale ad ottenere la variazione d'una funzione qualunque V contenente $x, y, z, \ldots dx, dy, dz, \ldots d^2x$, $d^2y, d^2z, \ldots$ bisogna cambiare $x, y, z, \ldots$ in $x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, \ldots$ e sottarre dal risultato la V; nella quale operazione bisognerà considerare δx, δy, δz, ... come funzioni arbitrarie la 1ª di x, la 2ª di y, la 3ª di z, ec. Quando poi non vorremo della differenza δV che i termini nei quali le variazioni non oltrepassano il 1° grado, la variazione potrà ottenersi coi metodi ordinari della differenziazione; cioè differenzieremo la V rapporto ad $x, y, z, \ldots$ e rapporto ai differenziali $dx, dy, \ldots d^2x, d^2y, \ldots$ ec. considerati come altrettante variabili, avendo cura di designare queste ultime differenziazioni colla caratteristica δ.

Perciò posto $V=\varphi(x, y, y', y'', y''', \ldots)$ sarà

$$dV = Mdx + Ndy + Pdy' + Qdy'' + \ldots.,$$

e conseguentemente

$$\delta U = M\delta x + N\delta y + P\delta y' + R\delta y'' + \ldots.,$$

ma $$M=\frac{dV}{dx},\quad N=\frac{dV}{dy},\quad P=\frac{dV}{dy'},\ \ldots\ldots$$

dunque $$\delta V=\frac{dV}{dx}\delta x+\frac{dV}{dy}\delta y+\frac{dV}{dy'}\delta y'+\ldots\ldots$$

dove restano indeterminate le variazioni $\delta x, \delta y, \delta z, \ldots$

746. Lemma. *La variazione del differenziale di V è uguale al differenziale della variazione della funzione istessa.*

Infatti la funzione V variando diventa $V+\delta V$; dunque il suo differenziale dV diventerà $dV+d\delta V$; ciò mostra che la variazione del differenziale dV non è altro che $d\delta V$; dunque

$$\delta dV=d\delta V.$$

747. Problema. *Trovare le variazioni di* $y', y'', y''', \ldots$ *lasciando indeterminate le variazioni* $\delta x, \delta y$ *di* x, y.

Sarà $$\delta y'=\delta\frac{dy}{dx}=\frac{dx\delta dy-dy\delta dx}{dx^2}=\frac{d\delta y-y'd\delta x}{dx},$$

$$\delta y''=\delta\frac{dy'}{dx}=\frac{d\delta y'-y''d\delta x}{dx},$$

$$\delta y'''=\delta\frac{dy''}{dx}=\frac{d\delta y''-y'''d\delta x}{dx},$$

$$\ldots\ldots$$

$$\delta y^{(n)}=\delta\frac{dy^{(n-1)}}{dx}=\frac{d\delta y^{(n-1)}-y^{(n)}d\delta x}{dx}.$$

748. Scolio. Queste variazioni possono mettersi sotto una forma che si presti al calcolo meglio della precedente. Si osservi che $dy=y'dx$; nullameno non potremmo porre $\delta y=y'\delta x$, perchè in questo caso la variazione della y dipenderebbe unicamente dalla variazione della x, e lungi dall'essere una variazione propriamente detta coinciderebbe col differenziale dy; porremo adunque

$$\delta y=y'\delta x+\alpha,$$

dove α indicherà la variazione di y corrispondente ad un dato valore di x.

Sostituendo questo valore di δy nel valore trovato di $\delta y'$, avremo

$$\delta y'=\frac{y'd\delta x+dy'\delta x+d\alpha-y'd\delta x}{dx}=y''\delta x+\frac{d\alpha}{dx};$$

sostituendo questo valore di $\delta y'$ nel trovato valore di $\delta y''$, avremo

$$\delta y''=\frac{dy''d\delta x+y''d\delta x+d\,\frac{d\alpha}{dx}-y''d\delta}{dx}=y'''\delta x+\frac{1}{dx}\,d\,\frac{d\alpha}{dx};$$

ovvero, ove si supponga dx costante, $\delta y''=y'''\delta x+\frac{d^2\alpha}{dx^2}$; e quindi

$$\delta y'''=y^{\text{IV}}\delta x+\frac{d^3\alpha}{dx^3},$$

. . . .

749. Lemma. *La variazione dell' integrale di* U *è uguale all' integrale della variazione delle funzioni istesse.*

Infatti sia $\int U=V$, sarà $\quad dV=U;$

quindi $\quad \delta dV=\delta U,\quad d\delta V=\delta U;$

ed in fine $\quad \delta V=\int\delta U,\quad \delta\int U=\int\delta U.$

750. Problema. *Trovare la variazione dell'integrale* $\int Vdx$ *essendo* $V=\varphi(x,y,y',y'',\ldots)$.

Si osservi che $\quad \delta\int dxV=\int\delta.Vdx$

$$=\int(V\delta dx+dx\delta V)=\int V\delta dx+\int dx\delta V$$

$$=\int Vd\delta x+\int dx\delta V=V\delta x-\int\delta xdV+\int dx\delta V$$

$$=V\delta x+\int(dx\delta V-\delta xdU). \tag{1}$$

Ciò posto sia

$$dV=Ldx+Mdy+Ndy'+Pdy''+Qdy'''+\ldots.$$

sarà $\quad \delta V=L\delta x+M\delta y+N\delta y'+P\delta y''+Q\delta y'''+\ldots.$

e per conseguenza

$$\delta V=L\delta x+M(y'\delta x+\alpha)+N\left(y''\delta x+\frac{d\alpha}{dx}\right)+P\left(y'''\delta x+\frac{d^2\alpha}{dx^2}\right)+Q\left(y^{\text{IV}}\delta x+\frac{d^3\alpha}{dx^3}\right)+\ldots$$

ovvero $\delta V=(L+My'+Ny''+Py'''+Qy^{\text{IV}}+\ldots.)\delta x$

$$+M\alpha+N\frac{d\alpha}{dx}+P\frac{d^2\alpha}{dx^2}+Q\frac{d^3\alpha}{dx^3}+\ldots.$$

quindi $\quad dx\delta V-\delta xdV=(Ldx+My'dx+Ny''dx+\ldots)\delta x$

$$+\left(M\alpha+N\frac{d\alpha}{dx}+P\frac{d^2\alpha}{dx^2}+\ldots.\right)dx-(Ldx+Mdy+Ndy'+\ldots)\delta x;$$

ossia $\quad dx\delta V-\delta xdV=\left(M\alpha+N\frac{d\alpha}{dx}+P\frac{d^2\alpha}{dx^2}+\ldots.\right)dx;$

sostituendo questa espressione nella formula (1), avremo

$$\delta\int Vdx = V\delta x + \int M\alpha dx + \int N\frac{d\alpha}{dx}dx + \int P\frac{d^2\alpha}{dx^2}dx + \int Q\frac{d^3\alpha}{dx^3}dx \ldots \quad (2)$$

Ora integrando per parti sarà

$$\int N\frac{d\alpha}{dx}dx = N\alpha - \int \alpha\frac{dN}{dx}dx. \quad (3)$$

Parimente $\int P\frac{d^2\alpha}{dx^2}dx = P\frac{d\alpha}{dx} - \int\frac{d\alpha}{dx}\frac{dP}{dx}dx$,

ma per la (3) $\int\frac{d\alpha}{dx}\frac{dP}{dx}dx = \frac{dP}{dx}\alpha - \int\alpha\frac{d^2P}{dx^2}dx$,

dunque $\int P\frac{d^2\alpha}{dx^2}dx = P\frac{d\alpha}{dx} - \frac{dP}{dx}\alpha + \int\alpha\frac{d^2P}{dx^2}dx. \quad (4)$

Mediante la integrazione per parti avremo pure

$$\int Q\frac{d^3\alpha}{dx^3}dx = Q\frac{d^2\alpha}{dx^2} - \int\frac{d^2\alpha}{dx^2}\frac{dQ}{dx}dx;$$

ma per la (4) $\int\frac{d^2\alpha}{dx^2}\frac{dQ}{dx}dx = \frac{dQ}{dx}\frac{d\alpha}{dx} - \frac{d^2Q}{dx^2}\alpha + \int\alpha\frac{d^3Q}{dx^3}dx$,

dunque $\int Q\frac{d^3\alpha}{dx^3}dx = Q\frac{d^2\alpha}{dx^2} - \frac{dQ}{dx}\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2}\alpha - \int\alpha\frac{d^3Q}{dx^3}dx.$

Lo stesso può farsi pei susseguenti termini della (2): adunque sostituendo otterremo

$$\begin{aligned}\delta\int Vdx = {} & V\delta x + \int M\alpha dx \\ & + N\alpha - \int\alpha\frac{dN}{dx}dx \\ & + P\frac{d\alpha}{dx} - \frac{dP}{dx}\alpha + \int\alpha\frac{d^2P}{dx^2}dx \\ & + Q\frac{d^2\alpha}{dx^2} - \frac{dQ}{dx}\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2}\alpha - \int\alpha\frac{d^3Q}{dx^3}dx \\ & + \ldots\ldots;\end{aligned}$$

e quindi

$$\delta\int Vdx = V\delta x + \alpha\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots\right)$$
$$+ \frac{d\alpha}{dx}\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \ldots\right)$$
$$+ \frac{d^2\alpha}{dx^2}\left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{d^2S}{dx^2} - \ldots\right)$$
$$\ldots\ldots$$
$$+ \int \alpha dx\left(M - \frac{dN}{dx} + \frac{d^2P}{dx^2} - \frac{d^3Q}{dx^3} + \ldots\right);$$

ma $\alpha = \delta y - y'\delta x$, $\frac{d\alpha}{dx} = \delta y' - y''\delta x$, $\frac{d^2\alpha}{dx^2} = \delta y'' - y'''\delta x, \ldots\ldots$

per conseguenza

$$\delta\int Vdx = V\delta x + (\delta y - y'\delta x)\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots\right)$$
$$+ (\delta y' - y''\delta x)\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \ldots\right)$$
$$+ (\delta y'' - y'''\delta x)\left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{d^2S}{dx^2} - \ldots\right)$$
$$\ldots\ldots$$
$$+ \int \alpha dx\left(M - \frac{dN}{dx} + \frac{d^2P}{dx^2} - \frac{d^3Q}{dx^3} + \ldots\right)$$

ovvero

$$\delta\int Vdx = \delta x\left[V - y'\left(N - \frac{dP}{dx} + \ldots\right) - y''\left(P - \frac{dQ}{dx} + \ldots\right) + \ldots\right]$$
$$+ \delta y\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots\right)$$
$$+ \delta y'\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \ldots\right)$$
$$+ \delta y''\left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{d^2S}{dx^2} - \ldots\right)$$
$$\ldots\ldots$$
$$+ \int \alpha dx\left(M - \frac{dN}{dx} + \frac{d^2P}{dx^2} - \ldots\right).$$

751. Corollario. Prendendo l'integrale dentro i limiti x_0, x_n, e designando con $V_n, y'_n, N_n, P_n, P'_n, Q'_n$, ec. i valori che acquistano le quantità $V, y', N, P, \frac{dP}{dx}, \frac{dQ}{dx}$, ec. quando si pone $x = x_n$, e con $V_0, y'_0, N_0, P_0, P'_0, Q'_0$, ec. i valori che acquistano le quantità medesime quando si pone $x = x_0$, avremo

$$\begin{aligned}\delta\int_{x_0}^{x_n} Vdx = {} & \delta x\,[V_n - y'_n(N_n - P'_n + \ldots) - y''_n(P_n - Q'_n + \ldots) + \ldots] \\ & - \delta x\,[V_0 - y'_0(N_0 - P'_0 + \ldots) + y''_0(P_0 - Q'_0 + \ldots) + \ldots] \\ & + \delta y(N_n - P'_n + Q''_n - \ldots) - \delta y(N_0 - P'_0 + Q''_0 - \ldots) \\ & + \delta y'(P_n - Q'_n + \ldots) - \delta y'(P_0 - Q'_0 + \ldots) \\ & + \delta y''(Q_n - \ldots.) - \delta y''(Q_0 - \ldots) \\ & \ldots\ldots \\ & + \int_{x_0}^{x_n} \alpha dx\left(M - \frac{dN}{dx} + \frac{d^2P}{dx^2} - \ldots\right).\end{aligned}$$

752. Principio II. L'integrale definito sarà un massimo o un minimo secondochè la variazione di esso corrispondente alle variazioni $\delta x, \delta y, \delta y', \ldots$ infinitamente piccole attribuite alle variabili sarà negativa o positiva; sì nel caso in cui piaccia di prendere $\delta x, \delta y, \delta y', \ldots$ tutte positive, come in quello nel quale si prendano tutte negative. Per conseguenza quella parte della variazione dove entrano soltanto le prime potenze di $\delta x, \delta y$ dovrà esser nulla; e come siffatta parte è appunto quella che abbiamo determinata avremo

$$\omega + \int_{x_0}^{x_n} \alpha dx\left(M - \frac{dN}{dx} + \frac{d^2P}{dx^2} - \ldots\right) = 0$$

ω indicando la somma dei termini della variazione posti al di fuori dell'integrale. Questa equazione dee sussistere qualunque sia α, cioè qualunque sia la variazione della y corrispondente ad un medesimo valore della x; dunque il termine integrale della equazione che abbiamo ottenuta dovrà essere uguagliato a zero; per cui avremo

$$\omega = 0,\quad M - \frac{dN}{dx} + \frac{d^2P}{dx^2} - \ldots = 0;$$

di queste eq. la 2ª appartiene a tutti i punti della curva; essa racchiude le quantità $x, y, y', y'', y''' \ldots y^{(n)}$, e integrata farà conoscere il legame che dee sussistere fra x, y acciocchè la condizione

del massimo o del minimo sia soddisfatta; vero è però che l'integrale risultante conterrà tante costanti arbitrarie quante unità saranno nell'ordine massimo delle derivate $y', y'', \ldots y^{(n)}$. Quanto all'altra equazione $\omega = 0$ è a dirsi che se le variazioni δx_0, δy_0, $\delta y'_0, \ldots \delta x_n, \delta y_n, \delta y'_n, \ldots$ saranno arbitrarie, il coefficiente di ciascuna di queste equazioni dovrà essere uguagliato separatamente a zero; perlochè avremo altrettante equazioni cui dovrà soddisfare l'espressione richiesta di y in x quando si attribuiranno ad x i valori estremi x_0, x_n.

753. Scolio I. Se oltre $x, y, y', y'', \ldots$ la funzione V contenesse più altre variabili e le loro derivate $y, z', z'', \ldots, t, t', t'', \ldots$ avremmo

$$\begin{aligned} dV = Ldx + Mdy + Ndy' + Pdy'' + Qdy''' + \ldots \\ M_1dz + N_1dz' + P_1dz'' + Q_1dz''' + \ldots \\ M_2dt + N_2dt' + P_2dt'' + Q_2dt''' + \ldots \\ \ldots \end{aligned}$$

Laonde la variazione $\delta \int_{x_0}^{x_n} Vdx$ si accrescerebbe di tutti i termini provenienti dalle variazioni delle nuove quantità; i quali si otterrebbero ponendo $\delta z = z'\delta x + \alpha_1, \delta t = t'\delta x + \alpha_2, \ldots$ come già ponemmo $\delta y = y'\delta x + \alpha$. Uguagliando la variazione medesima a zero avremo una equazione risolubile come la precedente in più altre, e perchè $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ si stimerebbero indeterminate. e perchè $\delta x_0, \delta y_0, \delta y'_0, \ldots \delta x_n, \ldots \delta z_0, \ldots \delta z_n \ldots$ si riputerebbero funzioni arbitrarie; dunque ponendo

$$M - \frac{dN}{dx} + \frac{d^2P}{dx^2} - \ldots = S,\ M_1 - \frac{dN_1}{dx} + \frac{dP_1}{dx^2} - \ldots = S_1, \ldots$$

avremo
$$\omega + \omega_1 + \omega_2 + \ldots = 0,$$

$$\int_{x_0}^{x_n} (\alpha S dx + \alpha_1 S_1 dx + \alpha_2 S_2 dx + \ldots) = 0,$$

e per conseguenza $S = 0, S_1 = 0, S_2 = 0, \ldots$

754. Scolio II. Se le funzioni y, z dovessero soddisfare ad una equazione $\xi(x, y, z) = 0$, le variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ dovrebbero esse pure soddisfare alla equazione

$$\frac{d\xi}{dx}\delta x + \frac{d\xi}{dy}\delta y + \frac{d\xi}{dz}\delta z = 0; \tag{5}$$

essa ci darebbe δz in funzione di $\delta x, \delta y$, e questo valore posto nella espressione della variazione $\delta\int_{x_0}^{x_n} V dx$ varrà ad eliminare δz ossia l'indeterminata α, sotto il segno $\int$; laonde avremo una equazione di meno per determinare le relazioni tra $x, y, z, \ldots$; ma in luogo di essa avremo l'equazione $\xi(x, y, z) = 0$. Imperocchè la quantità posta sotto il segno $\int$ che dee uguagliarsi a zero è della forma

$$\alpha S + \alpha_1 S_1;$$

inoltre l'eq. (5) quando si faccia $\delta y = y'\delta x + \alpha, \delta z = z'\delta x + \alpha_1$, ci dà

$$\frac{d\xi}{dx}\delta x + \frac{d\xi}{dy}(y'\delta x + \alpha) + \frac{d\xi}{dz}(z'\delta x + \alpha_1) = 0,$$

e perchè $\frac{d\xi}{dx}dx + \frac{d\xi}{dy}dy + \frac{d\xi}{dz}dz = 0$, ricavasi $\frac{d\xi}{dy}\alpha + \frac{d\xi}{dz}\alpha_1 = 0$,

donde si ha $\alpha_1 = -\frac{d\xi}{dy} : \frac{d\xi}{dz}\alpha$, e quindi

$$\alpha S + \alpha_1 S_1 = \alpha S - \frac{\frac{d\xi}{dy}}{\frac{d\xi}{dz}}\alpha S_1;$$

questa quantità dovendo esser nulla qualunque sia α ci dà

$$S - \frac{\frac{d\xi}{dy}}{\frac{d\xi}{dz}} S_1 = 0.$$

Di questa guisa si hanno le due equazioni

$$S\frac{d\xi}{dz} - S_1\frac{d\xi}{dy} = 0, \quad \xi(x, y, z) = 0,$$

in luogo delle due $S = 0, S_1 = 0$.

755. Corollario. Sia l'integrale proposto $\int_{x_0}^{x_n} f(x, y, z, y', z')dx$; distingueremo due casi, cioè che le variabili x, y, z non sieno legate fra loro da alcuna equazione, e in secondo luogo che debbano soddisfare ad una relazione data.

I. Supponiamo che x, y, z non siano legate fra loro da alcuna equazione; le equazioni $S = 0$, $S_1 = 0$ si cangeranno in

$$M - \frac{dN}{dx} = 0, \qquad M_1 - \frac{dN_1}{dx} = 0; \tag{6}$$

queste due equazioni simultanee del 2° ordine integrate che sieno faranno conoscere i valori di y e z in funzione di x e di quattro costanti arbitrarie

$$y = \psi(x, A, B, C, D), \quad z = \varphi(x, A, B, C, D). \tag{7}$$

Inoltre l'equazione $\omega + \omega_1 + \omega_2 + \ldots = 0$ si cangerà in

$$(V - Ny' - N_1 z')\delta x + N\delta y + N_1 \delta z = 0, \tag{8}$$

cui dovranno soddisfare i valori $x = x_0, y = y_0, z = z_0$; ed $x = x_n$, $y = y_n, z = z_n$.

1°. Se uno dei due punti per es. (x_0, y_0, z_0) non dovrà soddisfare ad alcuna condizione, le variazioni $\delta x, \delta y, \delta z$ saranno indipendenti fra loro, i loro coefficienti saranno nulli, per cui avremo tre equazioni

$$f(x, y, z, y', z') = 0, \quad \chi(x, y, z, y', z') = 0, \quad \psi(x, y, z, y', z') = 0,$$

le quali dovranno esser verificate da $x = x_0, y = y_0, z = z_0$.

2° Se questo medesimo limite (x_0, y_0, z_0) dovesse soddisfare ad una equazione data $\xi(x, y, z) = 0$, avremmo

$$\frac{d\xi}{dx}\delta x + \frac{d\xi}{dy}\delta y + \frac{d\xi}{dz}\delta z = 0;$$

eliminando δz per mezzo della (8), l'equazione risultante conterrebbe le due indeterminate $\delta x, \delta y$; uguagliando a zero i loro coefficienti si otterrebbero due equazioni che unite alla data $\xi(x, y, z) = 0$ sarebbero in numero uguale alle precedenti. Se fosser date due equazioni $\xi = 0$, $\xi_1 = 0$, ragioneremmo nello stesso modo.

Ciò posto è facile vedere come possano determinarsi le costanti A, B, C, D e i limiti $(x_0, y_0, z_0), (x_n, y_n, z_n)$. Le equazioni (9) debbono essere soddisfatte da $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ e da $x = x_n$, $y = y_n, z = z_n$. Avremo adunque cinque equazioni relative al limite (x_n, y_n, z_n); tali equazioni saranno adunque sufficienti a determinare i limiti e le costanti.

II. Supponiamo in secondo luogo che x, y, z debbano soddisfare alla equazione $F(x, y, z) = 0$; allora in luogo delle equazioni (6) bisognerà fare uso della eq. $S\frac{dF}{dz} - S_1\frac{dF}{dy} - 0$, la quale si cangia nella seguente

$$\left(M-\frac{dN}{dx}\right)\frac{dF}{dz}-\left(M_1-\frac{dN_1}{dx}\right)\frac{dF}{dy}=0; \tag{9}$$

da cui eliminando z per mezzo della equazione $F(x,y,z)=0$, avremo una relazione fra x e y del 2° ordine. Integrando avremo y in funzione di x e delle stesse costanti. I valori di x_0, y_0, z_0 x_n, y_n, y_n si determineranno come nel caso precedente, osservando che essi debbono soddisfare alla equazione $F(x,y,z)$. Così avremo otto equazioni sufficienti a determinare le quantità x_0, y_0, z_0, x_n, y_n, z_n, A, B.

Esempio. *Trovare la minima distanza fra due punti.*

L'integrale di cui dovremo trovare il minimo valore sarà

$$\int_{x_0}^{x_n}\sqrt{1+y'^2+z'^2}.dx;$$

ed avremo $V=\sqrt{1+y'^2+z'^2}$, $M=\frac{dV}{dy}=0$, $M_1=\frac{dV}{dz}=0$;

$$N=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}},\ N_1=\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}},\ \frac{dN}{dx}=0,\ \frac{dN}{dy}=0;$$

conseguentemente

$$N=C, N_1=C_1, \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=C, \frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=C_1.$$

se queste equazioni si risolvessero rispetto ad y' e z' risulterebbero queste due quantità uguali a due funzioni C e C_1 per conseguenza uguali a due costanti arbitrarie; dunque porremo $y=a$, $z'=a_1$, donde si ha

$$y=ax+b, \qquad z=a_1x+b_1. \tag{10}$$

Da ciò si raccoglie che qualunque sieno i limiti la distanza dovrà essere misurata sopra una linea retta.

L'equazione (4) diventa

$$\delta x+y'\delta y+z'\delta z=0. \tag{11}$$

Ora 1° se il punto (x_0, y_0, z_0) è fisso avremo $\delta x, \delta y, \delta z$ nulle; le coordinate x_0, y_0, z_0 dovranno soddisfare alle equazioni (6) per cui avremo

$$y_0=ax_0+b, \qquad z_0=a_1x_0+b_1.$$

2° Se il punto (x_0, y_0, z_0) dovrà soddisfare alla equazione

$F(x, y, z) = 0$, avremo

$$\frac{dF}{dx}\delta x + \frac{dF}{dy}\delta y + \frac{dF}{dz}\delta z = 0$$

eliminando δz fra questa e la (11) avremo

$$\left(z'\frac{dF}{dx} - \frac{dF}{dz}\right)\delta x + \left(z'\frac{dF}{dy} - y'\frac{dF}{dz}\right)\delta y = 0$$

e quindi $\quad z'\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dz},\ z'\frac{dF}{dg} = y'\frac{dF}{dz},\ \frac{dF}{dy} = y'\frac{dF}{dx};$

ma $y' = a, z' = a_1$, dunque

$$\frac{dF}{dz} = a\frac{dF}{dx}, \quad \frac{dF}{dy} = a\frac{dF}{dx};$$

nelle quali equazioni dovremo fare per altro $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. Queste due equazioni si uniranno alle altre tre $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, $y_0 = ax_0 + b$, $z_0 = a_1 x_0 + b_1$, e così si avranno cinque equazioni fra x_0, y_0, z_0, e le costanti arbitrarie a, b, a_1, b_1.

Dunque per ciascuno dei punti (x_0, y_0, z_0), (x_n, y_n, z_n) sì nel caso in cui sieno liberi, come nel caso in cui sieno costretti a soddisfare ad una o due condizioni, si trovano sempre due eq. fra le quattro costanti a, b, a_1, b_1. Conseguentemente per mezzo delle condizioni relative ai limiti si potranno sempre determinare le costanti arbitrarie.

3° Se la più breve distanza dovesse misurarsi sopra una superficie la cui equazione fosse $F(x, y, z) = 0$, avrebbe luogo in vece delle due equazioni (10), l'equazione (9), ovvero

$$\frac{dN}{dx}\frac{dF}{dz} + \frac{dN_1}{dx}\frac{dF}{dy} = 0;$$

questa equazione del secondo ordine congiunta alla equazione $F(x,y,z) = 0$ darà y e z in funzione di x e due costanti arbitrarie.

APPENDICE I.

Le differenze finite.

1. Definizione. Sia $y = Fx$; supponiamo che la x cresca successivamente della quantità costante h; i valori che acquisterà la funzione saranno

$$Fx, F(x+h), F(x+2h), \ldots F(x+nh)$$

questi valori si diranno *stati successivi della funzione* Fx; Fx sarà il *primo stato*, $F(x+h)$ il *secondo stato*, $F(x+2h)$ il *terzo stato* $F(x+3h)$ il *quarto stato*, ec. $x, x+h, x+2h, x+3h$ ec. saranno per conseguenza i successivi *stati della variabile.*

2. Principio I. Indicando con $x, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ i diversi stati della variabile, e con $y, y_1, y_2, \ldots y_n$ i corrispondenti stati della funzione, avremo

$$\begin{aligned} y_1 - y &= Fx_1 - Fx = \Delta y, \\ y_2 - y_1 &= Fx_2 - Fx_1 = \Delta y_1, \\ y_3 - y_2 &= Fx_3 - Fx_2 = \Delta y_2, \\ &\cdots\cdots \end{aligned} \tag{1}$$

in generale $\quad y_n - y_{n-1} = Fx_n - Fx_{n-1} = \Delta y_{n-1}$;

$\Delta y, \Delta y_1, \Delta y_2$, ec. indicheranno ordinatamente le differenze fra y_1 e y, fra y_2 e y_1, fra y_3 e y_2, ec. cioè gl'incrementi successivi della funz. y. Risulta frattanto che l'n^{mo} stato della funz. sarà espresso da

$$y_n = y + \Delta y + \Delta y_1 + \Delta y_2 \ldots + \Delta y_{n-1}. \tag{2}$$

3. Scolio I. Siccome l'incremento h è una quantità costante, sarà Δy una funzione di x, e di questa funzione potremo determinare la differenza in quella guisa che si determina la differenza di Fx. Or la differenza di Δy dovrà indicarsi con $\Delta\Delta y$; così $\Delta\Delta\Delta y$ indicherà la differenza di $\Delta\Delta y$; $\Delta\Delta\Delta\Delta y$ indicherà la differenza di $\Delta\Delta\Delta y$, ec. Ad esser più brevi, siffatte differenze si scriveranno in questo modo

$$\Delta y, \Delta^2 y, \Delta^3 y, \ldots \Delta^n y;$$

e Δy si dirà differenza del 1° ordine di y, $\Delta^2 y$ differenza del 2° or-

dine di y, ec. $\Delta^n y$ si dirà la differenza del n^{mo} ordine; bene si vede che *la differenza di un'ordine* n *qualunque sarà la differenza della differenza dell'ordine* n — 1, *cioè dell'ordine inferiore d'una unità;* il qual principio può esprimersi così

$$\Delta^n y = \Delta\Delta^{n-1} y. \tag{3}$$

4. Scolio II. Nella equazione (2), y_n è espresso per le differenze del 1° ordine dei successivi stati della funzione; or vediamo come y_n possa esprimersi per le differenze successive di y. Porremo a tale oggetto i due lemmi seguenti.

5. Lemma I. *La differenza del prodotto d'una costante per una funzione è uguale al prodotto della costante per la differenza della funzione.*

Sia $y = A\varphi x$, dove A si suppone costante; sarà

$$\Delta y = A\varphi(x+h) - A\varphi x = A[\varphi(x+h) - \varphi x] = A\Delta\varphi x;$$

e quindi $\Delta^2 y = A\Delta^2 x$, $\Delta^3 y = A\Delta^3\varphi x, \ldots\ldots \Delta^n y = A\Delta^n\varphi x$.

6. Lemma II. *La differenza n^{ma} d'un polinomio è la somma delle differenze n^{mo} de'suoi termini.*

Sia $y = \varphi x + \psi x + \chi x + \ldots\ldots$; avremo

$$\Delta y = \varphi(x+h) + \psi(x+h) + \chi(x+h) \ldots - \varphi x - \psi x - \chi x - \ldots = \Delta\varphi x + \Delta\psi x + \Delta\chi x + \ldots$$

quindi
$$\Delta^2 y = \Delta^2\varphi x + \Delta^2\psi x + \Delta^2\chi x + \ldots$$
$$\Delta^3 y - \Delta^3\varphi x + \Delta^3\psi x + \Delta^3\chi x + \ldots\ldots$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\Delta^n y = \Delta^n\varphi x + \Delta^n\psi x + \Delta^n\chi x + \ldots.$$

7. Principio II. Dalle equazioni (1) avremo frattanto

$$y_1 = y + \Delta y,\ y_2 = y_1 + \Delta y_1,\ y_3 = y_2 + \Delta y_2, \ldots\ y_n = y_{n-1} + \Delta y_{n-1};$$

e quindi

$$y_2 = y + \Delta y + \Delta(y + \Delta y) = y + 2\Delta y + \Delta^2 y,$$
$$y_3 = y + 2\Delta y + \Delta^2 y + \Delta(y + 2\Delta y + \Delta^2 y) = y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y,$$
$$y_4 = y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y + \Delta(y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y)$$
$$= y + 4\Delta y + 6\Delta^2 y + 4\Delta^3 y + \Delta^4 y,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$y_n = y + \frac{n}{1}\Delta y + \frac{n(n-1)}{1.2} + \ldots\ldots + \frac{n}{1}\Delta^{n-1} y + \Delta^n y. \tag{4}$$

Infatti supponiamo che fino ad un certo stato y_n siasi la legge

verificata mediante il calcolo; lo stato susseguente y_{n-1} sarà

$$y_{n+1}=y_n+\Delta y_n;$$

sostituendo in questa equazione le espressioni di y_n e di Δy_n che si hanno dalla equazione (4) avremo quella stessa espressione di y_{n+1} che potrebbe dedursi dalla equazione (4) medesima, ponendo $n+1$ in luogo di n; dunque l'equazione (4) è vera anche nel caso, in cui n si muti in $n+1$, e per conseguenza vera quando n si muti in $n+2$, in $n+3$, in $n+4$,.... in $n+p$, che è quanto dire vera per qualunque stato della funzione. L'equazione (4) serve adunque ad esprimere uno stato qualunque della funzione y mediante le sue successive differenze; essa può mettersi altresì sotto la forma seguente;

$$F(x+nh)=Fx+\frac{n}{1}\Delta Fx+\frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 Fx....+\frac{n}{1}\Delta^{n-1}Fx+\Delta^n Fx. \quad (5)$$

8. Principio III. Dalle equazioni (1) si ha $\Delta y=y_1-y$; quindi $\Delta^2 y=\Delta y_1-\Delta y$; il che vuol dire

$$\Delta^2 y=(y_2-y_1)-(y_1-y)=y_2-2y_1+y;$$

laonde sarà $\Delta^3 y=\Delta y_2-2\Delta y_1+\Delta y$; il che vuol dire

$$\Delta^3 y=(y_3-y_2)-2(y_2-y_1)+(y_1-y)=y_3-3y_2+3y_1-y;$$

e così di seguito; adunque avremo in generale

$$\Delta^n y=y_n-\frac{n}{1}y_{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}y_{n-2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}y_{n-3}...\pm\frac{n}{1}y_1\pm y. \quad (6)$$

Infatti supponiamo che fino ad una certa differenza, per esempio fino alla differenza $\Delta^n y$ sia stata la legge dei termini verificata col calcolo; la differenza susseguente $\Delta^{n+1}y$ sarà

$$\Delta\Delta^n y=\Delta^{n+1}y=\Delta y_n-\frac{n}{1}\Delta y_{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}\Delta y_{n-2}....\pm\Delta y;$$

sostituendo in questa equazione le espressioni di Δy_n, Δy_{n+1},... Δy_2, Δy_1, Δy date dalle equazioni (1) avremo

$$\Delta^{n+1}y=(y_{n+1}-y_n)-\frac{n}{1}(y_n-y_{n-1})+\frac{n(n-1)}{1.2}(y_{n-1}-y_{n-2})...\pm(y_1-y);$$

e facendo le opportune riduzioni troveremo quella medesima espressione di $\Delta^{n+1}y$, che si può ricavare dalla (6) ponendo $n+1$ in luogo di n; dunque l'equazione (6) è vera anche nel caso in

cui n si cangi in $n+1$, e per conseguenza vera per qualunque ordine di differenze.

L'equazione (6) serve in questa guisa ad esprimere una differenza di qualunque ordine della funzione mediante i suoi successivi stati; tale equazione può mettersi altresì sotto la forma seguente

$$\Delta^n Fx = F(x+nh) - \frac{n}{1}F(x+(n-1)h) + \frac{n(n-1)}{1.2}F(x+(n-2)h) - \ldots \mp \frac{n}{1}F(x+h) \pm Fx. \quad (7)$$

9. Scolio I. Questa equazione consegue immediatamente alla espressione della 1ª differenza

$$\Delta\, Fx = F(x+h) - Fx;$$

infatti h essendo l'incremento costante della x si ha

$$\Delta^2 Fx = \Delta\Delta Fx = F(x+2h) - F(x+h) - [F(x+h) - Fx]$$
$$= F(x+2h) - 2F(x+h) + Fx\,;$$
$$\Delta^3 Fx = \Delta\Delta^2 Fx = F(x+3h) - 2F(x+2h) + F(x+h) - [F(x+2h) - 2F(x+h) + Fx];$$
$$= F(x+3h) - 3F(x+2h) + 3F(x+h) + Fx,$$

e così di seguito; cioè continuando di questa guisa verremo a stabilire l'equazione (7).

10. Scolio II. Le equazioni (4) e (6) possono mettersi sotto la seguente forma simbolica

$$y_n = (1+\Delta)^n y, \qquad (8)$$
$$\Delta^n y = (y-1)^n; \qquad (9)$$

perchè fatto lo sviluppo di $(1+\Delta)^n$ si considerino gli esponenti di Δ come rappresentanti gl'indici delle successive differenze di y, e fatto lo sviluppo di $(y-1)^n$ gli esponenti di y si scrivano al di sotto di questa lettera per modo che vengano a rappresentare gl'indici dei diversi stati della funzione.

11. Definizione II. Una funzione Fx si dirà *integrale* d'altra funzione φx allorquando questa sarà la differenza finita della prima.

12. Scolio I. Secondo questa definizione *integrare* vuol dire trovare una funzione di cui un'altra funzione data sia la differenza finita. I metodi che si usano ad ottenere gl'integrali delle differenze finite si comprendono tutti sotto il nome di *calcolo inverso delle differenze;* dicendosi perciò *calcolo diretto* quello che mira a trovare la differenza d'una funzione data.

13. Scolio II. In quella guisa che si usa il segno $\int$ ad indicare una somma di quantità differenziali, ossia un integrale propriamente detto, così si usa il segno Σ per indicare una somma propriamente detta, ossia la funzione di cui quella che trovasi sotto siffatta caratteristica è la differenza finita.

14. Principio. Supponiamo che Fx sia l'integrale di fx; sarà fx la differenza finita di Fx; per cui avremo

$$\Sigma fx = Fx, \quad fx = \Delta Fx;$$

sostituendo ΔFx ad fx, la prima di queste equazioni diverrà

$$\Sigma\Delta Fx = Fx;$$

dunque *l'integrazione Σ d'una funzione preceduta dalla caratteristica Δ si farà sopprimendo questa caratteristica.*

Il che vuol dire che le caratterische Σ e Δ si elidono vicendevolmente in quella guisa che si elidono le due caratteristiche $\int$ e d.

15. Lemma I. *L'integrale Σ del prodotto d'una costante per una funzione è uguale al prodotto della costante per l'integrale Σ della funzione.*

Perocchè essendo $\Delta.A\varphi x = A\Delta\varphi x$, sarà

$$\Sigma A\Delta\varphi x = A\varphi x = A\Sigma\Delta\varphi x.$$

16. Scolio I. Si avverta che essendo $\Delta[a + \varphi x] = \Delta\varphi x$, sarà

$$\Sigma\Delta\varphi x = a + \varphi x;$$

donde risulta che all'integrale Σ d'una funzione dovremo sempre aggiungere una costante, la quale rappresenterà tutti quei termini della funzione primitiva che hanno dovuto sparire prendendone la differenza.

17. Scolio II. La differenza finita d'una costante è nulla.

18. Lemma II. *L'integrale Σ d'un polinomio è la somma degli integrali Σ de' suoi termini.*

Perocchè essendo

$$\Delta(\varphi x + \psi x + \chi x + \ldots) = \Delta\varphi x + \Delta\psi x + \Delta\chi x + \ldots$$

sarà $\quad \varphi x + \psi x + \chi x + \ldots = \Sigma(\Delta\varphi x + \Delta\psi x + \Delta\chi x + \ldots);$

ma $\quad \varphi x + \psi x + \chi x + \ldots = \Sigma\Delta\varphi x + \Sigma\Delta\psi x + \Sigma\Delta\chi x + \ldots$

dunque $\Sigma(\Delta\varphi x + \Delta\psi x + \Delta\chi x + \ldots) = \Sigma\Delta\varphi x + \Sigma\Delta\psi x + \Sigma\Delta\chi x + \ldots$

19. Scolio. In virtù di questo lemma l'equazione (2) darà

$$\Sigma y_n = \Sigma y_0 + y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}; \tag{10}$$

ovvero

$$\Sigma Fx_n = \Sigma Fx_0 + Fx_0 + Fx_1 + Fx_2 + \dots + Fx_{n-1}; \tag{11}$$

dove Σy_0 ovvero ΣFx_0 esprimerà la costante arbitraria cui dee far luogo l'integrazione.

Volendo usare rispetto agli integrali Σ il medesimo modo di scrittura che già usammo rispetto agli integrali definiti [n. 490 (7)] dovremo porre

$$\Sigma Fx_n - \Sigma Fx_0 = \Sigma_{x_0}^{x_n} Fx,$$

e quindi

$$\Sigma_{x_0}^{x_n} Fx = Fx_0 + Fx_1 + Fx_2 \dots + Fx_{n-1}. \tag{12}$$

Talvolta la caratteristica

$$\Sigma_{x_0}^{x_n} Fx$$

si usa ad esprimere la somma dei valori di Fx corrispondenti a tutti i valori della variabile x da x_0 ad x_n inclusivamente; la formula (7) dimostra per altro che ove si voglia far servire il segno Σ ad indicar l'integrale d'una differenza finita è d'uopo escludere da siffatta somma l'ultimo termine Fx_n. Nel caso contrario all'oggetto di togliere ogni ambiguità sostituiremo al segno Σ il segno S; diguisachè sarà

$$\mathrm{S}_{x_0}^{x_n} Fx = Fx_0 + Fx_1 + Fx_2 \dots + Fx_n. \tag{13}$$

20. L'integrazione Σ può ripetersi indefinitamente come si ripete l'operazione inversa indicata dal segno Δ; in virtù della formula (10) sarà

$$\Sigma\Sigma y_n = \Sigma^2 y_n = \Sigma^2 y_0 + \Sigma y_0 + \Sigma y_1 \dots + \Sigma y_{n-1},$$
$$\Sigma\Sigma^2 y_n = \Sigma^3 y_n = \Sigma^3 y_0 + \Sigma^2 y_0 + \Sigma^2 y_1 \dots + \Sigma^2 y_{n-1},$$

. . . . .

Or siccome $\Sigma y_1, \Sigma y_2, \Sigma y_3$, ec. in virtù della formula (10) risultano espresse in funzione di Σy_0, perciò è manifesto che l'espressione di $\Sigma^2 y_n$ racchiude due costanti arbitrarie cioè $\Sigma^2 y_0$ e Σy_0; l'espressione di $\Sigma^3 y_n$ racchiude tre costanti arbitrarie $\Sigma^3 y_0, \Sigma^2 y_0$,

Σy; ec. dunque in generale il valore dell'*integrale indefinito* $\Sigma^m y_n$ dipenderà da m costanti arbitrarie.

21. Scolio. Or ci faremo a determinare le differenze delle più semplici funzioni algebriche e trascendenti.

1° Sia $y = fx$ una funzione intera e razionale di x: questa funzione si comporrà di termini della forma ax^m, a indicando una quantità costante ed m un numero intero e positivo; ciò mostra che la ricerca della differenza d'una funzione siffatta si riduce a quella della funzione semplice x^m. Poniamo adunque $y_0 = x^m$, $y_1 = (x + \Delta x)^m$, ec.; per la formula newtoniana del binomio avremo

$$\Delta y_0 = \Delta . x^m = mx^{m-1}\Delta x + m\frac{m-1}{2}x^{m-2}\Delta x^2 + \ldots \quad (14)$$

e quindi

$$\Delta y_1 = m(x + \Delta x)^{m-1}\Delta x + m\frac{m-1}{2}(x + \Delta x)^{m-2}\Delta x^2 + \ldots;$$

laonde risulterà

$$\Delta^2 y_0 = \Delta^2 . x^m = m(m-1)x^{m-2}\Delta x^2 + \ldots.$$

Nello stesso modo si troverebbe

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^3 . x^m = m(m-1)(m-2)x^{m-3}\Delta x^3 + \ldots;$$

ed in generale

$$\Delta^n . x^m = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}\Delta x^n + \ldots$$

Da ciò si vede ancora che

$$\Delta^m . x^m = m(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1.\Delta x^m;$$

e siccome questa differenza è costante è forza che le differenze superiori sieno nulle. Dunque *l'n^{ma} differenza di qualsivoglia funzione intera razionale del grado* m *è costante e le differenze superiori son nulle.*

2° Sia $y = a^x$, avremo

$$\Delta a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1), \quad (15)$$

$$\Delta^2 a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)^2, \ldots . \ \Delta^n a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)^n.$$

3° Per le note formule della trigonometria avremo poi

$$\Delta \operatorname{sen} x = \quad 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\Delta x . \cos(x + \tfrac{1}{2}\Delta x) \quad (16)$$

$$\Delta \cos x = -2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\Delta x . \operatorname{sen}(x + \tfrac{1}{2}\Delta x); \quad (17)$$

donde s'inferisce che

$$\Delta^2 \operatorname{sen} x = -4 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\Delta x . \operatorname{sen}(x + \tfrac{1}{2}\Delta x),$$

$$\Delta^2 \cos x = -4 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\Delta x . \cos(x + \Delta x);$$

ed in generale

$$\Delta^{2n} \operatorname{sen} x = \pm 2^{2n} \operatorname{sen}^{2n} \tfrac{1}{2}\Delta x . \operatorname{sen}(x + n\Delta x),$$

$$\Delta^{2n} \cos x = \pm 2^{2n} \operatorname{sen}^{2n} \tfrac{1}{2}\Delta x . \cos(x + n\Delta x),$$

$$\Delta^{2n+1} \operatorname{sen} x = \pm 2^{2n+1} \operatorname{sen}^{2n+1} \tfrac{1}{2}\Delta x . \cos\left(x + \frac{2n+1}{2}\Delta x\right),$$

$$\Delta^{2n+1} \cos x = \pm 2^{2n+1} \operatorname{sen}^{2n+1} \tfrac{1}{2}\Delta x . \operatorname{sen}\left(x + \frac{2n+1}{2}\Delta x\right),$$

dove avrà luogo il segno superiore o il segno inferiore, secondochè n sarà pari o dispari.

22. Scolio. Queste formule giovano poi a stabilirne altrettante rispetto agli integrali Σ. Restringendoci per brevità alla funzione x^m, è facile vedere che la formula (14), ove si sostituisca $m+1$ ad m, ci dà

$$x^{m+1} = (m+1)\Sigma . x^m \Delta x + \frac{(m+1)m}{1.2}\Sigma . x^{m-1}\Delta x^2$$
$$+ \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}\Sigma . x^{m-2}\Delta x^3 + \dots$$

e quindi

$$\Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)\Delta x} - \left[\frac{m\Delta x}{1.2}\Sigma x^{m-1} + \frac{m(m-1)\Delta x^2}{1.2.3}\Sigma x^{m-2} + \dots\right]$$

Facendo successivamente $m = 0, = 1, = 2, \dots$ si trova

$$\Sigma x^0 = \frac{x}{\Delta x},$$

$$\Sigma x^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{\Delta x} - \frac{1}{2}x,$$

$$\Sigma x^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{\Delta x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2.3}x\Delta x,$$

$$\Sigma x^3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{\Delta x} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2.2}x^2\Delta x,$$

$$\Sigma x^4 = \frac{1}{5} \cdot \frac{x^5}{\Delta x} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3\Delta x - \frac{1}{5.6}x\Delta x^3,$$

$$\Sigma x^5 = \frac{1}{6} \cdot \frac{x^6}{\Delta x} - \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{2.6}x^4\Delta x - \frac{1}{2.6}x^2\Delta x^3,$$

. . . . .

per mezzo di queste formule potrà sempre aversi l'integrale Σ di qualunque funzione algebrica razionale e intera.

Se la funzione di cui vuolsi l'integrale Σ fosse una funzione composta, dovremmo innanzi tutto procurare di risolverla in funzioni semplici, e far cadere l'operazione su queste. Se fosse un prodotto di più fattori dovremmo fare la moltiplicazione, come si vede nel seguente esempio.

Sia $z = (x + a)(x + b)(x + c)$; sviluppando avremo

$$z = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abcx^0,$$

e integrando

$$\Sigma z = \Sigma x^3 + (a + b + c)\Sigma x^2 + (ab + ac + bc)\Sigma x + abc\Sigma x^0;$$

sicchè resterà solo che si sostituiscano i valori già trovati di $\Sigma x^0, \Sigma x^1, \Sigma x^2, \Sigma x^3$.

V'hanno per altro dei casi nei quali l'integrazione Σ d'un prodotto può farsi senza effettuare la moltiplicazione; ed uno di tali casi si è appunto il seguente, in cui i fattori formano una progressione aritmetica.

Sia $z = x(x + h)(x + 2h) \ldots .(x + mh)$, avremo

$$\Delta z = (x+h)(x+2h)\ldots(x+(m+1)h) - x(x+h)(x+2h)\ldots(x+mh)$$
$$= (x + h)(x + 2h)\ldots(x + mh)(m + 1)h;$$

e conseguentemente

$$\frac{\Delta z}{(m+1)h} = (x + h)(x + 2h)\ldots(x + mh).$$

Ora integrando risulterà

$$\Sigma[(x+h)(x+2h)\ldots(x + mh)] = \frac{x(x + h)(x + 2h)\ldots(x + mh)}{(m + 1)h},$$

ovvero sostituendo $x - h$ ad x ed $m + 1$ ad m,

$$\Sigma x(x+h)(x+2h)\ldots(x+mh) = \frac{(x-h)x(x+h)(x+2h)\ldots(x+mh)}{(m+2)h}. \quad (9)$$

Sia $z = (nx+a)(nx + a+nh)(nx+ a + 2nh)\ldots.(nx+a+mnh)$

ad aver l'integrale ci potremo servire della formula precedente; basterà sostituire $nx + a$ ad x, ed nh ad h.

Risulta frattanto che in siffatti casi l'integrale è uguale alla differenza moltiplicata pel fattore che in ordine alla legge pre-

cederebbe il primo della differenza, e divisa pel numero dei fattori che viene ad aver l'integrale e per h.

Esempio. Sia $z = x(x+h)\,(x+2h)\,(x+3h)$; l'indicata regola dà

$$\Sigma z = \frac{(x-h)\,x\,(x+h)(x+2h)(x+3h)}{5h}.$$

Passando alle funzioni fratte razionali, prenderemo a determinare l'integrale della frazione $\dfrac{A}{x+a}$.

Si osservi che $$\Delta \frac{A}{x+a} = \frac{A}{x+a+\Delta x} - \frac{A}{x+a},$$

integrando e sostituendo h a Δx avremo

$$\frac{A}{x+a} = \Sigma \left\{ \frac{A}{x+a+h} - \frac{A}{x-a} \right\} = \Sigma \frac{A}{x+a+h} - \Sigma \frac{A}{x+a};$$

quindi $$\Sigma \frac{A}{x+a} = \Sigma \frac{A}{x+a+h} - \frac{A}{x+a}.$$

Esempio. Abbiasi la frazione $z = \dfrac{3x+2h}{x(x+h)(x+2h)}$;

risolvendola in parti, avremo

$$z = \frac{1}{hx} + \frac{1}{h(x+h)} - \frac{2}{h(x+2h)};$$

quindi $$\Sigma z = \frac{1}{h}\Sigma\frac{1}{x} + \frac{1}{h}\Sigma\frac{1}{x+h} - \frac{2}{h}\Sigma\frac{1}{x+2h};$$

or facendo nella formula precedente $A = 1,\ a = 0$ si trova

$$\Sigma \frac{1}{x} = \Sigma \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x};$$

sostituendo questo valore, risulterà

$$\Sigma z = \frac{2}{h}\Sigma \left\{ \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x+2h} \right\} - \frac{1}{hx}$$
$$= -\frac{2}{h}\Sigma\Delta\frac{1}{x+h} - \frac{1}{hx} = -\frac{2}{h(x+h} - \frac{1}{hx} + C.$$

Venghiamo a dire delle funzioni trascendenti. La formula (16) dà $$\cos\left(x+\tfrac{1}{2}h\right) = \frac{\Delta \operatorname{sen} x}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}h}$$

e sostituendo $x-\frac{1}{2}h$ ad x, $\cos x=\dfrac{\Delta \operatorname{sen}(x-\frac{1}{2}h)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}h}$;

quindi $$\Sigma \cos x=\frac{\operatorname{sen}(x-\frac{1}{2}h)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}h)}+C.$$

Dalla (17) si ha $\operatorname{sen}(x+\frac{1}{2}h)=-\dfrac{\Delta\cos x}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}h)}$,

e sostituendo $x-\frac{1}{2}h$ ad x, $\operatorname{sen} x=-\dfrac{\Delta\cos(x-\frac{1}{2}h)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}h)}$;

quindi $$\Sigma \operatorname{sen} x=-\frac{\cos(x-\frac{1}{2}h)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}h}+C.$$

Or si osservi che $\Delta \mathrm{l}x=\mathrm{l}\left(1+\dfrac{h}{x}\right)$;

facendo $1+\dfrac{h}{x}=y$, otterremo $x=\dfrac{h}{y-1}$, e quindi

$$\Delta \mathrm{l}\left(\frac{h}{y-1}\right)=\mathrm{l}y,\quad \Sigma \mathrm{l}y=\mathrm{l}\frac{h}{y-1};$$

ovvero, mutando y in x, $\Sigma \mathrm{l}x=\mathrm{l}\dfrac{h}{x-1}$.

Finalmente osservando che dalla formula (15) si ha

$$a^x=\frac{\Delta a^x}{a^h-1},$$

avremo $$\Sigma a^x=\frac{a^x}{a^h-1}+C.$$

Agevole riesce pure la integrazione della funzione a^xy, quando abbiasi $\quad y=b+cx+ex^2+fx^3+\ldots.$

cioè quando y sia una funzione intera di x. Infatti poniamo

$$\Sigma.a^x(b+cx+ex^2+\ldots)=a^x(A+Bx+Cx^2+\ldots,$$

prendendo la differenza di ambedue i membri avremo

$$\begin{aligned}a^x(b+cx+ex^2+\ldots)&=a^{x+h}(A+B(x+h)+C(x+h)^2+\ldots)\\&\quad-a^x(A+Bx+Cx^2+\ldots)\\&=a^x[Aa^h+Ba^hx+Ba^hh+Ca^hx^2+2Ca^hhx+Ca^hh^2\ldots-A-Bx-Cx^2\ldots]\\&=a^x[A(a^h-1)+B(a^h-1)x+C(a^h-1)x^2+\ldots\\&\quad+Ba^hh+Ca^hh^2+\ldots+2Ca^hhx+\ldots];\end{aligned}$$

ed uguagliando i coeff. delle medesime potenze della x verrà

$$b = A(a^h - 1) + Ba^h h + Ca^h h^2 + \dots$$
$$c = B(a^h - 1) + 2Ca^h h + \dots$$
$$e = C(a^h - 1) + \dots$$
$$\dots\dots$$

23. Scolio. Ora scendendo a mostrare alcuni usi delle formule suesposte diremo in prima di quelle attinenti alle differenze, e mostreremo come la formula (4) giovi a determinare il termine generale d'una serie qualunque di numeri figurati. Si scrivano perciò i numeri figurati del 1° ordine, del 2°, del 3°, del 4°, ec. nel modo che segue;

1° ordine	1	1	1	1	1	....
2° ordine	1	2	3	4	5	....
3° ordine	1	3	6	10	15	....
4° ordine	1	4	10	20	35	....
5° ordine	1	5	15	35	70	....

.....

la legge della formazione di tali numeri consiste in questo, che uno qualunque di essi si ottiene aggiungendo a quello da cui è preceduto, quello che nella fila precedente gli sta al di sopra.

Ora i termini d'un ordine qualunque si possono considerare come i valori $y_0, y_1, y_2, \dots$ che acquista successivamente una funzione y pei valori attribuiti di mano in mano alla variabile, y_{n-1} rappresenterà il termine generale cioè il termine n^mo^ della serie.

I termini generali del primo ordine e del secondo sono evidentemente $n^0 = 1$, ed n.

Per trovare l'espressione del termine generale de'numeri del terzo ordine si cerchino le loro differenze; vedremo che le differenze prime sono $2, 3, 4, 5, \dots$; le seconde $1, 1, 1, \dots$; le quarte e le ulteriori nulle. Sicchè sarà $y_0 = 1$, $\Delta y_0 = 2$, $\Delta^2 y_0 = 1$, $\Delta^3 y_0 = 0$; sostituendo questi valori nella formula (4) ed avvertendo di cambiare n in $n - 1$, avremo

$$y_{n-1} = \frac{n(n+1)}{1.2}.$$

Quanto ai numeri del quarto ordine si trova che le differenze

prime sono 3, 6, 10, 15....; le seconde 3, 4, 5,...; le terze 1, 1, 1 ...; le quarte e le ulteriori nulle. Perciò facendo $y_0 = 1$, $\Delta y_0 = 3$, $\Delta^2 y_0 = 3$, $\Delta^3 y_0 = 1$, $\Delta^4 y_0 = 0$; avremo

$$y_{n-1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}.$$

Venendo ai numeri del quinto ordine vedremo che le diff. prime sono 4, 10, 20, 35...; le seconde 6, 10, 15...; le terze 4, 5...; le quarte 1, 1, 1...; le quinte e le ulteriori zero. Cosicchè sarà $y_0 = 1$, $\Delta y_0 = 3$, $\Delta^2 y_0 = 6$, $\Delta^3 y_0 = 4$, $\Delta^4 y_0 = 1$, $\Delta^5 y_0 = 0$; e conseguentemente

$$y_{n-1} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}.$$

Dunque il termine generale dell'ordine p sarà rappresentato dalla formula

$$y_{n-1} = n.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}\ldots\frac{n+p-2}{p-1}.$$

Come il calcolo diretto dalle differenze serve a determinare il *termine generale* d'una serie, così il calcolo inverso serve a determinare il *termine sommatorio* cioè la somma della serie sino ad un termine qualunque di essa.

Secondo ciò che dicemmo al n. 19 designeremo con S_0^n la somma di $n+1$ termini della serie di cui y_n è il termine che ne ha n avanti di se; ragione per cui avremo

$$S_0^n y_n = \Sigma_0^n y_n + y_n \quad \text{ovvero} \quad S_0^n y_n = \Sigma_0^{n+1} y_n. \qquad (19)$$

Ciò posto si vedrà che le formule mediante le quali si ottengono gli integrali Σx, Σx^2, Σx^3, ... (n. 22) fatto $\Delta x = 1$, e presi gli integrali medesimi ne' limiti $x = 1$, $x = n$, danno

$$S_1^n.x = 1 + 2 + 3 \ldots + n = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n,$$

$$S_1^n.x^2 = 1 + 2^2 + 3^2 \ldots + n^2 = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2.3} n,$$

$$S_1^n.x^3 = 1 + 2^3 + 3^3 \ldots + n^3 = \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{2.2} n^2,$$

. . . . .

Le serie de'numeri figurati cominciano dall'unità e i loro termini generali sono respettivamente

$$\frac{n}{1}, \frac{n(n+1)}{1.2}, \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}, \text{ ec.}$$

or la formula (18) n. 22 ci dà

$$\Sigma n = \frac{(n-1)n}{2},$$

$$\Sigma n(n+1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3},$$

$$\Sigma n(n+1)(n+2) = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4},$$

$$\cdots\cdots$$

conseguentemente

$$\Sigma_0^{n+1} n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\Sigma_0^{n+1} n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3},$$

$$\Sigma_0^{n+1} n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4},$$

$$\cdots\cdots$$

e da ciò s'inferiscono in virtù della (19) le seguenti formule

$$1+2+3\ldots+n = \frac{n(n+1)}{1.2},$$

$$1+3+6\ldots = \frac{n(n+1)}{1.2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},$$

$$1+4+10\ldots+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+2)}{1.2.3.4},$$

ec.

APPENDICE II.

Formule di Geometria analitica.

1. L'equazione generale del piano è

$$z = fx + gy + h,$$

dove x, y sono variabili indipendenti, z funzione di esse. Sieno X, Y, Z le coordinate d'un punto qualunque dello spazio; x, y, z le coordinate d'un punto qualunque del piano; la distanza D di questi due punti sarà

$$D = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y) + (z - Z)^2},$$

dovendo x, y, z soddisfare alla equazione $z = fx + gy + h$.

Or siffatta distanza sarà perpendicolare al piano se attribuiremo ad x, y, z dei valori tali da rendere minimo il valore della funzione D (nella quale z dee considerarsi come funzione delle due variabili indipendenti x, y); dovranno adunque le derivate parziali di D, l'una presa rispetto ad x, l'altra ad y essere nulle; dunque

$$x - X + (z - Z)\frac{dz}{dx} = 0, \quad y - Y + (z - Z)\frac{dz}{dg} = 0,$$

saranno le equazioni della perpendicolare al piano, e sufficienti a determinare la direzione di essa. L'eq. del piano $z = fx + gy + h$ deve coesistere colle eq. stesse; dunque sostituendovi i valori di $\frac{dz}{dx} = f, \frac{dz}{dy} = g$ tratti da essa avremo

$$x - X + (z - Z)f = 0, \quad y - Y + (z - Z)g = 0.$$

2. Gli angoli α, β, γ che una retta $[x = az, y = bz]$ fa cogli assi ortogonali sono dati dalle equazioni

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}},$$

dunque gli angoli α, β, γ che una retta perpendicolare al piano $z = fx + gy + h$ e condotta dal punto $[X, Y, Z]$ fa cogli assi ortogonali saranno

$$\cos\alpha = \frac{-f}{\sqrt{f^2+g^2+1}}, \cos\beta = \frac{-g}{\sqrt{f^2+g^2+1}}, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{f^2+y^2+1}}.$$

3. Se il piano sarà dato dalla equazione

$$K + Lx + My + Nz = 0,$$

avremo
$$z = -\frac{L}{N}x - \frac{M}{N}y - \frac{K}{N};$$

ed
$$f = -\frac{L}{N}, \quad g = -\frac{M}{N}, \quad h = -\frac{K}{N};$$

laonde
$$x - X = \frac{L}{N}(z - Z), \quad y - Y = \frac{M}{N}(z - Z),$$

saranno le equazioni della *normale* condotta su quel piano dal punto $[X, Y, Z]$; e gli angoli α, β, γ avranno i valori che vengono loro dati dalle equazioni seguenti

$$\cos\alpha = \frac{L}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}, \cos\beta = \frac{M}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}, \cos\gamma = \frac{N}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}.$$

4. L'equazione del piano tangente sappiamo essere (n. 740)

$$z - Z = (x - X)\frac{dz}{dx} + (y - Y)\frac{dz}{dy};$$

$[X, Y, Z]$ essendo il punto di contatto, e $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ essendo date dalla eq. $z = f(x, y)$ della curva; qui avremo $f = \frac{dz}{dx}, g = \frac{dz}{dy}$, il perchè le equazioni della normale saranno

$$x - X + (z - Z)\frac{dz}{dx} = 0, \quad y - Y + (z - Z)\frac{dz}{dy} = 0;$$

gli angoli α, β, γ che questa normale farà agli assi verranno indicati dalle equazioni

$$\cos\alpha = \frac{-\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}}, \cos\beta = \frac{-\frac{dz}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}}.$$

5. Se l'equazione della superficie sarà data sotto la forma

$$F(x, y, z) = 0,$$

avremo
$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dy} = 0\;;$$

e quindi
$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dz}}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dz}};$$

ond'è che l'equazione del piano tang. si cangerà nella seguente

$$(x - X)\frac{dF}{dx} + (y - Y)\frac{dU}{dy} + (z - Z)\frac{dF}{dz} = 0.$$

Le equazioni della normale saranno

$$(x - X)\frac{dF}{dz} = (z - Z)\frac{dF}{dx}(y - Y)\frac{dF}{dz} = (z - Z)\frac{dF}{dy}.$$

Finalmente gli angoli α, β, γ si avranno dalle formule seguenti

$$\cos\alpha = \frac{\frac{dF}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}, \cos\beta = \frac{\frac{dF}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}},$$

$$\cos = \frac{\frac{dF}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}.$$

6. Abbiasi una curva a doppia curvatura data dalle equazioni $y = fx$, $z = Fx$, le quali rappresentano le proiezioni di essa su i piani xy, xz; eliminando x avremo l'equazione della proiezione della curva istessa sul piano yz. In queste equazioni x è la variabile indipendente; y e z sono funzioni determinate della x.

Sieno $[x, y, z]$, $[x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z]$ due punti della curva: la secante che passa per questi punti farà cogli assi angoli i cui coseni saranno i seguenti

$$\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}, \quad \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}, \quad \frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}};$$

ovvero

$$\frac{\frac{\Delta x}{\Delta x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}}, \quad \frac{\frac{\Delta y}{\Delta x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}$$

$$\frac{\frac{\Delta z}{\Delta x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}}.$$

A misura che Δx decresce i rapporti $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ si avvicinano ai limiti $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, cioè alle derivate delle funzioni $y=fx$, $y=Fx$; indicando α, β, γ gli angoli che la tangente fà cogli assi avremo adunque

$$\cos\alpha = \frac{\frac{dx}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}, \quad \cos\beta = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}};$$

le derivate $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ saranno date dalle equazioni $y=fx$, $y=Fx$.

FINE

INDICE

LIBRO PRIMO

CALCOLO DIFFERENZIALE

LIBRO SECONDO

GLI USI ANALITICI E GEOMETRICI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

LIBRO TERZO

IL CALCOLO INTEGRALE

LIBRO QUARTO

GLI USI ANALITICI E GEOMETRICI DEL CALCOLO INTEGRALE

APPENDICE I.

APPENDICE II.

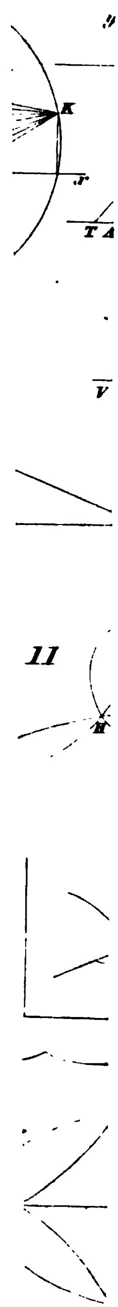
PAG.	VERSO	ERRORI	CORREZIONI
4	31	n. 16	n. 18
6	21	n. 21	n. 23
»	»	$\frac{V}{U}$	$\frac{U}{V}$
21	17	$f(x+h)-fx$	$f(x_0+h)-fx_0$
40	5	le derivate e i differenziali di essa	le derivate di essa
60	22	$D^3 \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x, D^4 \operatorname{sen} x = \cos x;$	$D^3 \cos x = \operatorname{sen} x, D^4 \cos x = \cos x,$
69	28	$x'_u =$	$x'_u =$
70	4	*indipendente*	*indipendente molliplicata per* dz.
73	4	$ar \cos x$	$ar \operatorname{sen} x$
75	18	$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z,...)$	$f(x+\Delta x, y, z,...)$
100	23	$\frac{1}{x'} D\frac{1}{x'} D\frac{1}{x'} D\frac{y'}{x'}$	$\frac{1}{x'} D\frac{1}{x'} D\frac{y'}{x'}$
106	16	$\xi = \frac{y''}{x''}$	$\xi = \frac{y''}{xy''}$
112	ultimo	(3) (14)	(4), (15)
113	19	$fx < 0$.	$f'x < 0$
119	16	fx	Fx
168	22	$1.2..n$	$1.2...(n-1)$
»	27	$1.2...n$	$1.2...(n-1)$
197	7	$f(x, y, z,...)$	$f(a, a_1, a_2,...)$
»	11	$f(x, y, z,...)$	$f(a, a_1, a_2,...)$
»	23	$=0$	$=f0$
»	30	seconda	prima
200	2	$\frac{A}{B}$	$\frac{B}{A}$
221	30	*se questi*	*se in questi*
248	4	$\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}+\sqrt{x-c}$	$\sqrt{x-a}\times\sqrt{x-b}\times\sqrt{x-c}$
321	3	la y	la x

Pag. 256, n. 428, si aggiunga quanto segue;

infatti se la funzione $u=\varphi(x, y)$ deve acquistare un valore massimo o minimo per $x=x_0, y=y_0=ax+b$, dovrà la derivata di u presa rapporto ad x cioè $\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}$ per $x=x_0, y=y_0=ax_0+b$ risultare nulla; ora $\frac{dy}{dx}=a$, dunque

$$\frac{du}{dx}+\frac{du}{dy}a=0\,;$$

la quale equazione dovendosi verificare per qualunque valore di a si risolve necessariamente nelle due seguenti $\frac{du}{dx}=0, \frac{du}{dy}=0$.


K
T A
V
11